Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s1journaldemat04liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

IMPRIMERIE DE M. BACHELIER,
RUE DU JARDINET, N° 12.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

Membre de l'Institut, professeur d'Analyse à l'École Polytechnique.

TOME QUATRIÈME.

ANNÉE 1839.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1839

QA
1
J684
t.4

20760
c.

TABLE DES MATIÈRES.

Sur l'intégration des équations linéaires aux différentielles partielles; par M. *Liouville*. Page 1

Note sur la Théorie des Nombres; par M. *Catalan*. 7

Suite des Recherches sur les Nombres; par M. *Lebesgue*. 9

Détermination des centres de gravité des fuseaux et des onglets de révolution; par M. *Lebesgue*. 60

Note sur les surfaces isothermes dans les corps solides dont la conductibilité n'est pas la même dans tous les sens; par M. *Duhamel*. 63

Réflexions sur le Problème de déterminer le nombre de manières dont une figure rectiligne peut être partagée en triangles au moyen de ses diagonales; par M. *J. Binet*. 79

Solution nouvelle de cette question : Un polygone étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales? par M. *Catalan*. 91

Addition à la Note sur une Equation aux différences finies, insérée dans le volume précédent, page 508; par M. *Catalan*. 95

Mémoire sur les axes des surfaces isothermes du second degré, considérés comme des fonctions de la température; par M. *Lamé*. 100

Mémoire sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux; par M. *Lamé*. 126

Sur une nouvelle méthode pour la détermination des intégrales multiples; par M. *Lejeune-Dirichlet*. 164

Observations sur un Mémoire de M. *Ivory*; par M. *Liouville*. 169

Sur le nombre de normales qu'on peut mener par un point donné à une surface algébrique; par M. *Terquem*. 175

Sur un symbole combinatoire d'Euler et son utilité dans l'analyse; par M. *Terquem*. 177

Extrait d'une lettre de M *Wantzel* à M. *Liouville*. 185

Mémoire de Géométrie descriptive. Théorie de l'osculation des sections coniques, et construction d'un cercle osculateur en un point d'une section conique; par M. *Olivier*. 189

Nouvelle règle pour la convergence des séries; par M. *Duhamel*. 214

Intégration d'une équation aux différences; par M. *Duhamel*. 222

Note sur quelques intégrales définies; par M. *Liouville*. 225

Note sur les inversions ou dérangements produits dans les permutations; par M. *Rodrigues*. 236

Sur une propriété des surfaces du second degré; par M. *Terquem*. 241

Rapport fait à la Société Philomatique sur une machine à flotteur oscillant, de M. *de Caligny*. 243

Sur la diffraction de la lumière, par M. *Abria*. 248

Note sur l'origine de nos chiffres et sur l'*Abacus* des Pythagoriciens; par M. *Vincent*. 261

Recherches géométriques sur les engrenages de With; par M. *Olivier*. 281

Construction géométrique d'un engrenage dans lequel les axes des deux roues dentées ne sont pas situés dans un même plan, et comprennent entre eux un angle plus petit que l'angle droit, les vitesses étant dans un rapport constant et le frottement étant de roulement angulaire; par M. *Olivier*. 304

Note sur l'évaluation approchée du produit $1.2.3\ldots.x$; par M. *Liouville*. 317

Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples; par M. *Catalan*. 323

Note sur le centre de gravité du tronc de prisme; par M. *Brianchon*. 345

Propriétés nouvelles de l'hyperboloïde à une nappe; par M. *Chasles*. 348

Second Mémoire sur l'équilibre des températures dans les corps solides homogènes de forme ellipsoïdale, concernant particulièrement les ellipsoïdes de révolution; par M. *Lamé*. 351

Sur le centre de gravité d'une portion quelconque de surface sphérique et de quelques autres surfaces; par M. *Giulio*. 386

Sur l'intégration de l'équation $\frac{d^n y}{dx^n} = x^m . y$; par M. *Kummer*. 390

Sur le nombre des polygones déterminés par n points pris pour sommets; par M. *Guibert*. 392

Démonstration de cette proposition : Toute progression arithmétique dont le premier terme et la raison sont des entiers sans diviseur commun contient une infinité de nombres premiers; par M. *Lejeune-Dirichlet*. 393

Mémoire sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites; par M. *Liouville*. 423

Généralisation de la Théorie des foyers dans les sections coniques, par M. *Transon*. 457

Sur les variations séculaires des angles que forment entre elles les droites résultant des intersections des orbites de Jupiter, Saturne et Uranus; par M. *Liouville*. 483

Sur la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de plusieurs quantités positives; par M. *Liouville*. 493

Note sur quelques points de la théorie de l'électricité; par M. *Bertrand*. 495

Sur le principe fondamental de la théorie des équations algébriques; par M. *Liouville*. 501

Démonstration de la formule générale qui donne les valeurs des inconnues dans les équations du premier degré; par M. *Molins*. 509

Errata. 516

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Sur l'intégration des Équations linéaires aux Différentielles partielles ;

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

Soient t, x, y, z des variables indépendantes, a une constante, $\psi(t, x, y, z)$, $f(x, y, z)$, $F(x, y, z)$ des fonctions connues dont la première contient t qui n'entre pas dans les deux autres. On propose de trouver la fonction φ qui satisfait à l'équation indéfinie

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} - a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) = \psi(t, x, y, z),$$

et aux conditions définies

$$(2) \qquad \varphi = f(x, y, z), \quad \frac{d\varphi}{dt} = F(x, y, z) \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

Lorsque la fonction $\psi(t, x, y, z)$ est supposée indépendante de t et se réduit à $\psi(x, y, z)$, l'équation (1) rentre dans celle que j'ai traitée à la page 435 du volume précédent. La méthode très simple dont j'ai fait usage dans ce cas particulier s'étend aisément au cas général. On peut la présenter comme il suit.

Concevons qu'on ait développé la quantité $\psi(t, x, y, z)$, considérée comme fonction de t, en une série exponentielle de la forme

$\Sigma e^{mt}.\psi_m(x, y, z)$, m étant un exposant qui prend successivement diverses valeurs et le signe Σ indiquant une somme relative à ces valeurs de m. L'équation (1) deviendra ainsi

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) = \Sigma e^{mt}.\psi_m(x, y, z).$$

On la vérifiera évidemment, ainsi que les conditions (2), en prenant

$$\varphi = u + \Sigma\varphi_m,$$

u étant déterminé par ce système d'équations

$$(3) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} - a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) = 0,$$

$$(4) \qquad u = f(x, y, z), \ \frac{du}{dt} = F(x, y, z) \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

et φ_m par cet autre système

$$(5) \qquad \frac{d^2\varphi_m}{dt^2} - a^2\left(\frac{d^2\varphi_m}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_m}{dy^2} + \frac{d^2\varphi_m}{dz^2}\right) = e^{mt}.\psi_m(x, y, z),$$

$$(6) \qquad \varphi_m = 0, \ \frac{d\varphi_m}{dt} = 0, \ \frac{d^2\varphi_m}{dt^2} = \psi_m(x, y, z) \quad \text{pour} \quad t = 0:$$

la dernière des équations (6) est au reste une conséquence immédiate de l'équation (5), dont elle se déduit en posant $t = 0$ et observant que, pour cette valeur de t, $\varphi_m = 0$.

La valeur de u est connue depuis long-temps : elle a été donnée par M. Poisson dans son beau Mémoire sur l'intégration de quelques équations différentielles partielles (*Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences*, tome III). Cet illustre géomètre a démontré que

$$u = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} F(x + at\cos\theta, y + at\sin\theta\sin\omega, z + at\sin\theta\cos\omega)\, t\sin\theta d\theta d\omega$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(x + at\cos\theta, y + at\sin\theta\sin\omega, z + at\sin\theta\cos\omega)\, t\sin\theta d\theta d\omega.$$

Maintenant pour trouver φ_m je différentie l'équation (5) par rapport à t, puis de l'équation différentielle ainsi obtenue, je retranche l'équation (5) après avoir multiplié les deux membres de celle-ci par m. Cette opération fait disparaître la fonction $\psi_m(x, y, z)$, de sorte qu'en posant

$$(7) \qquad \frac{d\varphi_m}{dt} - m\varphi_m = \lambda_m,$$

on obtient

$$(8) \qquad \frac{d^2\lambda_m}{dt^2} - a^2\left(\frac{d^2\lambda_m}{dx^2} + \frac{d^2\lambda_m}{dy^2} + \frac{d^2\lambda_m}{dz^2}\right) = 0.$$

D'un autre côté si l'on pose $t = 0$ dans les équations

$$\lambda_m = \frac{d\varphi_m}{dt} - m\varphi_m, \quad \frac{d\lambda_m}{dt} = \frac{d^2\varphi_m}{dt^2} - m\frac{d\varphi_m}{dt},$$

et qu'on ait égard aux conditions (6), on trouve

$$(9) \qquad \lambda_m = 0, \quad \frac{d\lambda_m}{dt} = \psi_m(x, y, z).$$

La valeur de λ_m se déduira donc de celle de φ en remplaçant la fonction F par ψ_m et la fonction f par zéro. On aura

$$\lambda_m = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \psi_m(x + at\cos\theta,\ y + at\sin\theta\sin\omega,\ z + at\sin\theta\cos\omega)\, t\sin\theta d\theta d\omega.$$

Intégrant ensuite l'équation (7) et se rappelant que $\varphi_m = 0$ pour $t = 0$, on formera la valeur de φ_m, savoir

$$\varphi_m = e^{mt}\int_0^t e^{-mt}.\lambda_m dt,$$

d'où

$$\Sigma\varphi_m = \int_0^t dt\Sigma e^{m(t-t')}.\lambda'_m,$$

λ'_m étant ce que devient λ_m lorsqu'on y change t en t'. Mettant pour λ'_m sa valeur, et observant que la quantité

$$\Sigma e^{m(t-t')}.\psi_m(x + at'\cos\theta,\ y + at'\sin\theta\sin\omega,\ z + at'\sin\theta\cos\omega)$$

est égale à

$$\psi(t - t',\ x + at'\cos\theta,\ y + at'\sin\theta\cos\omega,\ z + at'\sin\theta\cos\omega),$$

on a finalement une valeur de $\Sigma\varphi_m$ exprimée par l'intégrale triple

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_0^\pi\int_0^{2\pi} (\psi - t',\ x + at'\cos\theta,\ y + at'\sin\theta\sin\omega,\ z + at'\sin\theta\cos\omega)t'\sin\theta dt' d\theta d\omega.$$

Ainsi les deux parties u et $\Sigma\varphi_m$, dont φ est la somme, sont à présent déterminées. Lorsque $\psi(t, x, y, z)$ se réduit à la forme $e^{mt}.\psi(x, y, z)$, notre valeur de φ s'accorde avec celle que M. Poisson a donnée dans une Note *sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles*, imprimée tome III de ce Journal, page 615.

A peine est-il nécessaire d'observer que le point essentiel de la méthode exposée ci-dessus pour intégrer l'équation (1) est de faire disparaître par une transformation le second membre $\psi(t, x, y, z)$, et de tout ramener au cas où ce second membre est zéro. Les valeurs de u et de λ_m dépendent en effet d'équations semblables à celle dont φ dépendrait si la fonction $\psi(t, x, y, z)$ était nulle. Dans la Note citée plus haut, M. Poisson se sert pour faire disparaître la fonction ψ d'un procédé connu qui consiste à poser $\varphi = p + \varphi'$, p étant une intégrale particulière de l'équation (1). Ce procédé s'applique à toute équation linéaire de la forme

$$(A) \qquad \Phi = \psi,$$

ψ étant une fonction des seules variables indépendantes t, x, y, z, etc., tandis que tous les termes de Φ contiennent en facteur soit la fonction φ, soit une de ses dérivées partielles. « Mais, ajoute le » savant auteur, il n'y a pas de règles générales et directes pour la » détermination de l'intégrale particulière p, si ce n'est quand il s'agit » d'une équation à coefficients constants, c'est-à-dire lorsque les coef- » ficients de φ et de ses différences dans le premier membre de (A) » sont indépendants de t, x, y, z, etc. »

La méthode que nous avons développée tout-à-l'heure est moins limitée : cette méthode en effet s'étend d'elle-même au cas où les coefficients de φ et de ses dérivées partielles sont variables dans l'équation (A) et fonctions de x, y, z, etc. : pour qu'on puisse l'appliquer, il n'est pas nécessaire que les coefficients dont nous parlons soient indépendants de t, x, y, z, etc. ; il suffit qu'ils soient indépendants de t.

Supposons par exemple que P et Q étant deux fonctions de x et y, on sache trouver la fonction u de t, x, y, qui vérifie à la fois l'équation indéfinie

$$(10) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} - P\frac{d^2u}{dx^2} - Q\frac{d^2u}{dy^2} = 0,$$

et les conditions particulières

$$(11) \qquad u = f(x, y), \quad \frac{du}{dt} = F(x, y) \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

Pour trouver une fonction φ qui vérifie l'équation

$$(12) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} - P\frac{d^2\varphi}{dx^2} - Q\frac{d^2\varphi}{dy^2} = \psi(t, x, y),$$

et les conditions particulières

$$(13) \qquad \varphi = f(x, y), \quad \frac{d\varphi}{dt} = F(x, y) \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

il suffira de développer $\psi(t, x, y)$ en une série exponentielle $\Sigma e^{mt}.\psi_m(x, y)$, puis de prendre

$$\varphi = u + \Sigma\varphi_m,$$

et de déterminer φ_m par l'équation

$$(14) \qquad \frac{d^2\varphi_m}{dt^2} - P\frac{d^2\varphi_m}{dx^2} - Q\frac{d^2\varphi_m}{dy^2} = e^{mt}.\psi_m(x, y),$$

et par les conditions définies

$$(15) \qquad \varphi_m = 0, \quad \frac{d\varphi_m}{dt} = 0, \quad \frac{d^2\varphi_m}{dt^2} = \psi_m(x, y),$$

dont la dernière se déduit au reste de l'équation (14) en y posant $t = 0$ et observant qu'alors $\varphi_m = 0$. Maintenant je différentie l'équation (14) par rapport à t, puis de l'équation différentielle ainsi obtenue je retranche l'équation (14) dont je multiplie d'abord les deux membres par m. En faisant

$$(16) \qquad \frac{d\varphi_m}{dt} - m\varphi_m = \lambda_m,$$

je trouve ainsi

$$(17) \qquad \frac{d^2\lambda_m}{dt^2} - P\frac{d^2\lambda_m}{dx^2} - Q\frac{d^2\lambda_m}{dy^2} = 0;$$

d'ailleurs les équations

$$\lambda_m = \frac{d\varphi_m}{dt} - m\varphi_m, \quad \frac{d\lambda_m}{dt} = \frac{d^2\varphi_m}{dt^2} - m\frac{d\varphi_m}{dt}$$

donnent

$$(18) \qquad \lambda_m = 0, \quad \frac{d\lambda_m}{dt} = \psi_m(x, y) \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

en vertu des conditions (15). La valeur de λ_m se déduira donc de celle de u, supposée connue, en remplaçant F par ψ_m et f par zéro. Ensuite l'équation (16) donnera

$$\varphi_m = \int_0^t e^{m(t-t')} . \lambda'_m dt',$$

λ'_m étant ce que devient λ_m lorsqu'on y change t en t'. On obtiendra donc finalement

$$\varphi = u + \int_0^t dt \Sigma e^{m(t-t')} . \lambda'_m,$$

ce qui résout le problème proposé.

La même méthode peut être appliquée aux équations linéaires simultanées. De plus elle n'exige pas nécessairement que les conditions définies jointes à ces équations se présentent sous la forme admise dans les deux exemples précédents et soient relatives à $t = 0$. Je n'insisterai pas sur ces détails. Il me suffit d'avoir appelé l'attention des géomètres sur une méthode générale trop simple pour n'avoir pas été aperçue par d'autres auteurs et même peut-être employée plusieurs fois, mais dont on ne paraît pas avoir assez apprécié jusqu'ici l'utilité et l'étendue.

NOTE

Sur la Théorie des Nombres;

PAR E. CATALAN.

I.

THÉORÈME. « N étant un nombre entier quelconque, dont les diviseurs sont d, d', d'', ..., et $\varphi(n)$ désignant généralement le nombre des facteurs premiers avec n, et plus petits que n, on a

$$\varphi(d) + \varphi(d') + \varphi(d'') + \ldots = \mathrm{N}. \text{ »}$$

Démonstration (*). Soit $\mathrm{N} = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, a, b, c, ... désignant les facteurs premiers de N. En appelant d un quelconque des diviseurs de N, on pourra le représenter par $a^i b^k c^l \ldots$, expression dans laquelle les exposants i, k, l, ... peuvent varier respectivement de o à α, de o à β, de o à γ, etc. Par une formule connue,

$$\varphi(d) = d.\frac{a-1}{a}.\frac{b-1}{b}.\frac{c-1}{c}\ldots = a^{i-1}(a-1)\times b^{k-1}(b-1)\times c^{l-1}(c-1)\times\ldots,$$

chacun des facteurs de ce dernier produit étant remplacé par l'unité, lorsque l'exposant qui s'y trouve est -1; la somme $\varphi(d) + \varphi(d') + \varphi_2(d'') + \ldots$ sera donc égale au produit des quantités

$$1 + (a-1) + a(a-1) + a^2(a-1) + \ldots + a^{\alpha-1}(a-1),$$
$$1 + (b-1) + b(b-1) + b^2(b-1) + \ldots + b^{\beta-1}(b-1),$$
$$1 + (c-1) + c(c-1) + c^2(c-1) + \ldots + c^{\gamma-1}(c-1), \text{ etc.},$$

(*) On en trouve une autre dans la 2me section des *Recherches arithmétiques* de M. Gauss.

de sorte qu'en supprimant les termes qui se détruisent, il viendra

$$\Phi(d) + \Phi(d') + \Phi(d'') + \ldots = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots = \mathrm{N}. \qquad C.\ Q.\ F.\ D.$$

II.

En mettant la fonction $(1 + t + t^2 + \ldots + t^{m-1})^{\mu}$, sous la forme $(1 - t^m)^{\mu}\,(1 - t)^{-\mu}$, on trouve que le coefficient de t^s, dans le développement de cette fonction, peut être exprimé par

$$k = \sum_0^q (-1)^i \,.\, \mathrm{C}_{\mu,i} \,.\, \mathrm{C}_{s-im+\mu-i\,,\,\mu-1}\,;$$

dans cette formule, q représente le quotient entier de s par m, et $\mathrm{C}_{n,p}$ désigne généralement le nombre des combinaisons de n lettres, prises p à p.

Prenons $s = (m - 1)\mu$: le coefficient k deviendra l'unité; donc

$$(\mathrm{A}) \qquad 1.2.3\ldots(\mu - 1) = \sum_0^q (-1)^i \mathrm{C}_{\mu,i} \,.\, \mathrm{P}_{m(\mu-i)-1\,,\,\mu-1}\,,$$

$\mathrm{P}_{m(\mu-i)-1,\,\mu-1}$ désignant le nombre des arrangements de $m(\mu - i) - 1$ lettres, prises $\mu - 1$ à $\mu - 1$.

Cette équation se simplifie dans le cas de $m > \mu$. En effet, le quotient exact de s par m étant $\frac{(m-1)\mu}{m} = \mu - \frac{\mu}{m}$, le quotient entier q se réduit alors à $\mu - 1$. Donc

$$(\mathrm{B}) \qquad 1.2.3\ldots(\mu - 1) = \sum_0^{\mu-1} (-1)^i \,.\, \mathrm{C}_{\mu,i} \,.\, \mathrm{P}_{m(\mu-i)-1\,,\,\mu-1}\,.$$

Les réductions exprimées par les équations (A) et (B) sont assez remarquables : on a par exemple, en prenant $m = 8$ et $\mu = 5$,

$$1.2.3.4 = 1.39.38.37.36 - \frac{5}{1}.31.30.29.28 + \frac{5.4}{1.2}.23.22.21.20$$
$$- \frac{5.4}{1.2}.15.14.13.12 + \frac{5}{1}.7.6.5.4.$$

SUITE

DES

RECHERCHES

SUR LES NOMBRES;

PAR M. LEBESGUE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux (*).

§ IV. *Des Résidus cubiques.*

La considération des racines imaginaires des congruences étant utile dans la théorie des résidus de puissances, ainsi que l'a montré M. Jacobi (*De residuis cubicis commentatio numerosa;* Journal de M. Crelle, tome II), nous exposerons dans un premier article quelques propositions concernant ces racines imaginaires, qu'il importe d'introduire dans la théorie des nombres.

I.

Des racines imaginaires des congruences du second degré.—Résolution de la congruence $x^{p+1} \equiv a$ (mod. $p = hm - 1$). — *Conséquences.*

Quand le nombre a n'est pas résidu quadratique du module premier p, la congruence $x^2 \equiv a$ (mod. p) est impossible; en d'autres termes l'expression $x \equiv \sqrt{a}$ (mod. p) est imaginaire, ou n'indique

(*) § I, tome II, page 253; § II et III, tome III, page 113 de ce Journal.

rien de réel. Néanmoins ces expressions imaginaires ne sont pas inutiles à considérer, comme nous le reconnaîtrons bientôt. Nous allons donc exposer, d'après M. Jacobi, la résolution de la congruence..... $x^{p+1} \equiv a$ (mod. $p = hm - 1$), où p est supposé premier. Mais il faut d'abord dire quelque chose des racines imaginaires de la congruence $x^2 \equiv N$ (mod. p), où N est un non-résidu quadratique du nombre premier $p = 2p' + 1$.

Si l'on représente par $n_1, n_2 \ldots n_{p'}$, les non-résidus quadratiques de p, les expressions imaginaires $\sqrt{n_1}, \sqrt{n_2}, \ldots \sqrt{n_{p'}}$ (mod. p), peuvent se ramener à la forme $\alpha\sqrt{n_1}, \beta\sqrt{n_1}, \ldots$ (mod. p), où $\alpha, \beta, \ldots$ sont des nombres entiers. En effet puisque $n_1 n_i$ produit de deux non-résidus quadratiques est un résidu quadratique, on pourra poser $a^2 \equiv n_1 n_i$ (mod. p), d'où $a \equiv \sqrt{n_1}.\sqrt{n_i}$ (mod. p), et par suite $a\sqrt{n_i} \equiv n_i\sqrt{n_1}$ (mod. p); si l'on détermine le nombre b de sorte que l'on ait $ab \equiv 1$ (mod. p), et qu'on fasse $bn_i \equiv \alpha$ (mod. p), il en résultera $\sqrt{n_i} \equiv \alpha\sqrt{n_1}$ (mod. p), et ainsi des autres. On peut conclure de là que si n est un non-résidu quadratique de p, et que la congruence $x^2 + ax + b \equiv 0$ (mod. p) soit impossible, on peut lui trouver deux racines imaginaires de la forme $f \pm g\sqrt{n}$, f et g étant des entiers.

Il n'en est pas cependant des racines imaginaires des congruences comme des racines imaginaires des équations. Si l'on suppose, par exemple, a non-résidu cubique du nombre premier $p = 3h + 1$, la congruence $x^3 \equiv a$ (mod. p) sera impossible, l'expression $\sqrt[3]{a}$ (mod. p) sera imaginaire, mais elle ne saurait se réduire à la forme $y + z\sqrt{n}$, où y et z sont des entiers et n un non-résidu quadratique de p. Si cela pouvait être, on aurait

$$y^3 + 3nyz^2 - a + (3y^2z + nz^3)\sqrt{n} \equiv 0 \text{ (mod. } p);$$

comme $\sqrt{n}$ (mod. p) ne saurait avoir une valeur réelle, il faudrait donc poser les deux congruences

$$y^3 + 3nyz^2 - a \equiv 0, \qquad 3y^2z + nz^3 \equiv 0 \text{ (mod. } p),$$

et comme on ne peut avoir $z \equiv 0$ (mod. p), la seconde donnerait $-nz^2 \equiv 3y^2$ (mod. p), ce qui réduirait la première à $(-2y)^3 \equiv a$ (mod. p), congruence impossible, puisque a est non-résidu cubique. L'expres-

sion imaginaire $\sqrt[3]{a}$ (mod. $p = 3h + 1$) n'est donc jamais réductible à la forme $f + g\sqrt{n}$ (mod. p).

Néanmoins il est des congruences binomes dont toutes les racines ont la forme $f + g\sqrt{n}$ (mod. p). Soit, par exemple, la congruence $x^{p+1} \equiv a$(mod. p), posant $x \equiv y + z\sqrt{n}$ (mod. p), n étant un non-résidu quadratique de p, ce qui suppose $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$(mod. p), on trouvera immédiatement

$$x^p \equiv y^p + n^{\frac{p-1}{2}} . z^p . \sqrt{n} \equiv y - z\sqrt{n} \text{ (mod. } p),$$

à cause de

$$y^p \equiv y, \quad z^p \equiv z \quad \text{(mod. } p).$$

De là encore $\quad x^{p+1} \equiv y^2 - nz^2 \quad$ (mod. p)

et par suite, $\quad y^2 - nz^2 \equiv a$ (mod. p).

Quand on aura déterminé y et z (nombres entiers réels) par cette congruence qui a $p + 1$ solutions, par un théorème du § I de ces *Recherches*, on aura les $p+1$ racines de la congruence $x^{p+1} \equiv a$(mod. p), savoir $x \equiv y + z\sqrt{n}$ (mod. p) où y et z peuvent prendre le double signe $\pm$; ainsi les racines s'assemblent quatre à quatre de la manière suivante :

$$x \equiv y \pm z\sqrt{n}, \quad x \equiv -y \pm z\sqrt{n} \text{(mod. } p),$$

en supposant y et z positifs. Pour le cas de $z = 0$ qui exige que a soit résidu quadratique de p, on a

$$y^2 \equiv a \text{(mod. } p), \quad \text{puis} \quad x \equiv \pm y \text{(mod. } p)$$

et ce sont là les seules racines réelles, puisque pour de telles racines on a toujours

$$x^{p+1} \equiv x^2 \equiv a \quad \text{(mod. } p).$$

Les deux racines imaginaires conjuguées

$$x \equiv y + z\sqrt{n} \quad \text{et} \quad x \equiv y - z\sqrt{n} \text{ (mod. } p)$$

donnent le facteur quadratique trinome

$$(x-y)^2 - nz^2 \equiv x^2 - 2yx + a \pmod{p}.$$

Pour $y = 0$, ce facteur se réduit à $x^2 + a$. Ce cas ne peut arriver que pour $-nz^2 \equiv a \pmod{p}$, ou pour $-a$ non-résidu quadratique, et il arrive toujours quand cette condition est remplie. Quant aux deux racines réelles, elles donnent le facteur quadratique $x^2 - a$.

Appliquons ce qui précède à la congruence $x^{p+1} \equiv 1 \pmod{p}$. Il y aura d'abord deux racines réelles $+1$ et -1, puis $p-1$ racines imaginaires de forme $f + g\sqrt{n} \pmod{p}$ sous la relation $f^2 - ng^2 \equiv 1 \pmod{p}$. Or ici, comme pour le cas de la congruence $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, il existe des racines imaginaires primitives $r \equiv f + g\sqrt{n} \pmod{p}$, c'est-à-dire qui sont telles que la suite

$$r,\ r^2,\ r^3, \ldots r^{p-1},\ r^p,\ r^{p+1} \equiv 1 \pmod{p}$$

reproduit les $p+1$ racines de $x^{p+1} \equiv 1 \pmod{p}$, trouvées par la résolution de la congruence $f^2 - ng^2 \equiv 1 \pmod{p}$. On pourrait le prouver ainsi qu'il est dit à la page 258 du tome II de ce Journal, ce qui donnerait la congruence aux racines primitives imaginaires. On peut aussi appliquer au cas présent la démonstration donnée dans les n°s 52—55 des *Recherches arithmétiques* de M Gauss, en ayant soin de remplacer les $p-1$ racines $1, 2, 3, \ldots p-1$ de la congruence $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, par les $p+1$ racines de la congruence $x^{p+1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Cela posé, soit m un diviseur de $p+1$, de sorte qu'on ait $p = hm - 1$, si l'on écrit la congruence

$$x^{p+1} \equiv 1 \pmod{p = hm - 1}$$

sous la forme

$$(x^m)^h \equiv 1 \pmod{p = hm - 1},$$

les racines de $y^h \equiv 1 \pmod{p = hm - 1}$, au nombre de k, seront les résidus de m^e puissance; quand on aura calculé les valeurs de x, la formule x^m les donnera toutes.

Quant aux non-résidus de m^e puissance, si l'on cherche les racines

de $t^m \equiv 1$ (mod. p) qui, en représentant par r une racine primitive de la congruence $x^{p+1} \equiv 1$ (mod. $p = hm - 1$), sont

$$r^h,\ r^{2h}, \ldots r^{(m-1)h},\ r^{mh} \equiv 1 \text{ (mod. } p),$$

ou pour abréger,

$$\rho,\ \rho^2, \ldots \rho^{m-1},\ \rho^m \equiv 1 \text{ (mod. } p), \quad \text{en faisant} \quad r^h \equiv \rho \text{ (mod. } p);$$

une racine R de la congruence $x^{p+1} \equiv 1$ (mod. p) sera dite non-résidu de k^e classe, si elle donne $R^k \equiv \rho^k$ (mod. p). Cette classification est comme l'on voit la même que pour les racines réelles. On doit aussi remarquer que le numérotage des classes de non-résidus peut varier avec la racine primitive ρ de la congruence $t^m \equiv 1$ (mod. p), ce qui n'empêche point cette classification d'être fort utile.

Soit pour exemple $m = 3$ et le module $p = 3q - 1$. Ici -3 est non-résidu quadratique de p; les racines de la congruence $x^{p+1} \equiv 1$ (mod. $p = 3q - 1$) sont de forme $y + z\sqrt{-3}$ (mod. p), sous la relation $y^2 + 3z^2 \equiv 1$ (mod. p), et comme les trois racines de la congruence $t^3 \equiv 1$ (mod. p) sont 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ (mod. p), on reconnaîtra la classe de $R \equiv f + g\sqrt{-3}$ (mod. p), racine de la congruence $x^{p+1} \equiv 1$ (mod. p), ainsi qu'il suit :

Si l'on a

$$(f + g\sqrt{-3})^q \equiv 1 \text{ (mod. } p),$$

la racine R sera un résidu cubique. Ce sera un non-résidu de première classe si l'on a

$$(f + g\sqrt{-3})^q \equiv \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \text{ (mod. } p),$$

et un non-résidu de deuxième classe, si l'on a

$$(f + g\sqrt{-3})^q \equiv \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \text{ (mod. } p).$$

Ainsi pour le module $5 = 3 \,.\, 2 - 1$, comme la congruence

$f^2+3g^2\equiv 1$ (mod. 5) a les six solutions

$$g=0,\ f=1;\ g=0,\ f=-1;\ g=2,\ f=2;\ g=2,\ f=-2;$$
$$g=-2,\ f=2;\ g=-2,\ f=-2;$$

la congruence $x^6\equiv 1$ (mod. 5) aura les six racines

$$\pm 1,\quad 2\pm 2\sqrt{-3},\quad -2\pm 2\sqrt{-3}\ (\text{mod. } 5);$$

or les racines

$$1,\quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\ (\text{mod. } 5)$$

reviennent à

$$1,\quad 2-2\sqrt{-3},\quad 2+2\sqrt{-3}\ (\text{mod. } 5),$$

d'après cela les résidus cubiques seront $+1$ et -1;
les non-résidus de première classe seront $2+2\sqrt{-3}$, $-2-2\sqrt{-3}$;
les non-résidus de deuxième classe seront $2-2\sqrt{-3}$, $-2+2\sqrt{-3}$.

Soit pour second exemple $m=4$ et $p=4q-1$. Comme ici -1 est non-résidu quadratique de p, les racines de $x^{p+1}\equiv 1$ (mod. $p=4q-1$) seront de forme $f+g\sqrt{-1}$ (mod. p), sous la relation $f^2+g^2\equiv 1$ (mod. $p=4q-1$) et comme les quatre racines de la congruence $t^4\equiv 1$ (mod. p) sont ± 1 et $\pm\sqrt{-1}$ (mod. p), une racine.... $R\equiv f+g\sqrt{-1}$ (mod. p) de la congruence $x^{p+1}\equiv 1$ (mod. $p=4q-1$)

$$\left.\begin{array}{ll}\text{sera résidu biquadratique pour} & (f+g\sqrt{-1})^q\equiv 1\\ \text{non-résidu de 1}^{\text{re}}\text{ classe pour} & (f+g\sqrt{-1})^q\equiv +\sqrt{-1}\\ \text{non-résidu de 2}^{\text{e}}\text{ classe pour} & (f+g\sqrt{-1})^q\equiv -1\\ \text{non-résidu de 3}^{\text{e}}\text{ classe pour} & (f+g\sqrt{-1})^q\equiv -\sqrt{-1}\end{array}\right\}(\text{mod. } p).$$

Ainsi, pour $p=11=4.3-1$, les racines de la congruence $x^{12}\equiv 1$ (mod. 11), sont

$$\pm 1,\quad \pm\sqrt{-1},\quad +5\pm 3\sqrt{-1},\quad -5\pm 3\sqrt{-1},\quad 3\pm 5\sqrt{-1},$$
$$-3\pm 5\sqrt{-1},$$

et si l'on forme les troisièmes puissances, on trouvera

pour résidus biquadratiques	1 et $5 \pm 3\sqrt{-1}$,
pour non-résidus de 1re classe	$+\sqrt{-1}$ et $\pm 3 - 5\sqrt{-1}$,
pour non-résidus de 2e classe	-1 et $-5 \pm 3\sqrt{-1}$,
pour non-résidus de 3e classe	$-\sqrt{-1}$ et $\pm 3 + 5\sqrt{-1}$.

Si l'on demandait les résidus et non-résidus quadratiques pour le cas de la congruence $x^{p+1} \equiv 1$ (mod. $p = 4q - 1$) au lieu de former les puissances $2q$ des racines, ce qui donnerait 1 pour les résidus quadratiques et -1 pour les non-résidus, on pourrait poser la règle suivante : « La racine $f + g\sqrt{-1}$ (*) (mod. $p = 4q - 1$) sera résidu » quadratique pour $2(f+1)$ résidu quadratique de p, et non-résidu » quadratique, pour $2(f-1)$ non-résidu quadratique de p. » Pour le prouver, remarquons d'abord que l'on a

$$2(f+1).2(f-1) \equiv -4g^2 \text{ (mod. } p = 4q - 1),$$

un des nombres $2(f+1)$, $2(f-1)$ est donc résidu quadratique et l'autre non-résidu quadratique de p. Or, si l'on pose

$$f + g\sqrt{-1} \equiv (y + z\sqrt{-1})^2 \text{ (mod. } p),$$

l en résulte les deux congruences

$$y^2 - z^2 \equiv f, \quad 2yz \equiv g \text{ (mod. } p),$$

d'où par l'élimination de z,

$$(2y^2 - f)^2 \equiv 1 \text{ (mod. } p),$$

et par suite

$$4y^2 \equiv 2(f \pm 1) \text{ (mod. } p);$$

or cette congruence est toujours possible en déterminant convenable-

(*) La démonstration ne change pas quand on remplace -1 par un autre non-résidu quadratique de p.

ment le signe du terme ± 1; donc y et par suite z sont toujours réels.

Si l'on a $4y^2 \equiv 2(f+1) \pmod{p}$, c'est-à-dire $2(f+1)$ résidu quadratique de p, cette dernière congruence, combinée avec $2y^2 - 2z^2 \equiv 2f \pmod{p}$ donnera $y^2 + z^2 \equiv 1 \pmod{p}$, de sorte que $y + z\sqrt{-1}$ étant racine de la congruence $x^{p+1} \equiv 1 \pmod{p}$ $f + g\sqrt{-1}$ sera effectivement résidu quadratique de p. Mais si l'on a $4y^2 \equiv 2(f-1) \pmod{p}$, ou $2(f-1)$ résidu quadratique, il en résultera $y^2 + z^2 \equiv -1 \pmod{p}$, de sorte que $y + z\sqrt{-1}$ n'étant pas racine de la congruence $x^{p+1} \equiv 1 \pmod{p}$, $f + g\sqrt{-1}$ ne sera pas résidu quadratique, ou ce qui revient au même sera non-résidu quadratique de p.

Ces notions suffiront pour ce que nous avons à dire des résidus cubiques et biquadratiques.

II.

Caractères des résidus et non-résidus cubiques pour le module $p = 3h + 1$.

Les théorèmes des paragraphes précédents suffisent pour la solution du problème général :

« Un nombre décomposé en ses facteurs premiers étant donné, » trouver s'il est résidu ou non-résidu cubique; ou plus généralement, » trouver à quelle classe il appartient. »

M. Jacobi a donné, dans la note citée plus haut, les énoncés de deux théorèmes généraux qui font voir dans quel cas un nombre premier est résidu cubique. De ces théorèmes, il n'était pas difficile de passer au cas général, ce que l'auteur n'a pu manquer de faire. M. Cauchy a donné également des théorèmes fort généraux sur les résidus de puissances; j'ignore s'il en a développé les conséquences relativement aux résidus cubiques et biquadratiques. (Voyez *Bulletin de Férussac, pour les Sciences mathématiques*, année 1829.)

On sait que pour le module $p = 3h + 1$, si r représente une racine primitive de la congruence $x^3 \equiv 1 \pmod{p}$, tout nombre $a < p$

donne $a^3 \equiv 1$, ou $\equiv r$, ou $\equiv r^2$ (mod. p), et qu'il est dit résidu cubique pour le premier cas, non-résidu de première classe pour le second, et non-résidu de deuxième classe pour le troisième. Or, comme on aurait pu tout aussi bien, en posant $r^2 \equiv S$ (mod. p), prendre 1, S, S^2 pour racines de la congruence $x^3 \equiv$ (mod. p), on voit qu'il est impossible de distinguer les classes de non-résidus sans faire quelque nouvelle convention. C'est encore ce qui résulte des valeurs des quantités N_q, N'_q, N''_q qui représentent les nombres respectifs de solutions des congruences

$$\left.\begin{array}{l} x_1^3 + x_2^3 \ldots + x_q^3 \equiv \text{à un résidu cubique} \\ x_1^3 + x_2^3 \ldots + x_q^3 \equiv \text{à un non-résidu cubiq., } 1^{re} \text{ classe} \\ x_1^3 + x_2^3 \ldots + x_q^3 \equiv \text{à un non-résidu cubiq., } 2^{e} \text{ classe} \end{array}\right\} \text{(mod. } p\text{.}$$

En effet, si l'on suppose $4p = L^2 + 27M^2$ et $L = 3\lambda - 2$, en représentant par y_0, y_1, y_2 les racines de l'équation

$$y^3 + y^2 + \frac{1}{3}(1 - p)y + \frac{1}{27}(1 - 3p + L) = 0,$$

la formule (41) du § 1 donnera

$$(A)\left\{\begin{array}{l} p(N_q - p^{q-1}) = y_0(1 + 3y_0)^q + y_1(1 + 3y_1)^q + y_2(1 + 3y_2)^q, \\ p(N'_q - p^{q-1}) = y_1(1 + 3y_0)^q + y_2(1 + 3y_1)^q + y_0(1 + 3y_2)^q, \\ p(N''_q - p^{q-1}) = y_2(1 + 3y_0)^q + y_0(1 + 3y_1)^q + y_1(1 + 3y_2)^q. \end{array}\right.$$

On voit de suite que le second membre de la première des équations précédentes est une fonction symétrique des racines de l'équation en y, de sorte que N_q sera déterminé sans ambiguité. Il n'en est pas de même de N'_q et N''_q : selon l'ordre qu'on aura donné aux racines y_0, y_1, y_2 de l'équation en y, N'_q pourra se changer en N''_q et réciproquement.

Pour le voir plus facilement, il suffit de changer $1 + 3y$ en z, et par suite $1 + 3y_0$, $1 + 3y_1$, $1 + 3y_2$ en z_0, z_1 et z_2; il en résultera

$$z^3 - 3pz - pL = 0,$$
$$3p(N_q - p^{q-1}) = z_0^{q+1} + z_1^{q+1} + z_2^{q+1} - (z_0^q + z_1^q + z_2^q),$$
$$3p(N'_q - p^{q-1}) = z_1 z_0^q + z_2 z_1^q + z_0 z_2^q - (z_0^q + z_1^q + z_2^q),$$
$$3p(N''_q - p^{q-1}) = z_2 z_0^q + z_0 z_2^q + z_1 z_2^q - (z_0^q + z_1^q + z_2^q);$$

et comme en posant

$$z_1 z_0^q + z_2 z_1^q + z_0 z_2^q = \mathrm{T}, \quad z_2 z_0^q + z_0 z_1^q + z_1 z_2^q = \mathrm{T}',$$

on a les équations

$$\mathrm{T} + \mathrm{T}' = (z_0 + z_1 + z_2)(z_0^q + z_1^q + z_2^q) - (z_0^{q+1} + z_1^{q+1} + z_2^{q+1}),$$
$$\mathrm{T}.\mathrm{T}' = z_0 z_1 z_2 (z_0^{2q-1} + z_1^{2q-1} + z_2^{2q-1}) + z_0^2 . z_1^2 . z_2^2 (z_0^{q-2} + z_1^{q-2} + z_2^{q-2})$$
$$+ z_0^{q+1} z_2^{q+1} + z_0^{q+1} z_1^{q+1} + z_1^{q+1} z_2^{q+1},$$

dont les seconds membres sont des fonctions symétriques des racines z_0, z_1, z_2, il en résultera que T et T′ sont racines d'une équation du second degré; ils ne différeront donc, aussi bien que N'_q et N''_q, que par le signe d'un radical.

Pour le cas particulier de $q = 2$, on a, en représentant par f_k la somme $z_0^k + z_1^k + z_2^k$, les équations

$$\mathrm{T} + \mathrm{T}' = f_1 f_2 - f_3, \quad \mathrm{TT}' = p\mathrm{L} f_3 + 3p^2\mathrm{L}^2 + \tfrac{1}{2}(f_3^2 - f_6),$$

d'où l'on tirera à cause de $f_1 = 0$,

$$(\mathrm{T} - \mathrm{T}')^2 = 2f_6 - f_3^2 - 4p\mathrm{L} f_3 - 12p^2\mathrm{L}^2;$$

mais

$$f_3 = 3p\mathrm{L}, \quad f_6 = 54p^3 + 3p^2\mathrm{L}^2,$$

donc

$$(\mathrm{T} - \mathrm{T}')^2 = 27p^2(4p - \mathrm{L}^2) = (27p\mathrm{M})^2.$$

Ainsi

$$\mathrm{T} + \mathrm{T}' = -3p\mathrm{L}, \quad \mathrm{T} - \mathrm{T}' = \mp 27p\mathrm{M},$$

d'où

$$\mathrm{T} = -3p\left(\frac{\mathrm{L} + 9\mathrm{M}}{2}\right), \quad \mathrm{T}' = -3p\left(\frac{\mathrm{L} - 9\mathrm{M}}{2}\right),$$

en prenant le signe supérieur, ou bien

$$\mathrm{T} = -3p\left(\frac{\mathrm{L} - 9\mathrm{M}}{2}\right), \quad \mathrm{T}' = -3p\left(\frac{\mathrm{L} + 9\mathrm{M}}{2}\right),$$

en prenant le signe inférieur.

Nous emploierons toujours les premières valeurs, c'est-à-dire celles qui répondent à $T - T' = -27pM$.

Si maintenant l'on tire de l'équation en z, $z^4 = F + Gz + Hz^2$, F, G et H étant des fonctions entières des coefficients de l'équation en z, on en déduira

$$z_1 z_0^q + z_2 z_1^q + z_0 z_2^q = -3pG + H(z_1 z_0^2 + z_2 z_1^2 + z_0 z_2^2),$$
$$z_2 z_0^q + z_0 z_1^q + z_1 z_2^q = -3pG + H(z_2 z_0^2 + z_0 z_1^2 + z_1 z_2^2),$$

ou bien

$$z_1 z_0^q + z_2 z_1^q + z_0 z_2^q = -3pG - 3pH\left(\frac{L + 9M}{2}\right),$$

$$z_2 z_0^q + z_0 z_1^q + z_1 z_2^q = -3pG - 3pH\left(\frac{L - 9M}{2}\right).$$

Ainsi c'est toujours au changement de signe de M que tient le changement de N'_q en N''_q et réciproquement.

Si l'on remarque que les trois racines de l'équation en z sont

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{4p(L + 3M\sqrt{-3})} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{4p(L - 3M\sqrt{-3})} = \frac{1}{2}(P + Q),$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)P + \frac{1}{2}\left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right)Q,$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right)P + \frac{1}{2}\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)Q,$$

ou bien

$$\frac{1}{2}(P + Q), \quad \frac{1}{2}(\alpha P + \alpha^2 Q), \quad \frac{1}{2}(\alpha^2 P + \alpha Q),$$

sous l'hypothèse

$$\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \alpha, \quad \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \alpha^2,$$
$$P = \sqrt[3]{4p(L + 3M\sqrt{-3})}, \quad Q = \sqrt[3]{4p(L - 3M\sqrt{-3})};$$

en posant

$$z_0 = \frac{1}{2}(P + Q), \quad z_1 = \frac{1}{2}(\alpha P + \alpha^2 Q), \quad z_2 = \frac{1}{2}(\alpha^2 P + \alpha Q),$$

on trouvera

$$z_1 z_0^2 + z_2 z_1^2 + z_0 z_2^2 = -3p\left(\frac{L+9M}{2}\right);$$

il faut donc admettre les valeurs précédentes des racines z_0, z_1 et z_2, et convenir que $N_{\prime\prime}$ et $N_{\prime\prime}$, données alors par la deuxième équation et par la troisième du système (A), répondront aux non-résidus cubiques de première classe, et aux non-résidus de seconde classe.

Les classes de non-résidus étant ainsi fixées, cherchons la classe du nombre 2.

On trouve sans difficulté

$$N_2 = p - L - 2,\quad N_2' = p - 2 - \frac{L+9M}{2},\quad N_2'' = p - 2 - \frac{L-9M}{2},$$

et par conséquent les équations

$$\begin{aligned} n_2 &= N_2 - 2N_1, & n_2' &= N_2' - 2N_1', & n_2'' &= N_2'' - 2N_1'', \\ N_1 &= 3, & N_1' &= 0, & N_1'' &= 0, \end{aligned}$$

donneront

$$n_2 = p - 8 + L,\quad n_2' = p - 2 - \frac{L+9M}{2},\quad n_2'' = p - 2 - \frac{L-9M}{2}.$$

Pour savoir à quelle classe appartient le nombre 2, il suffira de trouver lequel des trois nombres n_2, n_2', n_2'' est de forme $3^2(2Q+1)$, d'après ce qui a été démontré dans le § III. La division par 9 s'effectue nécessairement, ce qui peut se vérifier facilement, car $L = 3\lambda - 2$ change $4p = L^2 + 27M^2$ en $4(h+\lambda) = 3\lambda^2 + 9M^2$, d'où l'on doit conclure que $h+\lambda$ est divisible par 3. D'ailleurs $p = 3h+1$, on trouve donc

$$\begin{aligned} n_2 = 3(h+\lambda) - 9,\quad 4n_2' &= 6[3h - (h+\lambda)] - 18M, \\ 4n_2'' &= 6[3h - (h+\lambda)] + 18M, \end{aligned}$$

ce qui montre que la division par 9 est possible. Il suffit donc de chercher lequel des trois nombres n_2, n_2', n_2'' est impair; en négligeant les

multiples de 2 on trouve

$$n_2 \equiv 1 + L,\ n_2' \equiv 1 - \frac{L+M}{2},\ n_2'' \equiv 1 - \frac{L-M}{2} \pmod{2},$$

d'où la proposition qui suit :

« *Théorème.* Le nombre 2 est résidu cubique du nombre premier » $p = 3h + 1$, pour $M \equiv 0 \pmod{2}$, [qui entraîne $L \equiv 0 \pmod{2}$ » et réciproquement]. Pour $L \equiv -M \pmod{4}$, 2 est non-résidu » cubique de première classe, et pour $L \equiv M \pmod{4}$, 2 est non-» résidu cubique de seconde classe. »

On trouvera de même, mais par un calcul un peu plus long,

$$N_3 = p - L + 6p,\quad N_3' = p - L - 3p,\quad N_3'' = p - L - 3p,$$

et au moyen des équations

$$n_3 = N_3 - 3N_2 + 3N_1,\ n_3' = N_3' - 3N_2' + 3N_1',\ n_3'' = N_3'' - 3N_2'' + 3N_1'',$$

il en résultera

$$n_3 = p^2 + 3p + 15 - 4L,$$
$$n_3' = p^2 - 6p + 6 + \tfrac{1}{2}(L + 27M),$$
$$n_3'' = p^2 - 6p + 6 + \tfrac{1}{2}(L - 27M),$$

qui peuvent s'écrire ainsi

$$4(n_3 - 27) = 27\,[(h - \lambda)(\lambda^2 + 3M^2) + 4(h - M^2)],$$
$$32(n_3' - 27) = 27\,[4(3h^2 - 4h) - (h - \lambda)(\lambda^2 + 3M^2) + M^2 + 16(M - 2)],$$
$$32(n_3'' - 27) = 27\,[4(3h^2 - 4h) - (h - \lambda)(\lambda^2 + 3M^2) + M^2 - 16(M + 2)],$$

et pour trouver la classe du nombre 3, il suffira de chercher lequel des nombres n_3, n_3', n_3'', a la forme $3^3(3Q + 1)$, c'est-à-dire qui diminué de 27, donne un reste divisible par 81. On voit donc que cela revient à chercher laquelle des trois quantités entre crochets [ ], est divisible par 3. Or, si l'on néglige les multiples de 3, et que l'on

observe que $(h-\lambda)\lambda^3+h$, à cause de $h+\lambda\equiv 0 \pmod{3}$, se réduit à

$$(h-\lambda)\lambda^3+h\equiv -2\lambda^3-\lambda\equiv\lambda^3-\lambda\equiv\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)\equiv 0 \pmod{3},$$

il restera à savoir laquelle des quantités M^2, M^2+M+1, M^2-M+1 est multiple de 3, d'où la proposition suivante, en remarquant que l'on a $L=3\lambda-2\equiv 1 \pmod{3}$.

« Théorème. Le nombre 3 est résidu cubique du nombre premier » $p=3h+1$, quand on a $M\equiv 0 \pmod{3}$. Il est non-résidu de » première classe pour $M\equiv 1 \pmod{3}$ [ou $M\equiv L \pmod{3}$]. Il est » non-résidu de deuxième classe pour $M\equiv -1 \pmod{3}$ [ou » $M\equiv -L \pmod{3}$]. »

On pourrait continuer de la même manière pour les nombres premiers 5, 7, 11, 13, etc.; mais les calculs deviendraient de plus en plus longs.

Au reste, on évitera le calcul des quantités N_q, N'_q, N''_q ainsi qu'il suit. L'équation $n_q\equiv N_q-qN_{q-1}+\frac{q.q-1}{1.2}N_{q-2}\ldots\ldots+qN_1$ donne en supposant que q soit premier, $n_q\equiv N_q \pmod{q}$, et comme $n_q=3^q(qQ+1)$ revient à $n_q\equiv 3 \pmod{q}$, on a $N_q\equiv 3 \pmod{q}$, pour exprimer que q est résidu cubique de p. Pareillement $N'_q\equiv 3$, $N''_q\equiv 3 \pmod{q}$ exprimeront que q est non-résidu cubique de première ou de deuxième classe. Il suffira donc de remplacer N_q, N'_q, N''_q par 3, pour changer les équations (A) en congruences conditionnelles qui feront connaître la classe de q, car de ces trois congruences une seule pourra être satisfaite. Si c'est la première, q sera résidu cubique. Si c'est la seconde, q sera non-résidu cubique de première classe. Si c'est la troisième, q sera non-résidu de deuxième classe.

Pour éviter les fractions, on aura en doublant les racines z_0, z_1, z_2,

$$z_0=P+Q,\quad z_1=\alpha P+\alpha^2 Q,\quad z_2=\alpha^2 P+\alpha Q;$$

et comme il en résulte

$$z_0^q\equiv P^q+Q^q,\quad z_1^q\equiv\alpha P^q+\alpha^2 Q^q,\quad z_2^q\equiv\alpha^2 P^q+\alpha Q^q \pmod{q},$$

pour $q = 3q' + 1$, et

$$z_0^q \equiv P^q + Q^q,\ z_1^q \equiv \alpha^2 P^q + \alpha Q^q,\ z_2^q \equiv \alpha P^q + \alpha^2 Q^q \ (\text{mod. } q),$$

pour $q = 3q' - 1$, on aura dans les deux cas $z_0^q + z_1^q + z_2^q \equiv 0$ (mod. q), à cause de $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$; les équations (A) se réduiront à

$$\left.\begin{array}{l} 24p \equiv z_0^{q+1} + z_1^{q+1} + z_2^{q+1} \\ 24p \equiv z_1 z_0^q + z_2 z_1^q + z_0 z_2^q \\ 24p \equiv z_2 z_0^q + z_0 z_1^q + z_1 z_2^q \end{array}\right\} \ (\text{mod. } q),$$

et si l'on substitue dans ces congruences les valeurs de z_0^q, z_1^q, z_2^q, on trouvera

$$\text{(B)} \qquad \left\{\begin{array}{l} 2 \equiv P^{3q'} + Q^{3q'} \\ 2 \equiv \alpha^2 P^{3q'} + \alpha Q^{3q'} \\ 2 \equiv \alpha P^{3q'} + \alpha^2 Q^{3q'} \end{array}\right\} \ (\text{mod. } q = 3q' + 1),$$

pour le cas de $q = 3q' + 1$, et

$$\text{(C)} \qquad \left\{\begin{array}{l} 8p \equiv P^{3q'} + Q^{3q'} \\ 8p \equiv \alpha P^{3q'} + \alpha^2 Q^{3q'} \\ 8p \equiv \alpha^2 P^{3q'} + \alpha Q^{3q'} \end{array}\right\} \ (\text{mod. } q = 3q' - 1),$$

pour le cas de $q = 3q' - 1$.

Si l'on pose en général

$$P^{3q'} = [4p(L + 3M\sqrt{-3})]^{q'} = (4p)^{q'}(R + S\sqrt{-3}),$$

$$R = L^{q'} + K_2(-3)^2 M^2 L^{q'-1} + K_4(-3)^6 M^4 L^{q'-2} \ldots + K_q(-3)^{\frac{3q'}{2}} M^q,$$

$$S = 3ML[K_1 L^{q'-1} + K_3(-3)^3 M^2 L^{q'-2} + \ldots + K_{q-1}(-3)^{\frac{3q'-3}{2}} M^{q'-2}],$$

en représentant par K_1, K_2, ... K_q les coefficients binomiaux $\frac{q'}{1}$, $\frac{q'.q'-1}{1.2}$, etc., on trouvera

$$\text{(D)} \qquad \left\{\begin{array}{l} 1 \equiv (4p)^{q'}.R \\ 1 \equiv (4p)^{q'}.(-R + 3S) \\ 1 \equiv (4p)^{q'}.(-R - 3S) \end{array}\right\} \ (\text{mod. } q = 3q' + 1).$$

pour le premier cas, et

$$(\mathrm{E})\quad \left\{\begin{array}{l} 1 \equiv (4p)^{q'-1}.\mathrm{R} \\ 1 \equiv (4p)^{q'-1}.(-\mathrm{R}-3\mathrm{S}) \\ 1 \equiv (4p)^{q'-1}.(-\mathrm{R}+3\mathrm{S}) \end{array}\right\} (\text{mod. } q=3q'-1),$$

pour le second.

Examinons les deux cas particuliers $\mathrm{L} \equiv 0$ et $\mathrm{M} \equiv 0$ (mod. q), qui tous deux donnent $\mathrm{S} \equiv 0$ (mod. q).

Soit d'abord $\mathrm{M} \equiv 0$ (mod. q), il en résulte

$$\mathrm{R} \equiv \mathrm{L}^{q'},\ 4p \equiv \mathrm{L}^{2},\ (4p)^{q'} \equiv \mathrm{L}^{2q'} \text{ et } (4p)^{q'-1} \equiv \mathrm{L}^{2q'-2} \text{ (mod. } q),$$

ce qui réduit les systèmes (D) et (E) à

$$\begin{array}{l} 1 \equiv \mathrm{L}^{3q'},\quad 2 \equiv -\mathrm{L}^{3q'},\quad 2 \equiv -\mathrm{L}^{3q'} \text{ (mod. } q=3q'+1), \\ 1 \equiv \mathrm{L}^{3q'-2},\ 2 \equiv -\mathrm{L}^{3q'-2},\ 2 \equiv -\mathrm{L}^{3q'-2} \text{ (mod. } q=3q'-1). \end{array}$$

C'est donc toujours la première congruence qui est satisfaite à cause de $\mathrm{L}^{q-1} \equiv 1$ (mod. q).

Soit en second lieu $\mathrm{L} \equiv 0$ (mod. q), il en résulte

$$\mathrm{R} \equiv (-3)^{\frac{3q'}{2}}\mathrm{M}^{q'},\ 4p \equiv 27\mathrm{M}^{2} \equiv -(-3)^{3}\mathrm{M}^{2},\ (4p)^{q'} \equiv (-3)^{3q'}\mathrm{M}^{2q'},$$

et

$$(4p)^{q'-1} \equiv -(-3)^{3q'-3}\mathrm{M}^{2q'-2} \text{ (mod. } q),$$

d'où les congruences

$$1 \equiv (-3)^{3q'+\frac{3q'}{2}}\mathrm{M}^{3q'},\ 2 \equiv -(-3)^{3q'+\frac{3q'}{2}}\mathrm{M}^{3q'} \text{ (mod. } q=3q'+1),$$

$$1 \equiv -(-3)^{3q'-2+\frac{3q'-2}{2}}\mathrm{M}^{3q'-2},\ 2 \equiv (-3)^{3q'-2+\frac{3q'-2}{2}}\mathrm{M}^{3q'-2} \text{(mod. } q=3q'-1).$$

Or pour $q=3q'+1$, -3 est toujours résidu quadratique de q; pour ce cas c'est donc la première congruence qui a lieu. Pour $q=3q'-1$, -3 est toujours non-résidu quadratique de q, et c'est encore la première congruence qui est vérifiée.

« Théorème. Pour $L \equiv 0$ ou $M \equiv 0$ (mod. q), le nombre premier q » est toujours résidu cubique du nombre premier $p = 3h + 1$. »

Pour autre application prenons $q = 5 = 3 . 2 - 1$ ou $q' = 2$. Ici $(L + 3M\sqrt{-3})^3 = R + S\sqrt{-3}$ donne $R = L^3 - 27M^3$, $S = 6LM$, on a donc

$$\left.\begin{array}{l} 1 \equiv (L^3 + 27M^3)(L^3 - 27M^3) \\ 2 \equiv (L^3 + 27M^3)(-L^2 + 27M^2 - 18LM) \\ 2 \equiv (L^3 + 27M^3)(-L^2 + 27M^2 + 18LM) \end{array}\right\} \text{(mod. 5)}.$$

En posant $L \equiv Mz$ (mod. 3), ces congruences deviennent à cause de $M^4 \equiv 1$ (mod. 5) [on met de côté le cas de $M \equiv 0$ (mod. 5) déjà traité],

$$z^4 \equiv 0,\ z^4 - 2z^3 + z - 2 \equiv 0,\ z^4 + 2z^3 - z - 2 \equiv 0 \text{ (mod. 5)}.$$

La première est satisfaite par $z = 0$.

La seconde par $z = -1$ et $z = 2$.

La troisième par $z = +1$ et $z = -2$.

Soit encore $p = 7 = 3.2 + 1$, $q' = 2$; on a les mêmes valeurs de R et de S, d'où les congruences

$$\left.\begin{array}{l} 1 \equiv (z^2 - 1)^3(z^2 + 1) \\ 2 \equiv (z^2 - 1)^3(-z^2 + 1 - 3z) \\ 2 \equiv (z^2 - 1)^3(-z^2 + 1 + 3z) \end{array}\right\} \text{(mod. 7)},$$

en rejetant le cas déjà traité $M \equiv 0$ (mod. 7), et posant $M^6 \equiv 1$, $L \equiv Mz$ (mod. 7).

Si l'on rejette aussi la valeur $z = 0$, qui répond à $L \equiv 0$ (mod. q), et que l'on pose $z^6 \equiv 1$ (mod. 7), on trouvera

$$z^4 + z^2 - 1 \equiv 0,\ z^4 + z^2 - 4 - 3z(z^4 - 2z^2 + 1) \equiv 0,$$
$$z^4 + z^2 - 4 + 3z(z^4 - 2z^2 + 1) \equiv 0 \text{ (mod. 7)}.$$

Aucune valeur de z ne satisfait à la première.

La seconde est satisfaite par $z = -2$ et $z = 3$; et la troisième est résolue par $z = 2$ et $z = -3$; d'où les propositions suivantes :

« Théorème. Le nombre 5 est résidu cubique de $p = 3h + 1$ pour » $L \equiv 0$ ou $M \equiv 0$ (mod. 5). Il est non-résidu de première classe » pour $L \equiv -M$ et pour $L \equiv 2M$ (mod. 5), et non-résidu de « deuxième classe pour $L \equiv M$ et pour $L \equiv -2M$ (mod. 5).

» Théorème. Le nombre 7 est résidu cubique de $p = 3h + 1$, » pour $L \equiv 0$ et pour $M \equiv 0$ (mod. 7). Il est non-résidu de première » classe pour $L \equiv -2M$ et pour $L \equiv 3M$ (mod. 7), et non-résidu » de deuxième classe pour $L \equiv 2M$ et $L \equiv -3M$ (mod. 7). »

Il serait long et d'ailleurs assez peu utile d'énoncer les théorèmes relatifs aux autres petits nombres premiers 11, 13, etc. Il suffit de construire une table renfermant les valeurs de z, qui satisfont à la première congruence, à la seconde ou à la troisième. Les remarques suivantes font voir qu'il suffit de résoudre la deuxième congruence. pour avoir la solution des deux autres.

Si l'on fait le produit

$$(P^{3q'} + Q^{3q'} - 2)(\alpha P^{3q'} + \alpha^2 Q^{3q'} - 2)(\alpha^2 P^{3q'} + \alpha Q^{3q'} - 2),$$

on verra qu'il se réduit à

$$P^{3(q-1)} + Q^{3(q-1)} \equiv 2 \text{ (mod. } q = 3q' + 1),$$

ou bien à

$$\text{(F)} \quad [4p(L + 3M\sqrt{-3})]^{q-1} + [4p(L - 3M\sqrt{-3})]^{q-1} \equiv 2 \text{ (mod. } q).$$

En posant $L \equiv Mz$, $\beta^2 + 3 \equiv 0$ (mod. q), cette congruence se réduira à

$$[4pM(z + 3\beta)]^{q-1} + [4pM(z - 3\beta)]^{q-1} \equiv 2 \text{ (mod. } q),$$

où $4p = L^2 + 27M^2$ doit être remplacé par $M^2(z^2 + 27)$. On voit que toute valeur de z satisfera à cette congruence, excepté $z = \pm 3\beta$, qui donne $4p \equiv 0$ (mod. q).

Ainsi pour le cas de $q = 3q' + 1$, les valeurs $z = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots \pm \frac{1}{2}(q - 1)$, à l'exception de $\pm 3\beta \equiv 3\sqrt{-3}$ (mod. q), satisfont à quelqu'une des congruences (D) où l'on a posé..... $L \equiv Mz$ (mod. q).

Si l'on remarque que la puissance $a^{q'}$ satisfait à la congruence $t^3 \equiv 1$ (mod. q), puisque $a^{3q'} = a^{q-1} \equiv 1$ (mod. q), on voit que $a^{q'}$ ne peut avoir que les valeurs 1, $\frac{-1+\beta}{2}$, $\frac{-1-\beta}{2}$ (mod. q), ou 1, α et α^2, en évaluant $\sqrt{-3}$ pour le module q.

D'après cela les équations (B) étant mises sous la forme

$$(G)\quad \left\{\begin{array}{l} 2 \equiv [4p(L+3M\beta)]^{q'} + [4p(L-3M\beta)]^{q'} \\ 2 \equiv \alpha^2[4p(L+3M\beta)]^{q'} + \alpha[4p(L-3M\beta)]^{q'} \\ 2 \equiv \alpha[4p(L+3M\beta)]^{q'} + \alpha^2[4p(L-3M\beta)]^{q'} \end{array}\right\} \text{(mod. } q),$$

on voit que la première congruence ne peut être satisfaite qu'en posant

$$[4p(L+3M\beta)]^{q'} \equiv 1, \quad [4p(L-3M\beta)]^{q'} \equiv 1 \text{ (mod. } q),$$

ou bien encore

$$\left(\frac{L+3M\beta}{L-3M\beta}\right)^{q'} \equiv 1 \text{ (mod. } q),$$

d'où ce théorème général dû à M. Jacobi :

« Théorème. Si p et q sont deux nombres premiers de forme $6K+1$, » q sera résidu cubique de p, si, en supposant $\beta^2 + 3 \equiv 0$ (mod. q) » et $4p = L^2 + 27M$, l'on a $4p(L+3M\beta)$ $\left(\text{ou } p.\frac{L+3M\beta}{2}\right.$ en divi- » sant par le cube $\left.8\right)$, ou encore $\frac{L+3M\beta}{L-3M\beta}$ (mod. q), résidu cubique » de q. Autrement q sera non-résidu cubique de p. »

Il sera facile, d'après ce théorème, de calculer les valeurs de z, qui résolvent la première des congruences (G), où l'on fait $L \equiv Mz$ (mod. q). En représentant par ρ un des résidus cubiques de q, résidus au nombre de $q' = \frac{q-1}{3}$, il faudra poser $\frac{L+3M\beta}{L-3M\beta} \equiv \rho$ (mod. q), ce qui donne $z \equiv 3\beta.\frac{1+\rho}{\rho-1}$ (mod. q). Il faut remarquer que ρ peut être pris avec le signe $+$ ou le signe -1.

Dans tous les cas $+1$ et -1 sont résidus cubiques, $\rho = 1$ exige $M \equiv 0$, et répond à $z \equiv \infty$ (mod. q), $\rho = -1$ exige $L \equiv 0$ et répond à $z \equiv 0$ (mod. q).

Les $\frac{p-1}{3}$ valeurs de z peuvent se grouper 2 à 2, ainsi qu'il suit : on a $z \equiv 3\beta . \frac{1+\rho}{\rho-1}$ (mod. q) et $z' \equiv 3\beta . \left(\frac{1-\rho}{-\rho-1}\right)$ (mod. q), d'où $zz' \equiv 9\beta^2 \equiv -27$ (mod. q).

Deux valeurs de z qui répondent à des résidus cubiques différents ρ et ρ' ne sauraient être égales, car il faudrait avoir $\frac{1+\rho}{\rho-1} \equiv \frac{1+\rho'}{\rho'-1}$ (mod. q), ou $\rho \equiv \rho'$ (mod. q), ce qui est impossible; mais deux valeurs de z peuvent être (et sont toujours deux à deux), égales et de signe contraire. La congruence $\frac{1+\rho}{\rho-1} \equiv -\frac{1+\rho'}{\rho'-1}$ (mod. q) revient à $\rho\rho' \equiv 1$ (mod. q), et il existe toujours deux résidus cubiques de q, qui donnent $\rho . \rho' \equiv 1$ (mod. q). Dans le cas de $\rho' = -\rho$ ou de $\rho^2 + 1 \equiv 0$ (mod. q), ce qui arrive pour $q = 12q'' + 1$, les deux valeurs de z, répondent à un même couple.

On a donc les conséquences suivantes, déjà énoncées par M. Jacobi. Les valeurs de z sont en nombre $\frac{q-1}{3}$, comprenant $z = 0$ et $z = \infty$, $z = \pm a$, $z = \pm b$, etc., elles forment des couples de congruences conditionnelles $L \equiv aM$, $L \equiv bM$ (mod. q) assujétis à la condition $ab \equiv -27$ (mod. q). Dans le cas de $q = 12q'' + 1$, on a pour une valeur de z, $a^2 \equiv -27$ (mod. q).

Pour satisfaire à la seconde congruence conditionnelle (G), il faudra poser

$$[4p(L + 3M\beta)]^{q'} \equiv \alpha, \quad [4p(L - 3M\beta)]^{q'} \equiv \alpha^2 \text{ (mod. } q),$$

α et α^2 représentant les nombres entiers

$$\frac{-1+\beta}{2}, \quad \frac{-1-\beta}{2} \text{ (mod. } q);$$

on aura donc

$$\left(\frac{L + 3M\beta}{L - 3M\beta}\right)^{q'} \equiv \frac{\alpha}{\alpha^2} \equiv \alpha^2 \text{ (mod. } q).$$

Au contraire pour satisfaire à la troisième congruence conditionnelle (G), il faudra poser

$$[4p(L + 3M\beta)]^{q'} \equiv \alpha^2, \quad 4p(L - 3M\beta)^{q'} \equiv \alpha \text{ (mod. } q),$$

d'où

$$\left(\frac{L+3M\beta}{L-3M\beta}\right)^{q'} \equiv \alpha \pmod{q}.$$

Ainsi, en égalant $\frac{L+3M\beta}{L-3M\beta}$ à tous les non-résidus de q, formant une même classe, on aura toutes les valeurs de z qui satisfont à l'une des deux dernières congruences (G), et en égalant $\frac{L+3M\beta}{L-3M\beta}$ (mod. q), à tous les non-résidus de q, formant la seconde classe, on aura toutes les valeurs de z qui satisfont à l'autre des deux dernières congruences (D). Comme on peut remplacer la congruence

$$\left(\frac{L+3M\beta}{L-3M\beta}\right)^{q'} \equiv \alpha \pmod{q} \quad \text{par} \quad \left(\frac{L-3M\beta}{L+3M\beta}\right)^{q'} \equiv \alpha^2 \pmod{q},$$

on voit de suite que quand on a les valeurs de z satisfaisant à la deuxième congruence, en changeant le signe on aura les valeurs de z qui satisfont à la troisième. On pouvait aussi le voir par les équations (D), mais on pouvait demander si les deux dernières équations (D), n'auraient point des racines communes, satisfaisant à $S \equiv 0 \pmod{q}$. Ce qui précède montre que cela est impossible, car il en résulterait

$$\left(\frac{L+3M\beta}{L-3M\beta}\right)^{q'} \equiv \alpha^2, \quad \left(\frac{L-3M\beta}{L+3M\beta}\right)^{q'} \equiv \alpha^2 \pmod{q},$$

d'où $1 \equiv \alpha \pmod{q}$, ce qui est absurde.

Voici donc la marche à suivre pour former la table donnant les valeurs de z qui satisfont aux trois congruences conditionnelles.

1°. On cherchera les valeurs de z qui satisfont à l'une des deux dernières congruences (G), où l'on a fait $L \equiv Mz \pmod{q}$, en égalant $\frac{L+3M\beta}{L-3M\beta}$ à tous les non-résidus cubiques d'une même classe relativement à q. Or, pour avoir ces non-résidus, il suffit de prendre les restes des cubes $1, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots$ ce qui donne les résidus cubiques $r, r', r'' \ldots$ Soit n un non-résidu cubique quelconque, ou un nombre de la série $1, 2, 3, \ldots p-1$, qui ne soit pas contenu dans la série $r, r', r'' \ldots$. Les restes des produits nr, nr', nr'', etc., donne-

ront une classe de non-résidus cubiques, et par exclusion on trouverait l'autre, si elle était nécessaire. Ces valeurs de z donnent les congruences $L \equiv aM$, $L \equiv bM$ (mod. q), etc., qui peuvent se distribuer par couples. L'essai d'une des valeurs de z, savoir a, b, etc., fera voir si elle satisfait à la deuxième ou à la troisième congruence (D). Il suffit de faire dans la seconde $L \equiv aM$ (mod. q); si elle n'est pas satisfaite, la troisième le sera nécessairement par la même substitution.

2°. Le changement de signe des valeurs de z donnera toutes celles qui satisfont à celle des deux dernières congruences, non satisfaite par les valeurs précédentes de z.

3°. Si de la série ± 1, ± 2, $\pm 3, \ldots \pm \frac{1}{2}(q-1)$ on exclut d'abord $\pm 3\sqrt{-3}$ (mod. q), et ensuite les valeurs de z déjà trouvées, il restera les valeurs de z qui satisfont à la première congruence (D) ou (G).

Il reste à parler du cas de $q = 3q' - 1$; on prouverait comme plus haut que toute valeur de z [en supposant $L \equiv Mz$ (mod. q)], satisfait nécessairement à quelqu'une des congruences (E); mais on le verra plus facilement encore, ainsi qu'il suit :

Si la première des congruences (C) est satisfaite, comme $PQ = 4p$ et par suite $P^{q+1}.Q^{q+1} \equiv (4p)^2$ (mod. q), on aura $8p \equiv P^{q+1} + Q^{q+1}$ et $P^{q+1}\ Q^{q+1} \equiv 16p^2$ (mod. q), ce qui donnera $P^{q+1} \equiv 4p$, $Q^{q+1} \equiv 4p$ (mod. q), et par conséquent $\left(\frac{P}{Q}\right)^{q+1} = \left(\frac{L + 3M\sqrt{-3}}{L - 3M\sqrt{-3}}\right)^{q'} \equiv 1$ (mod. q); en d'autres termes la quantité imaginaire $\frac{L + 3M\sqrt{-3}}{L - 3M\sqrt{-3}}$ (mod. q), doit être résidu cubique de q. La réciproque est vraie, car si l'on a $\left(\frac{L + 3M\sqrt{-3}}{L - 3M\sqrt{-3}}\right)^{q'} \equiv 1$ (mod. q), il en résultera $P^{q+1} \equiv Q^{q+1}$ (mod. q). et puis $P^{q+1}.Q^{q+1} \equiv 16p^2$ (mod. q) donnera $P^{q+1} \equiv Q^{q+1} \equiv 4p$ (mod. q), et la congruence $8p \equiv P^{q+1} + Q^{q+1}$ (mod. q) sera satisfaite. On a donc ce second théorème général de M. Jacobi.

« Théorème. Si p est un nombre premier de forme $6n+1$, et q » un nombre premier de forme $6n-1$, q sera résidu cubique du

» nombre premier p toutes les fois que $\frac{L+3M\sqrt{-3}}{L-3M\sqrt{-3}}$ (mod. q) (*), » sera résidu cubique de q; autrement q sera non-résidu cubique » de p. »

Pour satisfaire à la seconde des congruences (C), on fera voir, comme plus haut, qu'il faut poser $\alpha P^{q+1} \equiv \alpha^2 Q^{q+1} \equiv 4p$ (mod. q), où l'on suppose $\alpha \equiv \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ (mod. q); il en résultera.... $\left(\frac{L+3M\sqrt{-3}}{L-3M\sqrt{-3}}\right)^{q'} \equiv \alpha$ (mod. q). Pareillement, pour satisfaire à la troisième des congruences (C), il faudra poser

$$\alpha^2 P^{q+1} \equiv \alpha Q^{q+1} \equiv 4p \text{ (mod. } q),$$

d'où

$$\left(\frac{L+3M\sqrt{-3}}{L-3M\sqrt{-3}}\right)^{q'} \equiv \alpha^2 \text{ (mod. } q).$$

On doit donc dire pour ce cas tout ce qui a été dit pour le premier; seulement, au lieu de poser $\frac{L+3M\sqrt{-3}}{L-3M\sqrt{-3}}$ congru à une quantité réelle, il faudra écrire

$$\frac{L+3M\sqrt{-3}}{L-3M\sqrt{-3}} \equiv f + g\sqrt{-3} \text{ (mod. } q),$$

$f+g\sqrt{-3}$ étant une racine de la congruence $x^{q+1} \equiv 1$ (mod. q); ce qui suppose la condition $f^2+3g^2 \equiv 1$ (mod. q). On obtient ainsi deux congruences conditionnelles qui se réduisent à $L \equiv \frac{3(f+1)}{g} M$ (mod. q). Il suffit pour cela de réduire une congruence telle que celle-ci

$$A + B\sqrt{-3} \equiv 0 \text{ (mod. } q) \quad \text{à} \quad A \equiv 0 \quad \text{et} \quad B \equiv 0 \text{ (mod. } q).$$

Ce qui est indispensable, car autrement $\sqrt{-3}$ (mod. q) prendrait une valeur réelle.

On tirera de la congruence $L \equiv \frac{3(f+1)}{g} M$ (mod. q), différentes conséquences analogues à celles exposées plus haut, pour le cas de $b = 3q'+1$.

(*) Dans le journal de M. Crelle, on lit M au lieu de 3M : la comparaison des deux énoncés suffit pour faire voir qu'il y a faute d'impression.

Chaque congruence conditionnelle est satisfaite par $q' = \frac{q+1}{3}$ valeurs de z; pour la première z prend le double signe, à l'exception des valeurs $z = 0$ et $z \equiv \infty$.

Pour la seconde congruence, z ne prend qu'un signe. Pour la troisième on a les mêmes valeurs de z, au signe près, c'est-à-dire avec un signe contraire.

Deux valeurs de z qui répondent l'une à $f + g\sqrt{-3}$, l'autre à $-f - g\sqrt{-3}$ donnent un produit congru à -27 (mod. q).

Deux racines différentes de $x^{q+1} \equiv 1$ (mod. q), $f + g\sqrt{-3}$ et $f' + g'\sqrt{-3}$ ne sauraient donner la même valeur de z, ni des valeurs de z égales au signe près.

Enfin, pour le cas de $q = 12q'' - 1$, les deux valeurs de z correspondantes aux résidus cubiques $\pm g\sqrt{-3}$, formeront un couple donnant un produit $\equiv -27$ (mod. q).

Le calcul des nombres z se fera donc comme pour le cas de $q = 3q' + 1$, seulement il sera plus long, parce qu'il faudra d'abord résoudre la congruence $x^{q+1} \equiv 1$ (mod. $q = 3q' - 1$), ou ce qui revient au même, celle-ci $f^2 + 3g^2 \equiv 1$ (mod. q); puis former les résidus cubiques, ou les cubes des racines $f + g\sqrt{-3}$; trouver par exclusion un non-résidu cubique; et enfin en déduire une classe de non-résidus. Ces calculs, qu'on peut abréger par divers artifices, donneront la table suivante, qu'il serait facile de prolonger, ce que je me propose de faire dans un autre Mémoire sur la résolution des congruences binomes.

PREMIÈRE TABLE.

$$4p = L^2 + 27M^2, \quad L = 3\lambda - 2,$$

$p =$	7,	13,	19,	31,	37,	43,	61,	67,	73,	79,	97,	etc.
$L =$	1,	−5,	7,	4,	−11,	−8,	1,	−5,	7,	−17,	19,	
$M =$	1,	1,	1,	2,	1,	2,	3,	3,	3,	1,	1,	
$\sqrt{-3} =$	2,	6,	4,	11,	16,	13,	27,	8,	17,	32,	27,	

etc.

Valeurs de z : $L \equiv Mz \pmod{q}$,

q											
2	1,	1,	1,	»	1,	»	1,	1,	1,	1,	1,
3	1,	1,	1,	−1,	1,	−1,	∞,	∞,	∞,	1,	1,
5	1,	0,	2,	2,	−1,	1,	2,	0,	−1,	−2,	−1,
7	1,	2,	0,	2,	3,	3,	−2,	3,	0,	−3,	−2,
11	1,	−5,	4,	2,	0,	−4,	5,	2,	−5,	−5,	−3,
13	1,	−5,	6,	2,	2,	−4,	4,	−6,	−2,	−4,	6,
etc.											
$p =$	7,	13,	19,	31,	37,	43,	61,	67,	73,	79,	97, etc.

Valeurs de z ou caractères des non-résidus de première classe :

q					
2	−1,			caractère des résidus	$M \equiv 0 \pmod{2}$,
3	1,			caractère des résidus	$M \equiv 0 \pmod{3}$,
5	−1,	2,			
7	−2,	3,			
11	1,	2,	3,	−5,	
13	2,	−3,	−4,	6,	
etc.					

Exemple. Veut-on trouver par le moyen de cette table, la classe du nombre $39 = 3.13$ pour le mod. 43? On cherchera les classes de 3 et de 13. Pour 3 la table donne $z = -1$, et comme on trouve $+1$, pour caractère des non-résidus de première classe, il s'ensuit que 3 est un non-résidu de deuxième classe. Pour 13 on trouve $z = -4$, et -4 est un caractère des non-résidus de première classe. Ainsi 3 et 13 sont respectivement des non-résidus de deuxième et de première classe. La somme des numéros de classe est 3. Donc le produit 39 est un résidu cubique.

Autrement, on a $39 \equiv -4 \equiv -2^2 \pmod{4}$, le facteur -1 est un résidu, $(-1) = (-1)^3$. Comme M est divisible par 2, le nombre 2, et par suite son carré sont résidus cubiques, ainsi 39 est un résidu cubique.

On voit qu'au moyen de cette table il sera toujours facile de trouver la classe d'un nombre composé, puisqu'elle donnera celles de ses facteurs premiers.

Quand on aura trouvé les numéros de classe des petits nombres premiers, de 2, 3, 5, 11, 13, par exemple, ceux des nombres premiers plus grands s'en déduiront très facilement. Il suffira de remplacer leurs multiples, puissances ou multiples de puissances, par des nombres dont on sache trouver la classe, ou n'ayant pas de facteur premier au-dessus de 13. Si l'on veut, par exemple, avoir la classe de 17 pour le module 97, comme $5.17 = 85 = 97 - 12$, la classe de 5.17 sera la même que celle de -12 ou de 12; or la classe des nombres 2 et 3 est 1 (la première des non-résidus). Ainsi 5.17 est résidu cubique; or 5 est de première classe, donc 17 doit être de seconde.

On formera donc très facilement la table suivante, où 0 indique la classe des résidus cubiques, et 1 et 2 les deux classes de non-résidus.

TABLE DEUXIÈME.

$q =$	2,	3,	5,	7,	11,	13,	17,	19,	23,	29,	31,	37,	41,	43,	47.
7,															
13,	2,	1,													
19,	1,	1,	0,												
31,	1,	1,	1,	0,											
37,	0,	2,	1,	2,	1,	1,									
43,	2,	1,	1,	1,	0,	1,	2,								
61,	0,	2,	2,	1,	0,	1,	1,	2,							
67,	1,	0,	1,	1,	2,	2,	2,	2,	0,						
73,	2,	0,	0,	1,	1,	2,	2,	2,	2,	1,	1,				
79,	2,	0,	1,	0,	1,	2,	0,	1,	2,	0,	2,				
97,	1,	1,	2,	2,	2,	1,	0,	2,	2,	2,	2,	1,			
	1,	1,	1,	1,	2,	1,	2,	0,	2,	1,	1,	1,	1,	1,	0.

Cette table est analogue à celle donnée par M. Gauss, pour les résidus quadratiques. Elle indique la possibilité ou l'impossibilité de la congruence $x^3 \equiv a \pmod{p}$, en supposant $p < 100$. Quant à la résolution, elle exige d'autres tables.

§ V.

Des résidus bi-quadratiques.

La question des résidus bi-quadratiques a été traitée par M. Gauss : un premier Mémoire a paru dans les *Commentaires de Gottingue;* j'ignore s'il a été suivi d'autres qui complètent la solution de ce problème général : « Un nombre, décomposé en ses facteurs pre-» miers, étant donné, trouver s'il est résidu ou non-résidu bi-qua-» dratique; ou plus généralement à quelle classe il appartient. » J'en donnerai la solution dans ce paragraphe. J'ai déjà cité les recherches de M. Cauchy sur les résidus, je ne dois pas oublier de mentionner un mémoire de M. Dirichlet sur les diviseurs premiers d'une classe de formules du quatrième degré (Journal de M. Crelle, t. III), j'en parlerai avec détail dans l'article suivant.

I.

Caractères des résidus et non-résidus bi-quadratiques pour le module premier $p = 4h + 1$.

Par rapport au module premier $p = 4h + 1$, les nombres $1, 2, 3, \ldots p - 1$ se distribuent en quatre classes, telles qu'en représentant par r, $r^2 \equiv -1$, $r^3 \equiv -r$, $r^4 \equiv 1$ (mod. p), les quatre racines de la congruence $t^4 \equiv 1$ (mod. p), tout nombre $a < p$ donne a^4 congru à un des nombres $1, r, -1, -r$, pour le module p. Dans le premier cas a est dit résidu bi-quadratique, et dans les autres non-résidu bi-quadratique de première, deuxième ou troisième classe.

Or, si l'on pose $p = L^2 + 4M^2$, L positif ou négatif ayant la forme $1 + 4\lambda$, et si l'on représente par y_0, y_1, y_2, y_3, les racines de l'équation

$$y^4 + y^3 + \tfrac{1}{2}(pr - 3h)y^2 + \tfrac{1}{4}(2p\lambda + pr - h)y + \tfrac{1}{16}[(pr - h)^2 - 4p\lambda^2] = 0,$$

où $p = 4h + 1$ et $h = 2h' + r$, r étant 0 ou 1; on aura pour dé-

terminer les quantités N_q, N'_q, N''_q, N'''_q, ou les nombres de solutions des congruences ayant pour premier membre la somme..... $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \ldots + x_q^4$, et pour second un résidu bi-quadratique, ou un non-résidu de première, deuxième ou troisième classe; on aura, dis-je, pour le cas de $r = 0$, ou de $p = 8h' + 1$, les équations suivantes qui se déduisent de la formule (41) du § I (t. II, p. 290):

$$(\mathrm{H})\begin{cases} p(N_q - p^{q-1}) = \gamma_0(1+4\gamma_0)^q + \gamma_1(1+4\gamma_1)^q + \gamma_2(1+4\gamma_2)^q + \gamma_3(1+4\gamma_3)^q, \\ p(N'_q - p^{q-1}) = \gamma_1(1+4\gamma_0)^q + \gamma_2(1+4\gamma_1)^q + \gamma_3(1+4\gamma_2)^q + \gamma_0(1+4\gamma_3)^q, \\ p(N''_q - p^{q-1}) = \gamma_2(1+4\gamma_0)^q + \gamma_3(1+4\gamma_1)^q + \gamma_0(1+4\gamma_2)^q + \gamma_1(1+4\gamma_3)^q, \\ p(N'''_q - p^{q-1}) = \gamma_3(1+4\gamma_0)^q + \gamma_0(1+4\gamma_1)^q + \gamma_1(1+4\gamma_2)^q + \gamma_2(1+4\gamma_3)^q. \end{cases}$$

Pour le cas de $r = 1$, ou de $p = 8h' + 5$, il faudrait employer la formule (42) du § I, et au lieu des équations (H), on en aurait d'autres qui n'en différeraient que par le changement de N_q en N''_q, de N'_q en N'''_q et réciproquement.

Si l'on pose $1 + 4y = z$, les équations précédentes se simplifient et deviennent

$$(\mathrm{I})\begin{cases} 4p(N_q - p^{q-1}) = z_0^{q+1} + z_1^{q+1} + z_2^{q+1} + z_3^{q+1} - (z_0^q + z_1^q + z_2^q + z_3^q), \\ 4p(N'_q - p^{q-1}) = z_1 z_0^q + z_2 z_1^q + z_3 z_2^q + z_0 z_3^q - (z_0^q + z_1^q + z_2^q + z_3^q), \\ 4p(N''_q - p^{q-1}) = z_2 z_0^q + z_3 z_1^q + z_0 z_2^q + z_1 z_3^q - (z_0^q + z_1^q + z_2^q + z_3^q), \\ 4p(N'''_q - p^{q-1}) = z_3 z_0^q + z_0 z_1^q + z_1 z_2^q + z_2 z_3^q - (z_0^q + z_1^q + z_2^q + z_3^q), \end{cases}$$

pour le cas de $p = 8h' + 1$. Pour celui de $p = 8h' + 5$, il suffira de changer N_q en N_q et réciproquement, N'_q en N''_q et réciproquement.

L'équation en y se décompose en deux facteurs

$$(\mathrm{K})\quad \begin{cases} y^2 + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{p})y + \frac{1}{4}(pr - h + 2\lambda\sqrt{p}) = 0, \\ y^2 + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{p})y + \frac{1}{4}(pr - h - 2\lambda\sqrt{p}) = 0, \end{cases}$$

d'où l'on tire pour $1 + 4y$ ou z,

$$1 + 4y = z = \sqrt{p} \pm \sqrt{2p(-1)^h - 2L\sqrt{p}},$$
$$1 + 4y = z = -\sqrt{p} \pm \sqrt{2p(-1)^h + 2L\sqrt{p}};$$

et d'après la formation des quantités y_0, y_1, y_2, y_3, (§ I, p. 288, t. II), y_0 et y_2 doivent satisfaire à l'une des équations (K) du second degré en y, et y_1, y_3 doivent satisfaire à l'autre.

On voit donc que N_q et N''_q seront complétement déterminés au moyen des coefficients des équations (K), mais il n'en sera pas de même de N'_q et N'''_q. On prouverait comme dans le § précédent que N'_q peut se changer en N'''_q et réciproquement, et que ces deux quantités ne diffèrent que par le signe de M.

Prenons pour première application la recherche de la classe du nombre premier 2.

On trouve d'abord

$$\begin{aligned}
&z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 = 4p[1 + 2(-1)^h],\\
&z_0^4 + z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = -24pL,\\
&z_2 z_0^2 + z_3 z_1^2 + z_0 z_2^2 + z_1 z_3^2 = 8pL,\\
&z_1 z_0^2 + z_2 z_1^2 + z_3 z_2^2 + z_0 z_3^2 = 8pL + 32pM,\\
&z_2 z_0^2 + z_0 z_1^2 + z_1 z_2^2 + z_2 z_3^2 = 8pL - 32pM.
\end{aligned}$$

D'après cela, on aura

$$\begin{aligned}
&N_2 - p = -6L - [1 + 2(-1)^h],\\
&N'_2 - p = 2L + 8M - [1 + 2(-1)^h],\\
&N''_2 - p = 2L - [1 + 2(-1)^h],\\
&N'''_2 - p = 2L - 8M - [1 + 2(-1)^h],
\end{aligned}$$

et comme on a d'ailleurs

$$\begin{aligned}
&N_1 = 4, \quad N'_1 = N''_1 = N'''_1 = 0,\\
&n_2 = N_2 - 8, \quad n'_2 = N'_2, \quad n''_2 = N''_2, \quad n'''_2 = N'''_2,
\end{aligned}$$

il en résultera

$$\begin{aligned}
&n_2 - 16 = p - 6L - 25 - 2(-1)^h,\\
&n'_2 - 16 = p + 2L + 8M - 17 - 2(-1)^h,\\
&n''_2 - 16 = p + 2L - 17 - 2(-1)^h,\\
&n'''_2 - 16 = p + 2L - 8M - 17 - 2(-1)^h,
\end{aligned}$$

pour le cas de $p = 8h' + 1$. Pour celui de $p = 8h' + 5$, il faudrait changer N_2 en N''_2, N'_2 en N'''_2, et réciproquement; puis introduire les

quantités n_2, n_2', n_2'', n_2''', ce qui donnerait

$$\begin{aligned}
n_2 - 16 &= p + 2L - 25 - 2(-1)^h,\\
n_2' - 16 &= p + 2L - 8M - 17 - 2(-1)^h,\\
n_2 - 16 &= p - 6L - 17 - 2(-1)^h,\\
n_2''' - 16 &= p + 2L + 8M - 17 - 2(-1)^h.
\end{aligned}$$

Celle des quatre quantités $n_2 - 16$, $n_2' - 16$, $n_2'' - 16$, $n_2''' - 16$, qui sera divisible par 32 fera connaître la classe du nombre 2.

1°. Soit $p = 8h' + 1$ ou h pair; comme 2 est résidu quadratique de p, il ne peut appartenir qu'à la classe des résidus bi-quadratiques, ou à la deuxième classe des non-résidus bi-quadratiques, puisque $2^{4h'} \equiv 1$ (mod. p) donne $2^{2h'} \equiv \pm 1$ (mod. p). C'est ce qui suit d'ailleurs des équations précédentes, en posant

$$p = 8h' + 1 = (1 + 4\lambda)^2 + 4M^2;$$

elles deviennent

$$n_2 - 16 = 16\left(\lambda^2 - \lambda - 2 + \frac{M^2}{4}\right), \quad n_2'' - 16 = 16\left(\lambda^2 + \lambda - 1 + \frac{M^2}{4}\right),$$

$$n_2' - 16 = 16\left(\lambda^2 + \lambda + \frac{M^2 + 2M}{4} - 1\right), \quad n_2 - 16 = 16\left(\lambda^2 + \lambda + \frac{M^2 - 2M}{2} - 1\right),$$

et comme M est nécessairement pair, et $M^2 \pm 2M$ ou $(M \pm 1)^2 - 1$, divisible par 8 et que d'ailleurs $\lambda^2 \pm \lambda$ est pair, aucun des nombres $n_2' - 16$, $n_2''' - 16$ ne sera divisible par 32, et un seul des nombres $n_2 - 16$, $n_2 - 16$ le sera. Savoir : le premier si M est divisible par 4, et le second si M est divisible seulement par 2.

2°. Soit $p = 4h + 1 = 8h' + 5$, ou h impair, le nombre 2 étant non-résidu quadratique de p, ne peut être que non-résidu bi-quadratique de première ou troisième classe. C'est aussi ce qu'on voit de suite par les valeurs de $n_2 - 16$, $n_2' - 16$, $n_2 - 16$, $n_2 - 16$, qui deviennent

$$n_2 - 16 = 16\left(\lambda^2 + \lambda - 1 + \frac{M^2 - 1}{4}\right), \quad n_2'' - 16 = 16\left(\lambda^2 + \lambda - 1 + \frac{M^2 - 1}{4}\right),$$

$$n_2' - 16 = 16\left[\lambda^2 + \lambda + \left(\frac{M+1}{2}\right)^2 - 1\right], \quad n_2''' - 16 = 16\left[\lambda^2 + \lambda + \left(\frac{M-1}{2}\right)^2 - 1\right].$$

Comme l'équation $p = 8h' + 5 = (1 + 4\lambda)^2 + 4M^2$, fait voir que M est impair, $n_2 - 16$ et $n_2' - 16$ ne sauraient être divisibles par 32. Des deux quantités $n_2 - 16$ et $n_2''' - 16$, une seule sera divisible par 32; ce sera la première si $\frac{M+1}{2}$ est impair, et la seconde si $\frac{M-1}{2}$ est impair.

Il faut remarquer que les valeurs précédentes de N_2, N_2', N_2'' et N_2''' correspondent à la substitution

$$\begin{aligned}
1 + 4y_0 &= z_0 = \sqrt{p} + \sqrt{2p(-1)^h - 2L\sqrt{p}},\\
1 + 4y_2 &= z_2 = \sqrt{p} - \sqrt{2p(-1)^h - 2L\sqrt{p}},\\
1 + 4y_1 &= z_1 = -\sqrt{p} + \sqrt{2p(-1)^h + 2L\sqrt{p}},\\
1 + 4y_3 &= z_3 = -\sqrt{p} - \sqrt{2p(-1)^h + 2L\sqrt{p}}.
\end{aligned}$$

Le produit

$$\sqrt{2p(-1)^h - 2L\sqrt{p}} \times \sqrt{2p(-1)^h + 2L\sqrt{p}} = 4M\sqrt{p},$$

étant pris avec le signe +. C'est cette substitution qui servira à fixer l'ordre des classes de non-résidus. Cette nouvelle convention faite, nous aurons la proposition suivante :

« Théorème. Soit $p = 4h + 1 = L^2 + 4M^2$, le nombre 2 sera ré-
» sidu bi-quadratique pour $M \equiv 0$ (mod. 4), non-résidu bi-quadratique
» de seconde classe pour $M \equiv 2$ (mod. 4); non-résidu bi-quadratique
» de première classe pour $M \equiv -1$ (mod. 4), et non-résidu de
» troisième classe pour $M \equiv 1$ (mod. 4). »

Comme $L = 1 + 4\lambda$, on voit que ces conditions reviennent à $M \equiv 0$, $M \equiv 2L$, $M \equiv -L$, $M \equiv +L$ (mod. 4).

Pour le cas général de $q = 2q' + 1$ nombre premier, on a

$$N_q = n_q, \quad N_q' = n_q', \quad N_q'' = n_q'', \quad N_q''' = n_q''' \ (\text{mod. } q),$$

et selon que des congruences

$$n_q \equiv 4, \quad n_q' \equiv 4, \quad n'' \equiv 4, \quad n_q''' \equiv 4 \ (\text{mod. } q),$$

la première, la seconde, la troisième ou la quatrième sera satisfaite,

le nombre q sera par rapport à p, résidu biquadratique, ou non-résidu de première, deuxième ou troisième classe.

Les équations (I) deviennent d'après cela

$$\left.\begin{aligned}
12p &\equiv z_1^{q+1} + z_1^{q+1} + z_2^{q+1} + z_3^{q+1} - (z_0^q + z_1^q + z_2^q + z_3^q),\\
12p &\equiv z_1 z_0^q + z_2 z_1^q + z_3 z_2^q + z_0 z_3^q - (z_0^q + z_1^q + z_2^q + z_3^q),\\
12p &\equiv z_2 z_0^q + z_3 z_1^q + z_0 z_2^q + z_1 z_3^q - (z_0^q + z_1^q + z_2^q + z_3^q),\\
12p &\equiv z_3 z_0^q + z_0 z_1^q + z_1 z_2^q + z_2 z_3^q - (z_0^q + z_1^q + z_2^q + z_3^q),
\end{aligned}\right\} \pmod{q}.$$

Or, en posant pour abréger

$$R = 2p(-1)^h - 2L\sqrt{p}, \quad S = 2p(-1)^h + 2L\sqrt{p},$$

et par suite

$$RS = 4p(p - L^2) = 16pM^2, \quad \sqrt{RS} = 4M\sqrt{p},$$

on trouvera

$$\left.\begin{aligned}
z_0^q &\equiv p^{g'}\sqrt{p} + R^{g'}\sqrt{R}, & z_1^q &\equiv -p^{g'}\sqrt{p} + S^{g'}\sqrt{S}\\
z_2^q &\equiv p^{g'}\sqrt{p} - R^{g'}\sqrt{R}, & z_3^q &\equiv -p^{g'}\sqrt{p} - S^{g'}\sqrt{S}
\end{aligned}\right\} \pmod{q},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
&z_0^q + z_1^q + z_2^q + z_3^q \equiv 0 \pmod{q},\\
&\left.\begin{aligned}
z_0^{q+1} + z_1^{q+1} + z_2^{q+1} + z_3^{q+1} &\equiv 4p^{g'+1} + 2(R^{g'+1} + S^{g'+1})\\
z_2 z_0^q + z_3 z_1^q + z_0 z_2^q + z_1 z_3^q &\equiv 4p^{g'+1} - 2(R^{g'+1} + S^{g'+1})\\
z_1 z_0^q + z_2 z_1^q + z_3 z_2^q + z_0 z_3^q &\equiv -4p^{g'+1} + 2(R^{g'} - S^{g'})\sqrt{RS}\\
z_3 z_0^q + z_0 z_1^q + z_1 z_2^q + z_2 z_3^q &\equiv -4p^{g'+1} - 2(R^{g'} - S^{g'})\sqrt{RS}
\end{aligned}\right\} \pmod{q},
\end{aligned}$$

et par conséquent, en ayant égard à la transposition relative au cas de h impair, on aura les congruences

$$(M)\quad \left\{\begin{aligned}
12p &\equiv 4p^{g'+1} + 2(-1)^h(R^{g'+1} + S^{g'+1})\\
12p &\equiv -4p^{g'+1} - 2(-1)^h(S^{g'} - R^{g'})\sqrt{RS}\\
12p &\equiv 4p^{g'+1} - 2(-1)^h(R^{g'+1} + S^{g'+1})\\
12p &\equiv -4p^{g'+1} + 2(-1)^h(S^{g'} - R^{g'})\sqrt{RS}
\end{aligned}\right\} \pmod{q};$$

et comme l'on a

$$\begin{aligned} R^{g'+1} + S^{g'+1} &= R^{g'}[2p(-1)^h - 2L\sqrt{p}] + S^{g'}[2p(-1)^h + 2L\sqrt{p}] \\ &= 2p(-1)^h(R^{g'} + S^{g'}) + 2L\sqrt{p}(S^{g'} - R^{g'}), \end{aligned}$$

elles deviendront

$$(N)\left\{\begin{array}{l} 12p \equiv 4p^{g'+1} + 4p(R^{g'} + S^{g'}) + 4L\sqrt{p}(S^{g'} - R^{g'})(-1)^h \\ 12p \equiv -4p^{g'+1} - 8M\sqrt{p}(S^{g'} - R^{g'})(-1)^h \\ 12p \equiv 4p^{g'+1} - 4p(R^{g'} + S^{g'}) - 4L\sqrt{p}(S^{g'} - R^{g'})(-1)^h \\ 12p \equiv -4p^{g'+1} + 8M\sqrt{p}(S^{g'} - R^{g'})(-1)^h \end{array}\right\} (\text{mod. } q).$$

Soit maintenant

$$R^{g'} = \varphi - \Psi\sqrt{p}, \quad S^{g'} = \varphi + \Psi\sqrt{p},$$

d'où

$$R^{g'} + S^{g'} = 2\varphi, \quad S^{g'} - R^{g'} = 2\Psi\sqrt{p}:$$

en représentant par k_1, k_2, k_3... les coefficients binomiaux

$$\frac{q'}{1}, \quad \frac{q'.q'-1}{1.2}, \quad \frac{q'.q'-1.q'-2}{1.2.3}, \quad \text{etc.}$$

et en supposant

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= p^{g'} + k_2 p^{g'-1}L^2 + k_4 p^{g'-2}L^4 + \ldots, \\ \Psi_1 &= k_1 p^{g'-1} + k_3 p^{g'-2}L^2 + k_5 p^{g'-3}L^4 + \ldots, \end{aligned}$$

on aura

$$\varphi = (-1)^{hq'}.2^{g'}\varphi_1, \quad \Psi(-1)^h = (-1)^{hq'}.2^{g'}\Psi_1,$$

et les congruences (N) deviendront, en divisant les deux membres, par $4p$,

$$(O)\quad \left\{\begin{array}{l} 3 \equiv p^{g'} + 2^{g'+1}(-1)^{hq'}(\varphi_1 + L^2\Psi_1) \\ 3 \equiv -p^{g'} - 2^{g'+1}(-1)^{hq'}.M\Psi_1 \\ 3 \equiv p^{g'} - 2^{g'+1}(-1)^{hq'}(\varphi_1 + L^2\Psi_1) \\ 3 \equiv -p^{g'} + 2^{g'+1}(-1)^{hq'}LM\Psi_1 \end{array}\right\} (\text{mod. } q),$$

d'où L, M et p disparaîtront quand on posera

$$L \equiv Mz(\text{mod. } q).$$

Pour première application, cherchons quelle est la classe du nombre q, quand on a

$$M \equiv 0 \quad \text{ou} \quad L \equiv 0 \pmod{q}.$$

Comme l'équation $\qquad p = L^2 + 4M^2$

donne alors

$$p \equiv L^2 \quad \text{ou} \quad p \equiv 4M^2 \equiv (2M)^2 \pmod{q},$$

on a toujours $\qquad p^{q'} \equiv 1 \pmod{q}.$

Ainsi la deuxième et la quatrième des congruences (O) se réduisant à $4 \equiv 0 \pmod{q}$ sont impossibles. Le nombre q est donc résidu biquadratique, ou non-résidu biquadratique de deuxième classe. C'est ce que l'on distinguera au moyen de la première et de la troisième des congruences (O), qui deviennent

$$1 \equiv 2^{q'}(-1)^{hq'}(\Phi_1 + L^2\Psi_1), \quad 1 \equiv -2^{q'}(-1)^{hq'}(\Phi_1 + L^2\Psi_1) \pmod{q}.$$

1°. Soit d'abord $M \equiv 0 \pmod{q}$, il en résulte $L^2 \equiv p \pmod{q}$ et par conséquent

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= p^{q'}(1 + k_2 + k_4 + \ldots) \equiv 2^{q'-1}, \\ \Psi_1 &= p^{q'}(k_1 + k_3 + k_5 + \ldots) \equiv 2^{q'-1}, \end{aligned}\right\} \pmod{q},$$

et par suite,

$$\Phi_1 + L^2\Psi_1 \equiv 2^{q'} \pmod{q},$$

ce qui réduit la première et la troisième des congruences (O) à

$$1 \equiv (-1)^{hq'}, \quad 1 \equiv -(-1)^{hq'} \pmod{q}.$$

« Théorème. Soit $M \equiv 0 \pmod{q}$, on aura

» pour $\quad p = 8h' + 1$ (h pair), $\quad q$ résidu biquadratique,
» pour $\quad q = 4q'' + 1$ (q' pair), $\quad q$ résidu biquadratique,
» pour $\quad p = 8h' + 5$ et $q = 4q'' - 1$ (ou h et q' impairs)

» q non-résidu biquadratique de seconde classe. »

2°. Soit $L \equiv 0 \pmod{q}$, il en résulte $\varphi_1 \equiv p^{q'} \equiv 1 \pmod{q}$, ce qui réduit la première et la troisième des congruences (O) à

$$1 \equiv 2^{q'}(-1)^{hq'}, \quad 1 \equiv -2^{q'}(-1)^{hq'} \pmod{q}.$$

Comme l'on a $2^{q'} \equiv 1 \pmod{q}$ pour $q = 8q'' \pm 1$ et $2^{q'} \equiv -1 \pmod{q}$ pour $q = 8q'' \pm 3$, voici les conclusions à tirer :

« Théorème. Soit $L \equiv 0 \pmod{q}$, on aura

» pour $p = 8h' + 1$ et $q = 8q'' \pm 1$
» et pour $p = 8h' + 5$ et $q = 8q'' + 1$ ou $8q'' + 3$.

» le nombre p résidu bi-quadratique;

» pour $p = 8h' + 1$ et $q = 8q'' \pm 3$,
» et pour $p = 8h' + 5$ et $q = 8q'' + 5$ ou $q = 8q'' + 7$,

» le nombre q non-résidu biquadratique de seconde classe. »

Examinons le cas de $q = 2q' + 1 = 3$, d'où $q' = 1$. En posant

$L \equiv Mz \pmod{3}$, ce qui donne $p \equiv M^2(z^2 + 1) \pmod{3}$,

on trouve, en laissant de côté le cas de $M \equiv 0 \pmod{3}$,

$\varphi_1 \equiv z^2 + 1 \pmod{3}$, $L^2\downarrow_1 \equiv z^2 \pmod{3}$, $LM\downarrow_1 \equiv z \pmod{3}$,

et les congruences (O) deviennent

$$\left.\begin{array}{ll} 1^{re}..3 \equiv z^2+1+(-1)^h(2z^2+1), & 2^e..3 \equiv -z^2-1+(-1)^h z \\ 3^e...3 \equiv z^2+1-(-1)^h(2z^2+1), & 4^e..3 \equiv -z^2-1-(-1)^h z \end{array}\right\} \pmod{3}.$$

Savoir pour h pair,

$1^{re}...0 \equiv 2 \pmod{3}$, impossible;
$2^e...0 \equiv -z^2 + z - 1 \pmod{3}$, solution $z = -1$:
$3^e....0 \equiv -z^2 \pmod{3}$, solution $z = 0$;
$4^e....0 \equiv -z^2 - z - 1 \pmod{3}$, solution $z = 1$;

et pour h impair,

$$\begin{array}{lll} 1^{re}\ldots 0 \equiv -z^2 & \text{(mod. 3)}, & \text{solution } z = 0; \\ 2^{e}\ldots 0 \equiv -z^2 - z - 1 & \text{(mod. 3)}, & \text{solution } z = 1; \\ 3^{e}\ldots 0 \equiv 2 & \text{(mod. 3)}, & \text{impossible}; \\ 4^{e}\ldots 0 \equiv -z^2 + z - 1 & \text{(mod. 3)}, & \text{solution } z = -1. \end{array}$$

On aura donc la proposition suivante :

« Théorème. Le nombre 3 sera, en supposant $p = 8h' + 1$,
» résidu biquadratique pour $M \equiv 0$ (mod. 3),

» non-résidu biquadrat. de 1re classe pour $L \equiv -M$ (mod. 3),
» non-résidu biquadrat. de 2e classe pour $L \equiv 0$ *idem*,
» non-résidu biquadrat. de 3e classe pour $L \equiv M$ *idem*,

» Si l'on suppose au contraire $p = 8h' + 5$, alors 3 sera

» résidu biquadratique de p pour $L \equiv 0$ (mod. 3),
» non-résidu biquadrat. de 1re classe pour $L \equiv M$ *idem*,
» non-résidu biquadrat. de 2e classe pour $M \equiv 0$ *idem*,
» non-résidu biquadrat. de 3e classe pour $L \equiv M$ *idem*. »

Soit encore

$$q = 2q' + 1 = 5, \quad q' = 2, \quad L \equiv Mz \text{ (mod. 5)},$$

et

$$p \equiv M^2(z^2 - 1) \text{ (mod. 5)},$$

il en résultera

$$\varphi_1 \equiv (z^2-1)^2 + (z^2-1)z^2,\ L^2\psi_1 \equiv 2(z^2-1)z^2,\ LM\psi_1 \equiv 2(z^2-1)z \text{ (mod. 5)},$$

ou bien en laissant de côté le cas de $M \equiv 0$ (mod. 5) et celui de $z = 0$, ou $L \equiv 0$ (mod. 5), c'est-à-dire en supposant $z^4 \equiv 1$ (mod. 5), on aura plus simplement

$$\varphi_1 \equiv 2z^2 - 2, \quad L^2\psi_1 \equiv 2 - 2z^2, \quad LM\psi_1 \equiv 2z^3 - 2z \text{ (mod. 5)},$$

et par conséquent les congruences (O) deviendront

$$\begin{array}{lll} 1^{re}\ldots 1 \equiv -2z^2 & \text{(mod. 5)} & \text{impossible}, \\ 2^{e}\ldots 0 \equiv z^2 - z(z^2 - 1) & \text{(mod. 5)} & \text{solution } z = -2. \end{array}$$

$3^e \ldots \; 1 \equiv -2z^2 \quad (\text{mod. } 5)$ impossible,
$4^e \ldots \; 0 \equiv z^2 + z(z^2 - 1) \, (\text{mod. } 5)$ solution $z = +2$.

De là le théorème qui suit

« Théorème. Pour le nombre $p = 4h + 1$, le nombre 5 est résidu
» biquadratique pour $M \equiv 0 \; (\text{mod. } 5)$,
» non-résidu biquadrat. de 1re classe pour $L \equiv 2M$ *idem*,
» non-résidu biquadrat. de 2e classe pour $L \equiv 0$ *idem*,
» non-résidu biquadrat. de 3e classe pour $L \equiv 2M$ *idem*. »

On voit que pour ce cas de $p = 5$, il n'est pas nécessaire d'examiner séparément le cas de $p = 8h' + 1$ et celui de $p = 8h' + 5$. Il en est de même toutes les fois que q a la forme $4q'' + 1$, parce que le facteur $(-1)^{hq'}$ se réduit à 1, quel que soit p.

Si l'on traite semblablement les cas de $p = 7, = 11, = 13$, etc., on formera facilement une table semblable à celle concernant les résidus cubiques. Mais ces calculs pourront s'abréger au moyen des propositions suivantes, qui sont des lois de réciprocité.

Reprenons les congruences (N) en laissant de côté le cas de $M \equiv 0$ (mod. q), qui exige qu'on ait $R \equiv 0$ ou $S \equiv 0$ (mod. q), à cause de $RS = 16pM^2$.

Soit d'abord q résidu quadratique de p, comme p est de forme $4h + 1$, il en résultera p résidu quadratique de q. Ainsi les quantités R et S données par la formule $2p(-1)^h \pm 2L\sqrt{p}$ seront des nombres réels, tous deux résidus ou non-résidus quadratiques de q, à cause de $RS = 16pM^2$. Pour les obtenir, il suffira de résoudre la congruence $z^2 \equiv p$ (mod. q).

Puisque l'on a

$$p^{q'} \equiv 1 \quad \text{et} \quad R^{q'} \equiv S^{q'} \equiv \pm 1 \; (\text{mod. } q),$$

les congruences (N) deviendront

$$2 \equiv \pm 2, \quad 16 \equiv 0, \quad 2 \equiv \pm 2, \quad 16 \equiv 0 \; (\text{mod. } q),$$

d'où l'on voit, comme on le savait déjà, que q ne peut être que résidu biquadratique, ou non-résidu biquadratique de seconde classe, ce que l'on distingue ainsi :

« Théorème. Le nombre premier q résidu quadratique du nombre » premier $p = 4h + 1 = L^2 + 4M^2$, en sera aussi résidu biquadra- » tique si l'on a $2p(-1)^h \pm 2L\sqrt{p}$ (mod. q) résidus quadratiques de q. » Dans le cas contraire, q sera non-résidu biquadratique de 2e classe. »

Ce théorème a beaucoup d'analogie avec un théorème de M. Dirichlet, et qui se déduit facilement du précédent, ainsi que nous le montrerons plus bas.

Au moyen du théorème précédent, il est facile de former les valeurs de z qui satisfont aux congruences conditionnelles (O). On posera

$$p \equiv y^2 L^2 (\text{mod. } q),$$

il faudra avoir, par conséquent,

$$2(y^2 - y)(-1)^h \quad \text{et} \quad 2(y^2 + y)(-1)^h,$$

résidus quadratiques de q. L'équation $p = L^2 + 4M^2$ donnera

$$M \equiv \pm L\sqrt{\frac{y^2 - 1}{4}} \equiv \pm zL (\text{mod. } q),$$

en supposant

$$y^2 \equiv 4z^2 + 1 \ (\text{mod. } q).$$

La congruence précédente pourra être réduite à $L \equiv \pm z'M$, en posant $zz' \equiv \pm 1$ (mod. q). Comme l'on a $4(y^4 - y^2) \equiv 16y^2z^2$ (mod. q), il suffira donc de satisfaire à la congruence $y^2 \equiv 4z^2 + 1$ (mod. q), en rendant de plus $2(y^2 - y)(-1)^h$ résidu quadratique de q. Ainsi il faudra faire

$$y^2 - y \quad \text{résidu quadratique de } q,$$

1°. pour $p = 8h' + 1$ et $q = 8q'' \pm 1$;
2°. pour $p = 8h' + 5$ et $q = 8q'' + 1$ ou $8q'' + 3$;

$$\text{et} \quad y^2 - y \quad \text{non-résidu quadratique de } y,$$

1°. pour $p = 8h' + 1$ et $q = 8q'' \pm 3$;
2°. pour $p = 8h' + 5$ et $q = 8q'' + 5$ ou $8q'' +$

Voici un exemple de ce calcul pour $p = 8h' + 1$ et $q = 13 = 8 + 5$. Il faut avoir ici $y^2 - y$ non-résidu quadratique de 13,

Valeurs de z,	1,	2,	3,	4,	5,	6,
de z^2,	1,	4,	-4,	3,	-1,	-3,
de $y^2 = 4z^2 + 1$,	5,	4,	-2,	0,	-3,	2,
de y		2,		0,	6,	
de $y^2 - y$,		2^*		0,	4.	

Le nombre 2, valeur de $y^2 - y$ étant non-résidu quadratique de 13, on aura donc $M \equiv \pm 2L \pmod{13}$, ou bien $L \equiv \pm 6M \pmod{13}$, c'est cette dernière qui sera employée dans les tables.

On formerait tout-à-fait de la même manière les congruences $L \equiv \pm zM \pmod{q}$ relatives au cas du nombre q non-résidu biquadratique de seconde classe relativement à p. Il faut alors avoir $2(y^2 - y)(-1)^h$ non-résidu quadratique de q. Donc dans le cas de l'exemple précédent, au lieu de considérer la valeur de $y^2 - y$ qui est non-résidu quadratique de 13, il faudra prendre celle qui est résidu quadratique, c'est-à-dire 4, d'où résulte

$$M \equiv \pm 5L \pmod{13} \quad \text{ou} \quad L \equiv \pm 5M \pmod{13}.$$

Quant à la valeur $y^2 - y \equiv 0$, elle répond au cas de $M \equiv 0 \pmod{13}$, si $y = 1$; si $y = 0$, elle répond au cas de q résidu biquadratique puisqu'on a $R \equiv S \equiv 0 \pmod{q}$.

Le théorème de M. Dirichlet, cité plus haut, revient à ceci :

« Soit $p = L^2 + 4M^2$, si L est divisible par q, le nombre » $\pm q = 4q'' + 1$ sera résidu biquadratique ou non-résidu biquadra- » tique de seconde classe, selon que $\pm q$ sera de forme $8m + 1$ ou » $8m + 5$. Si L n'est pas divisible par q, le nombre $\pm q$ sera résidu » biquadratique de seconde classe, selon que $p \pm 2M\sqrt{p}$ seront » résidus ou non-résidus quadratiques de q. ($\pm q$ est supposé résidu » quadratique de p.)

Après avoir démontré le théorème précédent, M. Dirichlet ajoute : « On a sans doute remarqué que les énoncés des théorèmes I et II » (donnés plus haut en un seul) sont tels qu'il n'y entre que la racine » du carré impair que l'on obtient en décomposant p en deux carrés.

» Il serait facile de modifier ces énoncés de manière à ce qu'ils ne » renfermassent plus que la racine du carré impair. On y parvien- » drait en suivant une marche entièrement semblable à celle que nous » avons exposée dans ce qui précède. »

On retomberait alors sur le théorème précédemment démontré. Au reste, voici la manière d'obtenir le théorème de M. Dirichlet. D'abord la partie relative à L divisible par q, a été démontrée plus haut. Quant à la seconde partie, soit $\theta^2 \equiv p \pmod{q}$ ou bien $\theta^2 \equiv L^2 + 4M^2 \pmod{q}$. On aura

$$(\theta+L+2M)^2 \equiv 2[\theta^2+\theta(L+2M)+2LM] \equiv 2(\theta+L)(\theta+2M) \pmod{q}.$$

Ainsi $2(\theta+L)$ et $(\theta+2M)$ sont à la fois résidus quadratiques, ou non-résidus quadratiques de q, et comme l'on a $\theta^2 - L^2 \equiv 4M^2$, $\theta^2 - 4M^2 \equiv L^2 \pmod{q}$, il en sera de même de $2(\theta-L)$ et $(\theta-2M)$. Ainsi en multipliant chaque nombre par θ, on aura $2(\theta^2 \pm L\theta)$ et $(\theta^2 \pm 2M\theta)$ ou bien encore $2p \pm 2L\sqrt{p}$ et $p \pm 2M\sqrt{p} \pmod{q}$, à la fois résidus ou non-résidus quadratiques de q.

1°. Soit h pair ou $p = 8h' + 1$, les nombres $+q$ et $-q$ sont de la même classe et comme $(-1)^h = 1$, on voit que

$$2p(-1)^h + 2L\sqrt{p} \pmod{q} \quad \text{et} \quad p + 2M\sqrt{p} \pmod{q}$$

sont à la fois résidus quadratiques ou non-résidus quadratiques de q. D'où suit immédiatement le théorème de M. Dirichlet.

2°. Soit h impair, ou $p = 4h + 1 = 8h' + 5$; pour ce cas l'on a

$$-[2p(-1)^h + 2L\sqrt{p}] \quad \text{et} \quad p + 2M\sqrt{p} \pmod{q}$$

tous deux résidus ou tous deux non-résidus quadratiques de q. Si l'on a $q = 4q'' + 1$, on pourra changer le signe de la première quantité, et l'on retombera sur

$$2p(-1)^h + 2L\sqrt{p} \quad \text{et} \quad p + 2M\sqrt{p} \pmod{q},$$

tous deux résidus ou non-résidus quadratiques de q, d'où le théorème de M. Dirichlet.

3°. Soit enfin h impair et $q = 4q'' - 1$, comme q et $-q$ sont de classes différentes, pour appliquer la règle à $-q$, il faudra rem-

placer $-[2p(-1)^h+2L\sqrt{p}]$ par $+[2p(-1)^h+2L\sqrt{p}]$ et l'on voit encore que les quantités

$$2p(-1)^h+2L\sqrt{p} \quad \text{et} \quad p+2M\sqrt{p} \pmod{q}$$

sont toutes deux résidus quadratiques ou toutes deux non-résidus quadratiques de q : on aura donc le théorème de M. Dirichlet, dans sa dernière partie qui s'applique à $-(4q''-1)=-4q''+1=-q$.

Soit maintenant q non-résidu quadratique de p et par suite p non-résidu quadratique de q. Les quantités R et S ou $2p(-1)^h \pm 2L\sqrt{p}$ (mod. q) sont donc imaginaires. Il faudra, dans ce cas, considérer les congruences (M). Comme $q=2q'+1$ est nécessairement non-résidu biquadratique de première ou troisième classe, elles doivent aussi le faire voir. Or c'est ce qui arrive, car puisque $p^{q'}\equiv -1$ (mod. q), en développant $[2p(-1)^h-2L\sqrt{p}]^{q+1}=R^{q+1}$ et ne conservant que les deux premiers et les deux derniers termes, tous les autres étant des multiples de q, on trouvera facilement $R^{q+1}\equiv 16pM^2$ (mod. q). De plus $(RS)^{\frac{q+1}{2}}=(16pM^2)^{\frac{q+1}{2}}\equiv -16pM^2$ (mod. q), donc..... $R^{\frac{q+1}{2}}(R^{\frac{q+1}{2}}+S^{\frac{q+1}{2}})\equiv 0$ (mod. q) et par conséquent $R^{\frac{q+1}{2}}+S^{\frac{q+1}{2}}\equiv 0$ (mod. q), en laissant de côté le cas de $R\equiv 0$ (mod. q). D'après cela les première et troisième des congruences (M) deviennent $16p\equiv 0$(mod. q). donc elles ne sont jamais satisfaites. Les deuxième et quatrième congruences (M) se réduisent à

$$8p\equiv -2(-)^h(S^{q'}-R^{q'})\sqrt{RS}, \quad 8p\equiv +2(-1)^h(S^{q'}-R^{q'})\sqrt{RS}(\text{mod.}q),$$

dont l'une est nécessairement satisfaite. Car $R^{q'+1}+S^{q'+1}\equiv 0$ (mod. q) donne $R^{q'}\equiv -S^{q'}\frac{S}{R}$ et $\frac{R^{q'}}{S^{q'}}\equiv -\frac{S}{R}$ (mod. q), de là $S^{q'}-R^{q'}\equiv S^{q'}\frac{S+R}{R}$ $\equiv Lp(-1)^h.RS^{q'}$: donc $(S^{q'}-R^{q'})\sqrt{RS}\equiv 4p(-1)^h S^{q'}\sqrt{\frac{S}{R}}\equiv 4p(-1)^{h+q'}$ $\sqrt{-\frac{R^{q'}}{S^{q'}}}\equiv 4p(-1)^h\sqrt{-R^{q'}}.S^{q}$ (mod. q) ; ou bien, à cause de $R^{q'}.S^{q'}\equiv(16pM^2)^{q'}\equiv p^{q'}\equiv -1$ (mod. q), $(S^{q'}-R^{q'})\sqrt{RS}\equiv\pm 4p(-1)^h$ (mod. q). On a par conséquent $8p\equiv\mp 8p$, et $8p\equiv\pm 8p$ (mod q)

pour les congruences deuxième et quatrième du système (M), de sorte que l'une d'elles est satisfaite et l'autre non.

D'après ce qui a été dit dans l'article I du § IV, sur les racines imaginaires de la congruence $x^{q+1} \equiv 1 \pmod{q}$, on voit que parmi les racines $f+g\sqrt{p} \pmod{q}$ satisfaisant à la condition $f^2-pg^2 \equiv 1 \pmod{q}$, les non-résidus biquadratiques satisfont à la congruence..... $x^{\frac{q+1}{2}}+1 \equiv 0 \pmod{q}$. Or la condition $R^{q+1}+S^{q+1} \equiv 0 \pmod{q}$ revient à

$$1+\left(\frac{R}{S}\right)^{\frac{q+1}{2}} \equiv 0 \text{ ou } 1+\left(\frac{S}{R}\right)^{\frac{q+1}{2}} \equiv 0 \pmod{q}.$$

Par conséquent les expressions

$$\frac{2p(-1)^h-2L\sqrt{p}}{2p(-1)^h+2L\sqrt{p}} \quad \text{et} \quad \frac{2p(-1)^h+2L\sqrt{p}}{2p(-1)^h-2L\sqrt{p}} \pmod{q}$$

sont des non-résidus quadratiques imaginaires de q. Soit donc $f+g\sqrt{p} \pmod{q}$ un de ces non-résidus, on écrira

$$\frac{2p(-1)^h-2L\sqrt{p}}{2p(-1)^h+2L\sqrt{p}} \equiv f+g\sqrt{p} \pmod{q},$$

ce qui donnera les deux congruences

$$L \equiv \frac{(1-f)(-1)^h}{g}, \quad L \equiv \frac{-pg(-1)^h}{1+f} \pmod{q},$$

qui s'accordent parce que l'on a $f^2-pg^2 \equiv 1 \pmod{q}$. Au moyen de l'équation $p=L^2+4M^2$, on en déduira facilement

$$L \equiv \pm\sqrt{2(f-1)}.M \equiv Mz. \pmod{q},$$

où z est réel d'après ce qui a été dit dans l'article des racines imaginaires.

Le changement de signe de L, qui répond à celui de q, n'apprendrait rien de plus, et ce qui précède ne donne point le moyen de séparer les valeurs de z, relatives au cas pour lequel q est un non-

résidu biquadratique de première classe de celui pour lequel q est un non-résidu biquadratique de troisième classe. Tout ce que l'on peut voir, c'est que les valeurs de z relatives à ces deux cas ne diffèrent que par le signe. Il faudra donc pour former les tables analogues à celles de l'article précédent, employer les congruences (O), et c'est peut-être même ce qu'il y a de plus simple à faire, d'autant plus qu'il suffit de considérer un petit nombre de valeurs de q. Par exemple, 2, 5, 7, 11, 13.

Voici les deux petites tables pour les modules premiers, moindres que 100.

TABLE I.

$$p = L^2 + 4M^2, \quad L = 1 + 4z, \quad L \equiv Mz \pmod{q}.$$

$p =$	5,	13,	17,	29,	37,	41,	53,	61,	73,	89,	97,
$L =$	1,	−3,	1,	5,	1,	5,	−7,	5,	3,	5,	−9,
$M =$	1,	1,	2,	1,	3,	2,	1,	3,	4,	4,	2,

Valeurs de z.

q											
3,	1,	0,	−1,	−1,	∞,	1,	−1,	∞,	0,	−1,	0,
5,	1,	2,	−2,	0,	2,	0,	−2,	0,	−2,	0,	−2,
7,	1,	3,	−3,	−2,	−2,	−1,	0,	−3,	1,	3,	−1,
11,	1,	3,	−5,	5,	4,	−3,	4,	−2,	2,	4,	1,
13,	1,	3,	−6,	5,	−4,	−4,	6,	6,	−4,	−2,	2.

etc.

Caract. des résidus biquadratiques.	*Caract. des non-résidus biquadratiq. de 1re classe.*
3.... ∞ : (0),	3.... — : 1 (+ 1),
5.... ∞,	5.... — 2,
7.... ∞, 0 : (± 2),	7.... 1, 3 : (— 1, — 3),
11 ... ∞, 1, 4 : (0, ± 1),	11.... 2, 3, 5 : (2, — 3, — 5),
13.... ∞, ± 6,	13.... 1, 2, 4,
etc.	etc.

Remarques. — 1°. L'analogie porte à conclure que le nombre des valeurs de z pour chaque classe de nombres est $\frac{q \mp 1}{4}$ en posant

q.

$q = 4q'' \pm 1$. Pour le prouver, il faudrait distinguer plusieurs cas. Pour plusieurs la démonstration se présente immédiatement. Les autres paraissent exiger quelques recherches préliminaires dont nous ne nous occuperons pas ici.

2°. Selon que l'on a $M \equiv 0$, $M \equiv -1$, $M \equiv 2$ ou $M \equiv 1$ (mod. 4). Le nombre 2 est résidu bi-quadratique ou non résidu de première, deuxième ou troisième classe.

3°. Les valeurs de z entre parenthèses se rapportent au cas de $p = 8h' + 5$, et les autres au cas de $p = 8h' + 1$.

4°. En changeant le signe des valeurs de z relatives aux non-résidus de première classe, on a celles relatives aux non-résidus biquadratiques de troisième classe.

5°. L'exclusion donnera les valeurs de z relatives aux cas des non-résidus de deuxième classe (en supposant prouvé le théorème énoncé dans la première remarque).

Il faut remarquer que l'équation $p = L^2 + 4M^2$ donnant la valeur de z, il suffit de savoir qu'elle ne satisfait pas à trois des congruences, pour conclure qu'elle doit satisfaire à la quatrième.

6°. L'usage de cette table est tout-à-fait semblable à celui de la table de l'article précédent. Il faut remarquer ici que dans les nombres composés $\pm 2a^\alpha b^\beta c^\gamma, \ldots$ il ne faut pas négliger le facteur -1. Le nombre -1 est résidu biquadratique pour $p = 8h' + 1$ et non-résidu biquadratique de deuxième classe pour $p = 8h' + 5$.

Au moyen de la table précédente, on formera très promptement la suivante qui est d'un usage plus commode. Les chiffres 0, 1, 2, 3 indiquent que les facteurs premiers q (y compris -1 et 2) sont résidus biquadratiques ou non-résidus de première, deuxième ou troisième classe.

TABLE II.

p	-1, 2, 3, 5, 7	11, 13, 17, 19, 23	29, 31, 37, 41, 43, 47.
5	2, 3,		
13	2, 3, 0, 3, 3		
17	0, 2, 1, 1, 3		
29	2, 3, 3, 2, 0	3, 2	
37	2, 1, 2, 3, 0	2, 3, 3	
41	0, 2, 3, 2, 3	3, 3, 1, 1	
53	2, 3, 3, 1, 2	2, 0, 2, 3, 1	
61	2, 1, 2, 2, 1	3, 0, 3, 2, 1	3
73	0, 0, 2, 1, 1	3, 3, 1, 2, 2	3, 3
89	0, 0, 1, 2, 1	0, 3, 2, 3, 1	3, 3, 3, 1, 2
97	0, 2, 2, 1, 3	2, 1, 1, 1, 1	1, 2, 3, 1, 0, 0.

Exemple. Quelle est la classe de 91 pour le module 97^2.

Solution. On a $91 \equiv -6 \equiv -1.2.3$ (mod. 97).

La classe du facteur -1 est marquée par le nombre . . . 0
Celle du facteur 2 est la. . . . . 2^e
Celle du facteur 3 est la. . . . . 2^e
La somme est. . . . . 4.

Multiple de 4, donc 91 est un résidu bi-quadratique. En effet, l'on a $11^4 \equiv 91$ (mod. 97).

II.

Comment l'équation $bp = T^2 \pm aU^2$ fait voir si le nombre quelconque a, résidu quadratique du nombre premier $p = 4h + 1$, est résidu ou non-résidu bi-quadratique du même nombre.

On voit par l'article précédent que c'est par la forme des nombres L et M de l'équation $p = L^2 + 4M^2$, que l'on peut distinguer si un nombre donné, est résidu ou non-résidu bi-quadratique d'un nombre premier donné $p = 4h + 1$. Cette équation $p = L^2 + 4M^2$, n'est pas la seule qui puisse servir au même objet. M. Dirichlet a employé

dans le mémoire cité plus haut, l'équation $ps^2 = T^2 \pm aU^2$ en supposant $\pm a = 4k + 1$ et premier. Le théorème de M. Dirichlet est un cas particulier d'un autre plus général que nous allons donner, après avoir rappelé quelques propositions connues.

On sait que tous les nombres premiers diviseurs de $x^2 - Am^2$, où A est sans diviseur carré, sont compris dans certaines formules $Az + r$ ou $4Az + r$, et que les nombres premiers qui ne peuvent diviser $x^2 - Am^2$, ou pour abréger les non-diviseurs de $x^2 - Am^2$, sont compris dans d'autres formules $Az + n$ ou $4Az + n$. On a donc des formules de *diviseurs* et des formules de *non-diviseurs*. On trouve les premières dans les tables III — VII de la théorie des nombres de Legendre, sous le nom de *diviseurs linéaires impairs*.

Quand un nombre composé impair est contenu dans une forme de non-diviseurs, il est par là même non-diviseur; car il contient nécessairement un nombre impair de facteurs premiers non-diviseurs. Quand un nombre composé impair est contenu dans une forme de diviseurs, il y a parmi ses facteurs premiers un nombre pair de non-diviseurs, ou bien il n'y en a aucun. On ne peut donc conclure qu'il soit diviseur. (V. *Rech. Arith.* de M. Gauss, sect. IV.)

Pour ne pas multiplier les énoncés nous ferons les conventions suivantes. Dans l'équation $bp = T^2 \pm aU^2$, nous supposerons T et U premiers entre eux, nous représenterons par t et u leurs plus grands diviseurs impairs, et par 2^m la plus haute puissance de 2 qui divise celui des deux nombres T, U qui est pair. D'ailleurs nous supposerons toujours $\mp a$ résidu quadratique du nombre premier $p = 4h + 1$, sans quoi l'équation $bp = T^2 \pm aU^2$ serait impossible. Mais le nombre a sera quelconque, premier ou composé, et c'est en cela, aussi bien que dans l'indétermination du nombre b, que consiste la généralisation du théorème. Cela posé, nous dirons que la solution de l'équation $bp = T^2 \pm aU^2$ est de *première espèce* dans les cas suivants :

1°. $p = 8h' + 1$ quel que soit m et le signe de a;
2°. $p = 8h' + 5$ et m impair avec $+a$,
ou $p = 8h' + 5$ et m pair avec $-a$.

Et au contraire que la solution est de *seconde espèce* dans le cas suivant :

5°. $p = 8h' + 5$ et m impair avec $-a$;
ou $p = 8h' + 5$ et m pair avec $+a$.
Ceci convenu on a le théorème suivant :

« Théorème I. Soit p un nombre premier de forme $4h+1$, ayant » $\mp a$ pour résidu quadratique. Pour les solutions de première es- » pèce de l'équation $bp = T^2 \pm aU^2$, a sera résidu bi-quadratique » de p dans les deux cas suivants :

» 1°. u étant dans les formes de diviseurs de $x^2 - b$, et t dans » les formes de diviseurs de $x^2 \mp ab$, ou 2°. u étant dans les » formes de non-diviseurs de $x^2 - b$, et t dans les formes de non- » diviseurs de $x^2 \mp ab$, c'est-à-dire quand u et t seront contenus » dans des formules de même espèce, de diviseurs ou de non-divi- » seurs.

» Au contraire a sera non-résidu bi-quadratique, quand u et t » seront compris dans des formules d'espèce différente ; t par exem- » ple étant dans les formes de diviseurs de $x^2 \pm ab$, et u dans les » formes de non-diviseurs de $x^2 - b$.

» Quand la solution sera de seconde espèce, il suffira de renver- » ser la conclusion. Le nombre a sera résidu bi-quadratique de p, » si u et t sont l'un dans les formes de diviseurs et l'autre dans les » formes de non-diviseurs de $x^2 - b$ et $x^2 \mp ab$ respectivement. » Dans le cas contraire a sera non-résidu biquadratique de p. »

Démonstration I De l'équation $bp = T^2 \pm aU^2$, l'on tire $aU^4 \equiv \mp U^2T^2$ (mod. p), et par conséquent en élevant à la puissance $\frac{p-1}{4}$ et remarquant que l'on a $U^{p-1} \equiv 1$ (mod. p), il viendra $a^{\frac{p-1}{4}} \equiv (\mp 1)^{\frac{p-1}{4}} (UT)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (\mp 1)^{\frac{p-1}{4}} (2^{\frac{p-1}{2}})^m (ut)^{\frac{p-1}{2}}$ (mod. p); savoir : pour les solutions de première espèce $a^{\frac{p-1}{4}} \equiv (ut)^{\frac{p-1}{2}}$ (mod. p), et pour celles de deuxième espèce $a^{\frac{p-1}{4}} \equiv -(ut)^{\frac{p-1}{2}}$ (mod. p). Comme $(ut)^{\frac{p-1}{2}}$ (mod. p), est nécessairement congru à $+1$ ou -1 et que pour $a^{\frac{p-1}{4}} \equiv 1$ (mod. q), a est résidu bi-quadratique, tandis qu'il est non-résidu pour $a^{\frac{p-1}{4}} \equiv -1$ (mod. p), le premier cas aura donc lieu

quand t et u seront tous deux résidus quadratiques de p, ou tous deux non-résidus, en supposant la solution de première espèce. Mais pour les solutions de seconde espèce, on devra avoir au contraire l'un des nombres t, u résidu quadratique de p, et l'autre non-résidu. Pour exprimer que a doit être non-résidu biquadratique, il suffira de renverser les conclusions.

II. L'équation $T^2 - pb = \mp aU^2$ montre que out diviseur premier impair de u, le nombre v par exemple, est diviseur de $T^2 - pb$, c'est-à-dire que pb sera résidu quadratique de v, il faudra donc avoir simultanément b résidu quadratique de v, p résidu de v et alors v est dans les formes de diviseurs de $x^2 - b$ et de $x^2 - p$; ou bien b non-résidu quadratique de v et p, aussi non-résidu quadratique de v, et alors v serait dans les formes de non-diviseurs de $x^2 - b$ et de $x^2 - p$.

De même comme l'on a $(aU)^2 \mp abp = \mp aT^2$, en représentant par θ un diviseur premier impair de T, on verra que θ est compris dans les formes de diviseurs de $x^2 \mp ab$ et de $x^2 - p$; ou bien dans les formes de non-diviseurs des mêmes quantités.

III. Or pour les solutions de première espèce, quand a sera résidu biquadratique, on devra avoir t et u résidus quadratiques de p, ou bien t et u non-résidus quadratiques de p. Dans le premier cas u devra contenir un nombre pair de facteurs non-résidus quadratiques de p. Par la loi de réciprocité p sera non-résidu quadratique de ces facteurs et résidu des autres, il y a donc dans u un nombre pair de facteurs non-diviseurs de $x^2 - p$, ainsi u est dans les formes de diviseurs de $x^2 - p$, par conséquent d'après (II), u sera aussi dans les formes de diviseurs de $x^2 - b$. On prouvera semblablement que t est dans les formes de diviseurs de $x^2 - p$ et par suite dans les formes de diviseurs de $x^2 \mp ab$. Quand t et u seront tous deux non-résidus quadratiques de p, il s'ensuivra pareillement que t et u seront dans les formes de non diviseurs de $x^2 - p$, et d'après (II), t et u seront par conséquent aussi dans les formes de non-diviseurs de $x^2 \mp ab$ et $x^2 - b$ respectivement.

Pour les solutions de seconde espèce, on verra par un raisonnement tout-à-fait semblable que l'un des nombres t et u est dans les

formes de diviseurs de $x^2 - p$, et l'autre dans les formes de non-diviseurs. Donc d'après (II) t et u seront, l'un dans les formes de diviseurs, et l'autre dans les formes de non-diviseurs de $x^2 \mp ab$ et $x^2 - b$ respectivement.

Remarque. Quand b est un carré, le théorème se simplifie, car alors u est toujours dans les formes de diviseurs de $x^2 - b$; on a donc le théorème suivant.

« Théorème II. Ayant l'équation $c^2p = T^2 \pm aU^2$, pour les solu-
» tions de première espèce, a sera résidu ou non-résidu quadratique
» de p, selon que t sera dans les formes de diviseurs ou de non-
» diviseurs de $x^2 \mp a$. Pour les solutions de deuxième espèce, ce
» sera le contraire. »

Si a est premier, le théorème se simplifie encore, et fournit les deux suivants qui renferment le théorème de M. Dirichlet.

« Théorème III. Soit $c^2p = T^2 \pm aU^2$, en supposant $\pm a = 4k + 1$
» premier, pour les solutions de première espèce, a sera résidu ou
» non-résidu biquadratique de p, selon que t sera résidu ou non-
» résidu quadratique de p. — Pour les solutions de deuxième espèce,
» ce sera le contraire. »

» Théorème IV. Si $\pm a = 4k + 3$, la même conclusion a encore
» lieu si t est de forme $4t' + 1$, mais il faudra prendre la conclusion
» opposée, si t est de forme $4t' + 3$. »

Cette dernière simplification résulte de ces propositions connues :

Quand A est un nombre premier dont les résidus quadratiques sont r, r', r'', etc., et les non-résidus n, n', n'', etc., les formes de diviseurs et de non-diviseurs se trouvent ainsi qu'il suit,

Soit $\pm A = 4A' + 1$; les diviseurs de $x^2 - (\pm A)$ sont contenus dans $Az + r$, $Az + r'$, $Az + r''$,... et les non-diviseurs dans $Az + n$, $Az + n'$, $Az + n''$, etc....

Soit $\pm A = 4A' + 3$; la même chose aura encore lieu pour les diviseurs $4k + 1$; pour ceux $4k + 3$, ce sera précisément le contraire.

Voici quelques applications.

Les formes de diviseurs de $x^2 - 2$ étant $8k \pm 1$ et celles de $x^2 + 2$

étant $8k+1$ et $8k+3$, le th. II donne les deux suivants relatifs au nombre 2 : l'un est de M. Gauss et l'autre de M. Dirichlet.

« Théorème. Si p est un nombre premier de forme $8h'+1$ et » qu'on pose $p=T^2+2U^2$, ce qui est toujours possible ; on aura » 2 résidu biquadratique de p, si T est de forme $8k\pm1$; au con- » traire 2 sera non-résidu biquadratique, si T est de forme $8k\pm3$. »

« Théorème. Si l'on a dans le même cas $p=T^2-2U^2$, ce qui est » toujours possible; 2 sera résidu biquadratique de p, si T est de » forme $8k+1$ ou $8k+3$, et non-résidu biquadratique dans le cas » contraire. »

Les nombres premiers de forme $4q+1$, qui ont 3 pour résidu quadratique, sont de forme $12q+1$; pour ces nombres on a la proposition qui suit :

« Théorème. Soit $p=T^2+3U^2$, p étant de forme $12q+1$, 3 » sera résidu biquadratique de p, si T est de forme $12k\pm1$, et non- » résidu dans le cas contraire. »

C'est une conséquence du th. II, et de ce que les formes de diviseurs de x^2-3 sont $12k\pm1$. Il en est de même des suivants.

« Théorème. Si p est un nombre de forme $4q+1$, ayant 5 pour » résidu quadratique, c'est-à-dire de forme $20n+1$ et $20n+9$, on » pourra toujours poser $p=T^2+5U^2$; le nombre 5 sera résidu biqua- » dratique si T est de forme $20n\pm1$, $20n\pm9$. Dans le cas con- » traire 5 sera non-résidu biquadratique. Ceci suppose la solution » de première espèce, c'est le contraire qui a lieu si elle est de » deuxième. »

« Théorème. Si le nombre premier $p=4q+1$ peut avoir 7 pour » résidu quadratique, ce qui arrive quand p a l'une des formes » $28n+1$, $+9$, $+25$, on pourra toujours poser $p=T^2+7U^2$; » alors 7 sera résidu ou non-résidu biquadratique selon que T sera » ou non de forme $28n+1$, $+9$, $+25$. »

Au-delà de 7, pour parvenir à un caractère complet, on est forcé de considérer l'équation $bp=T^2\pm aU^2$ et les théorèmes deviennent moins simples. En voici deux pour le nombre 11. Le premier offre le caractère complet.

« Théorème. Soit $p = 4h + 1$ un nombre premier ayant 11 pour » résidu quadratique, ou de forme $44q + 1$, 5, 9, 25, 27; on pourra » toujours poser $p = T^2 + 11U^2$ ou $4p = T^2 + 11U^2$; alors 11 sera » résidu biquadratique, si t est de forme $44k \pm 1$, ± 5, ± 7, ± 9, » ± 19, et non-résidu biquadratique dans le cas contraire. Cela a » lieu pour les solutions de première espèce. C'est le contraire pour » celles de deuxième espèce.

Quand l'équation $p = T^2 + 11U^2$ n'est pas possible, $3p = T^2 + 11U^2$ l'est toujours. Cette équation aurait donné le théorème suivant, qui est moins simple. »

« Théorème. Soit $3p = T^2 + 11U^2$, les formes de diviseurs de » $x^2 - 3$ sont $12k \pm 1$ (D). Les formes de diviseurs de $x^2 - 33$ sont » $132k \pm 1$, ± 17, ± 25, ± 29, ± 31, ± 35, ± 37, ± 41, » ± 49, ± 65, (D′). Le nombre 11 sera résidu biquadratique de p, » si u et t sont respectivement des formes (D), (D′); ou bien si ni u, » ni t ne sont contenues dans les formes (D), (D′). Dans tous les » autres cas le nombre 11 sera non-résidu biquadratique. »

Il serait superflu de multiplier les applications qui se déduiront en grand nombre des tables de la théorie des nombres de Legendre.

C'est en égalant $ps^2 = (\varphi^2 + \psi^2)s^2$ à $ps^2 = T^2 \pm aU^2$, que M. Dirichlet a établi le théorème général dont nous avons parlé dans l'article précédent.

Je ne connaissais pas le Mémoire de M. Dirichlet, quand j'ai trouvé la démonstration du théorème général (I) donné plus haut, mais j'avais lu ce qu'on en dit dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques* de M. Férussac.

Détermination des centres de gravité des fuseaux et des onglets de révolution;

PAR V. A. LEBESGUE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Dans tout solide de révolution, le centre de gravité d'un fuseau, ou surface comprise entre deux méridiens et deux parallèles, et celui d'un onglet, ou volume compris entre les mêmes plans et le fuseau, sont situés sur le méridien qui divise l'angle du fuseau ou de l'onglet en deux parties égales; il suffit donc de connaître leur projection sur l'axe et leur distance à cet axe.

Soit $u=\varphi x$, la génératrice plane d'une surface de révolution, dont l'axe est celui des x; soit S la surface d'un fuseau, et V le volume d'un onglet d'angle 2λ et compris entre les deux parallèles, ayant pour équations l'un $x=\alpha$, l'autre $x=\beta$. Si l'on représente par x_1 la distance à l'origine des coordonnées, de la projection du centre de gravité du fuseau, par u_1 la distance de ce centre à l'axe des x, et par X_1 et U_1 les quantités correspondantes pour l'onglet, on aura

$$S=2\lambda\int_\alpha^\beta uds\ (1),\quad Sx_1=2\lambda\int_\alpha^\beta uxds\ (2),\quad Su_1=2\sin\lambda\int_\alpha^\beta u^2ds\ (3),$$

$$V=\lambda\int_\alpha^\beta u^2dx\ (4),\quad VX_1=\lambda\int_\alpha^\beta u^2xdx\ (5),\quad VU_1=\frac{2}{3}\sin\lambda\int_\alpha^\beta u^3dx\ (6).$$

Les formules (1), (2), (4), (5), sont démontrées dans tous les traités de Mécanique: voici la démonstration des deux autres.

Si l'on prend pour plan des zx celui qui divise l'angle du fuseau en deux parties égales, le z_1 de la formule générale..... $Sz_1=\int\!\!\int zdxdy\sqrt{1+p^2+q^2}$, devient égal à u_1: or l'équation de la surface de révolution est $z^2+y^2=(\varphi x)^2=u^2$, d'où $q=\frac{dz}{dy}=-\frac{y}{z}$, $p=\frac{dz}{dx}=\frac{u}{z}\cdot\frac{du}{dx}$; ainsi $\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{u}{z}\sqrt{1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2}=\frac{uds}{zdx}$,

ds étant la différentielle de l'arc de la courbe génératrice. On a donc $Su_1 = \int\int udyds = \int(\int dy)\, uds$; or on voit de suite que l'intégrale $\int dy$ doit être prise depuis $-u\sin\lambda$ jusqu'à $u\sin\lambda$, ce qui donne $Su_1 = 2\sin\lambda \int u^2 ds$; il reste à intégrer par rapport à x depuis $x=\alpha$, jusqu'à $x=\beta$: donc $Su_1 = 2\sin\lambda \int_\alpha^\beta u^2 ds$, où $u=\varphi x$, $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2}$.

Quant à la formule $Vz_1 = \int\int\int zdxdydz$, elle devient..... $VU_1 = \int(\int\int zdydz)\,dx$: or, on reconnaît dans l'intégrale double $\int\int zdydz$, prise entre les limites convenables, la somme des éléments du secteur que l'on obtient en coupant l'onglet par un parallèle, multipliés par leur distance au diamètre perpendiculaire à celui qui diviserait le secteur en deux parties égales. Cette intégrale égale donc le secteur circulaire, multiplié par la distance de son centre de gravité à l'axe des x. Or, comme il est facile de le voir, le secteur égale $u^2\lambda$, la distance de son centre à l'axe est $\frac{2}{3}\,\frac{u\sin\lambda}{\lambda}$; on a donc $\frac{2}{3}\sin\lambda u^3$ pour valeur de l'intégrale double, d'où la formule $VU_1 = \frac{2}{3}\sin\lambda \int_\alpha^\beta u^3 dx$.

Ces formules montrent presque immédiatement que si l'on a calculé la position du centre de gravité d'un fuseau S et d'un onglet V d'angle 2λ, une simple proportion suffira pour avoir celui d'un autre fuseau S′ et d'un autre onglet V′, d'angle différent 2μ, mais compris entre les mêmes parallèles.

En effet, si l'on élimine S entre (1) et (2), et V entre (4) et (5), l'angle λ disparaît; ainsi x_1 et X_1 restent les mêmes, quel que soit l'angle du fuseau, pourvu que les limites α et β ne varient point.

Quant à u_1 et U_1, on trouve

$$u_1 = \frac{\sin\lambda}{\lambda}\cdot\frac{\int_\alpha^\beta u^2 ds}{\int_\alpha^\beta uds}, \quad U_1 = \frac{2}{3}\,\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cdot\frac{\int_\alpha^\beta u^3 dx}{\int_\alpha^\beta u^2 dx}.$$

Pour un autre fuseau et un autre onglet d'angle 2μ, on aurait semblablement, si α, β, restent les mêmes,

$$u_1' = \frac{\sin\mu}{\mu}\cdot\frac{\int_\alpha^\beta u^2 ds}{\int_\alpha^\beta uds}, \quad U_1' = \frac{2}{3}\,\frac{\sin\mu}{\mu}\cdot\frac{\int_\alpha^\beta u^3 dx}{\int_\alpha^\beta u^2 dx},$$

d'où les proportions

$$u_1 : u'_1 :: U_1 : U'_1 :: \frac{\sin\lambda}{\lambda} : \frac{\sin\mu}{\mu};$$

c'est-à-dire que la distance du centre de gravité du fuseau, ou de l'onglet, à l'axe de révolution, varie comme le rapport $\frac{2\sin\lambda}{2\lambda}$, de la corde $2\sin\lambda$ à l'arc 2λ. Cette proposition se démontre très facilement *à priori* par la considération des infiniment petits.

Exemples. Si l'on considère la demi-surface sphérique comme un fuseau d'angle π engendré par la révolution d'une demi-circonférence, on aura $\lambda = \frac{\pi}{2}$, $u_1 = \frac{1}{2}r$, car on peut aussi regarder cette surface comme une zone ayant pour hauteur le rayon r de la sphère; la proportion donnera donc $u_1 = \frac{1}{4}\pi r.\frac{\sin\mu}{\mu}$, pour la distance à l'axe du centre de gravité d'un fuseau entier, d'angle 2μ.

Pour l'onglet on trouverait $U_1 = \frac{3}{16}\pi r.\frac{\sin\mu}{\mu}$, en le décomposant en pyramides infiniment petites, ayant pour sommet le centre de la sphère.

Pour le demi-fuseau et le demi-onglet engendrés par la révolution d'un quart de cercle, u_1 et U_1 ne changeront pas; mais on aura $x_1 = \frac{1}{2}r$, $X_1 = \frac{3}{8}r$, tandis qu'on avait dans le premier cas $x_1 = 0$, $X_1 = 0$.

Pour le triangle sphérique trirectangle, et pour la pyramide sphérique correspondante, il faut faire $\mu = \frac{\pi}{4}$, d'où

$$x_1 = \frac{1}{2}r \quad \text{et} \quad u_1 = \frac{1}{2}r\sqrt{2}, \quad X_1 = \frac{3}{8}r \quad \text{et} \quad U_1 = \frac{3}{8}r\sqrt{2}.$$

Cela se vérifie immédiatement, car pour le triangle sphérique trirectangle, le centre de gravité est sur chacun des plans perpendiculaires au milieu des rayons menés du centre de la sphère aux sommets du triangle, de là on tire x_1 et u_1, puis X_1 et U_1 par le raisonnement connu pour passer de la zone au secteur sphérique.

Note sur les Surfaces isothermes dans les corps solides dont la conductibilité n'est pas la même dans tous les sens;

PAR M. DUHAMEL.

Je me propose dans cette note d'appliquer la méthode donnée par M. Lamé, dans son Mémoire sur les surfaces isothermes, à une substance dont la conductibilité n'est pas la même dans tous les sens, et de comparer les résultats relatifs à ce cas plus général, à ceux qu'il avait trouvés dans le cas d'une conductibilité invariable.

En supposant la substance constituée semblablement en chacun de ses points, et prenant pour axes de coordonnées les trois directions rectangulaires auxquelles j'ai donné le nom d'*axes principaux de conductibilité*, l'équation qui exprime l'équilibre intérieur des températures, est, comme je l'ai fait voir,

$$(1) \qquad A\frac{d^2v}{dx^2} + B\frac{d^2v}{dy^2} + C\frac{d^2v}{dz^2} = 0,$$

et l'on doit joindre à cette condition, celles qui se rapportent aux limites du corps, maintenues à des températures déterminées, ou soumises à l'action de sources de chaleur connues.

Lorsque les températures sont devenues invariables en chaque point, les surfaces isothermes, c'est-à-dire dont la température est la même en chaque point, sont déterminées par un seul de leurs points, et par conséquent leur équation générale ne renferme qu'un paramètre variable. Or, si l'on pouvait déterminer la forme de cette équation, et la température correspondante à chaque surface, on pourrait connaître la température en un point quelconque; car les coordonnées de ce point substituées dans l'équation générale des surfaces isothermes feraient connaître la valeur particulière du paramètre de la surface qui passe par ce point, et la température s'ensuivrait

La question se réduit donc à connaître l'équation des surfaces isothermes, et la température, en fonction du paramètre qu'elle renferme. Telle est la marche suivie par M. Lamé. Pour l'appliquer au cas actuel, je transformerai l'équation (1) en posant

$$x = \xi\sqrt{A}, \quad y = \eta\sqrt{B}, \quad z = \zeta\sqrt{C}.$$

Elle devient alors

$$(2) \qquad \frac{d^2v}{d\xi^2} + \frac{d^2v}{d\eta^2} + \frac{d^2v}{d\zeta^2} = 0.$$

Si l'on désigne par λ le paramètre de l'équation générale des surfaces isothermes, cette équation peut être conçue sous la forme

$$F(\xi, \eta, \zeta) = \lambda,$$

et la valeur de v, sous la suivante

$$v = f(\lambda).$$

Si l'on différentie cette valeur de v en considérant λ comme fonction de ξ, η, ζ, on trouvera

$$\begin{aligned}
\frac{d^2v}{d\xi^2} &= \frac{d^2f}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{d\xi}\right)^2 + \frac{df}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{d\xi^2},\\
\frac{d^2\lambda}{d\eta^2} &= \frac{d^2f}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{d\eta}\right)^2 + \frac{df}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{d\eta^2},\\
\frac{d^2v}{d\zeta^2} &= \frac{d^2f}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{d\zeta}\right)^2 + \frac{df}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{d\zeta^2},
\end{aligned}$$

en substituant dans l'équation (2), le résultat peut se mettre sous la forme

$$(3) \qquad \frac{\dfrac{d^2f}{d\lambda^2}}{\dfrac{df}{d\lambda}} = -\frac{\dfrac{d^2\lambda}{d\xi^2} + \dfrac{d^2\lambda}{d\eta^2} + \dfrac{d^2\lambda}{d\zeta^2}}{\left(\dfrac{d\lambda}{d\xi}\right)^2 + \left(\dfrac{d\lambda}{d\eta}\right)^2 + \left(\dfrac{d\lambda}{d\zeta}\right)^2}.$$

Ainsi la fonction désignée par λ ou $F(\xi, \eta, \zeta)$ ne pourra représenter les surfaces isothermes, quand on l'égalera à des constantes arbitraires, que si ses dérivées partielles rendent le second membre de l'équa-

tion (3) indépendant de ξ, η, ζ, et dépendant de λ seulement comme le premier. Quand la forme de cette fonction sera connue, on déduira $f(\lambda)$ ou ν de l'équation (3) qu'on intégrera facilement, en mettant son second membre sous la forme $-\frac{d\varphi(\lambda)}{\varphi(\lambda)}$, ce qui est toujours possible en choisissant convenablement $\varphi(\lambda)$. On aura ainsi

$$(4) \qquad \frac{\frac{d^2 f}{d\lambda^2}}{\frac{df}{d\lambda}} = -\frac{d.\varphi(\lambda)}{\varphi(\lambda)}.$$

D'où l'on déduira, en remplaçant $f(\lambda)$ par ν,

$$(5) \qquad \nu = \int \frac{C}{\varphi(\lambda)} + C_1,$$

C et C_1 étant des constantes arbitraires.

Tout est donc réduit à connaître l'équation générale des surfaces isothermes en fonction de ξ, η, ζ et du paramètre λ.

Cas où les surfaces isothermes sont des ellipsoïdes.

Proposons-nous d'abord, comme l'a fait M. Lamé, de reconnaître dans quel cas les surfaces isothermes auront une équation de la forme

$$(6) \qquad m\xi^2 + n\eta^2 + p\zeta^2 = 1,$$

m, n, p étant des fonctions quelconques du paramètre λ. Pour que cela soit possible, il faut que le second membre de l'équation (3) devienne indépendant de ξ, η, ζ. Pour le former, on déduira de l'équation (6) les dérivées de λ par rapport à ξ, η, ζ, en considérant m, n, p comme des fonctions de λ. On l'égalera ensuite à une fonction quelconque de λ, qu'on mettra sous la forme $-\frac{d.\varphi(\lambda)}{\varphi(\lambda)}$, puis on exprimera que les coefficients des différentes puissances de ξ, η, ζ sont nuls separément. En désignant par φ la fonction $\varphi(\lambda)$,

indiquant par des accents les dérivées successives, et posant

$$\tfrac{1}{2}(m+n+p)=\mathrm{L},\quad m=\tfrac{1}{a},\quad n=\tfrac{1}{b},\quad p=\tfrac{1}{c},$$

ces équations de condition seront

$$(7)\quad \begin{cases} \mathrm{L}a'^2-a''=a'\dfrac{\varphi'}{\varphi},\quad \mathrm{L}b'^2-b''=b'\dfrac{\varphi'}{\varphi},\quad \mathrm{L}c'^2-c''=c'\dfrac{\varphi'}{\varphi},\\ 2\mathrm{L}a'b'+2(a'-b')\left(\dfrac{a'}{a}-\dfrac{b'}{b}\right)-(a''+b'')=(a'+b')\dfrac{\varphi'}{\varphi},\\ 2\mathrm{L}b'c'+2(b'-c')\left(\dfrac{b'}{b}-\dfrac{c'}{c}\right)-(b''+c'')=(b'+c')\dfrac{\varphi'}{\varphi},\\ 2\mathrm{L}a'c'+2(c'-a')\left(\dfrac{c'}{c}-\dfrac{a'}{a}\right)-(a''+c'')=(a'+c')\dfrac{\varphi'}{\varphi}. \end{cases}$$

Les trois premières donnent en éliminant $\frac{\varphi'}{\varphi}$,

$$\mathrm{L}(a'-b')=\frac{a''}{a'}-\frac{b''}{b'},\quad \mathrm{L}(b'-c')=\frac{b''}{b'}-\frac{c''}{c'},\quad \mathrm{L}(c'-a')=\frac{c''}{c'}-\frac{a''}{a'}.$$

On satisfait à ces équations en posant

$$a'=b'=c',$$

et toute autre solution conduirait pour a, b, c à des expressions indépendantes de λ, et par conséquent doit être rejetée.

Les équations (7) se réduisent alors toutes à la suivante

$$(8)\qquad \mathrm{L}a'^2-a''=a'\frac{\varphi'}{\varphi},$$

qui déterminera $\frac{\varphi'}{\varphi}$ quand a' sera connu. Mais les équations $a'=b'=c'$ laissent a' arbitraire, et par suite a. Elles donnent seulement $b=a+\alpha$, $c=a+\beta$, α et β étant des constantes arbitraires.

Si donc on désigne par $\psi(\lambda)$ une fonction arbitraire de λ, on pourra poser

$$a=\psi(\lambda),\quad b=\psi(\lambda)+\alpha,\quad c=\psi(\lambda)+\beta.$$

Les équations (7) étant satisfaites, l'équation (3) est possible. Son second membre que nous avons représenté par $-\frac{\varphi'}{\varphi}$, peut être remplacé par la valeur que l'on tire pour $-\frac{\varphi'}{\varphi}$ de l'équation (8). De cette manière l'équation (3), qui n'est d'ailleurs autre chose que l'équation (2), devient

$$-\frac{\frac{d^2v}{d^2\lambda^2}}{\frac{dv}{d\lambda}} = \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c}\right) - \frac{a''}{a'},$$

d'où en intégrant, et représentant par M une constante arbitraire,

$$-l \cdot \frac{1}{M}\frac{dv}{d\lambda} = \frac{1}{2}\, l.abc - l.a'.$$

On tire de là

$$\frac{dv}{d\lambda} = \frac{Ma'}{\sqrt{abc}} = \frac{M\psi'(\lambda)}{\sqrt{\psi(\lambda)\,[\psi(\lambda)+\alpha]\,[\psi(\lambda)+\beta]}},$$

et si l'on pose $\psi(\lambda) = \mu^2$, d'où $\psi'(\lambda) = 2\mu\frac{d\mu}{d\lambda}$, il vient

$$(9)\qquad \begin{cases} dv = 2M\dfrac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2+\alpha)(\mu^2+\beta)}}, \\ v = 2M\displaystyle\int\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2+\alpha)(\mu^2+\beta)}} + N, \end{cases}$$

N étant une nouvelle constante arbitraire.

On aura ensuite

$$a = \mu^2,\quad b = \mu^2 + \alpha,\quad c = \mu^2 + \beta,$$
$$m = \frac{1}{\mu^2},\quad n = \frac{1}{\mu^2+\alpha},\quad p = \frac{1}{\mu^2+\beta}.$$

Les surfaces isothermes ont alors pour équation générale

$$\frac{\xi^2}{\mu^2} + \frac{\eta^2}{\mu^2+\alpha} + \frac{\zeta^2}{\mu^2+\beta} = 1,$$

ou

$$(10)\qquad \frac{x^2}{A\mu^2} + \frac{y^2}{B(\mu^2+\alpha)} + \frac{z^2}{C(\mu^2+\beta)} = 1.$$

Ainsi pour tous les points de la surface représentée par cette équation, la température sera donnée par la formule (9); μ sera le paramètre qui variera d'une surface à l'autre, et α, β des constantes que l'on déterminera d'après les températures données de deux surfaces isothermes.

Soient μ', $\mu_{,}$, les valeurs du paramètre μ qui correspondent à deux ellipsoïdes quelconques renfermés dans l'équation (10) et ayant pour demi-axes, le premier a', b', c', le second a, b, c. On aura

$$(11)\qquad \begin{cases} A\mu_{,}^2 = a^2, & B(\mu_{,}^2 + \alpha) = b^2, \quad C(\mu_{,}^2 + \beta) = c^2, \\ A\mu'^2 = a'^2, & B(\mu'^2 + \alpha) = b'^2, \quad C(\mu'^2 + \beta) = c'^2; \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(12)\qquad \frac{a'^2 - a^2}{A} = \frac{b'^2 - b^2}{B} = \frac{c'^2 - c^2}{C}.$$

Ce qui donne cette première conséquence.

Les ellipsoïdes isothermes ne sont pas homofocaux, et les différences des carrés des demi-axes correspondants sont proportionnelles aux conductibilités principales.

Ainsi ce n'est que dans le cas où la conductibilité est la même en tous sens, que les surfaces isothermes peuvent être des ellipsoïdes, ayant les mêmes foyers.

Les équations (12) montrent que si l'on a $a' > a$, il en résulte $b' > b$, $c' > c$; et que par conséquent *les trois axes des ellipsoïdes isothermes croissent ensemble ou décroissent ensemble.* Mais il n'en résulte nullement que le plus petit axe reste dans la même direction, ainsi que le plus grand et l'axe moyen. Car, si par exemple, l'on a $a > b$, la première des équations (12) n'exige pas que l'on ait $a' > b'$. Toutes les valeurs des variables a', b' qui y satisfont peuvent être regardées comme les coordonnées des points d'une hyperbole, et l'on reconnaît facilement qu'il peut arriver que dans une certaine partie de la courbe, l'ordonnée soit plus petite que l'abscisse, tandis que dans une autre elle sera plus grande.

Considérons maintenant un corps terminé par deux surfaces ellipsoïdes comprises dans l'équation (10). Soient a, b, c, μ_1, v_1 les demi-axes, le paramètre μ et la température, relatifs à la surface intérieure; et a', b', c', μ', v', les quantités correspondantes qui se rapportent à la surface extérieure. Si elles sont telles que les deux équations (12) soient satisfaites, quatre des équations (11) détermineront μ', μ_1, α, β, et l'équation (10) de toutes les surfaces isothermes sera déterminée. Enfin l'équation (9) déterminera la température de chaque surface, quand on aura déterminé les deux constantes M, N par la condition que v' et v_1 soient les températures des deux surfaces extrêmes.

On trouvera d'abord

$$\mu_1 = \frac{a}{\sqrt{A}}, \quad \mu' = \frac{a'}{\sqrt{A}}, \quad \alpha = \frac{b^2}{B} - \frac{a^2}{A}, \quad \beta = \frac{c^2}{C} - \frac{a^2}{A}.$$

L'équation (10) devient alors

$$(13) \qquad \frac{x^2}{A\mu^2} + \frac{y^2}{B\left(\mu^2 + \frac{b^2}{B} - \frac{a^2}{A}\right)} + \frac{z^2}{C\left(\mu^2 + \frac{c^2}{C} - \frac{a^2}{A}\right)} = 1,$$

et l'on vérifie facilement que pour $\mu = \mu_1$ et $\mu = \mu'$, elle donne les deux ellipsoïdes dont les demi-axes sont a, b, c, a', b', c'. En faisant varier μ par degrés infiniment petits, depuis μ_1 jusqu'à μ', on partagerait le corps en couches infiniment peu épaisses, ayant la même température en tous leurs points.

Pour déterminer maintenant les températures correspondantes à chaque valeur de μ, nous considérerons l'équation (9), et nous supposerons l'intégrale prise à partir de la limite $\mu_1 = \frac{a}{\sqrt{A}}$; ce qui donne

$$v = 2M \int_{\frac{a}{\sqrt{A}}}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 + \frac{b^2}{B} - \frac{a^2}{A}}\sqrt{\mu^2 + \frac{c^2}{C} - \frac{a^2}{A}}} + N:$$

comme on doit avoir

$$v = v_1 \quad \text{pour} \quad \mu = \frac{a}{\sqrt{A}}.$$

et

$$v = v' \quad \text{pour} \quad \mu = \frac{a'}{\sqrt{A}},$$

il en résultera

$$N = v_1, \qquad v' = 2M \int_{\frac{a}{\sqrt{A}}}^{\frac{a'}{\sqrt{A}}} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 + \frac{b^2}{B} - \frac{a^2}{A}}\sqrt{\mu^2 + \frac{c^2}{C} - \frac{a^2}{A}}} + v_1,$$

de sorte qu'en posant

$$\int_{\frac{a}{\sqrt{A}}}^{\frac{a'}{\sqrt{A}}} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 + \frac{b^2}{B} - \frac{a^2}{A}}\sqrt{\mu^2 + \frac{c^2}{C} - \frac{a^2}{A}}} = S,$$

on obtient

$$2M = \frac{v' - v_1}{S},$$

et par suite

$$(14) \quad v - v_1 = \frac{v' - v_1}{S} \int_{\frac{a}{\sqrt{A}}}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 + \frac{b^2}{B} - \frac{a^2}{A}}\sqrt{\mu^2 + \frac{c^2}{C} - \frac{a^2}{A}}}.$$

Maintenant il suffira pour connaître la température en un point quelconque du corps, de déterminer la valeur de μ qui lui correspond; et cette valeur s'obtiendra en exprimant que l'équation (13) est satisfaite par les coordonnées de ce point. Il est certain d'ailleurs que l'on ne trouvera pour μ qu'une seule valeur réelle et positive : car les trois axes des ellipsoïdes (13), croissant ensemble, il ne saurait y en avoir plus d'un à passer par un point donné.

Expression du flux.

Le flux rapporté à l'unité de surface, dont l'axe fait les angles l, l', l'' avec les axes de coordonnées, étant désigné par F, on a, comme je l'ai démontré,

$$-\mathrm{F} = \mathrm{A}\frac{dv}{dx}\cos l + \mathrm{B}\frac{dv}{dy}\cos l' + \mathrm{C}\frac{dv}{dz}\cos l'';$$

pour former cette expression on observera que v est une fonction de μ donnée par l'équation (14) et μ une fonction de x, y, z donnée par l'équation (10). On aura ainsi

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\mu}\frac{d\mu}{dx}, \quad \frac{dv}{dy} = \frac{dv}{d\mu}\frac{d\mu}{dy}, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\mu}\frac{d\mu}{dz},$$

$$\frac{dv}{d\mu} = \frac{v' - v_1}{\mathrm{S}\sqrt{\mu^2 + \frac{b^2}{\mathrm{B}} - \frac{a^2}{\mathrm{A}}}\sqrt{\mu^2 + \frac{c^2}{\mathrm{C}} - \frac{a^2}{\mathrm{A}}}},$$

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{x}{\mathrm{A}\mu^2}}{\frac{x^2}{\mathrm{A}\mu} + \frac{\mu y^2}{\mathrm{B}(\mu^2+\alpha)^2} + \frac{\mu z^2}{\mathrm{C}(\mu^2+\beta)^2}}, \quad \frac{d\mu}{dy} = \frac{\frac{y}{\mathrm{B}(\mu^2+\alpha)}}{\frac{x^2}{\mathrm{A}\mu} + \frac{\mu y^2}{\mathrm{B}(\mu^2+\alpha)^2} + \frac{\mu z^2}{\mathrm{C}(\mu^2+\beta)^2}},$$

$$\frac{d\mu}{dz} = \frac{\frac{z}{\mathrm{C}(\mu^2+\beta)}}{\frac{x^2}{\mathrm{A}\mu} + \frac{\mu y^2}{\mathrm{B}(\mu^2+\alpha)^2} + \frac{\mu z^2}{\mathrm{C}(\mu^2+\beta)^2}},$$

$$(15)\quad \mathrm{F} = \frac{v_1 - v'}{\sqrt{\mu^2 + \frac{b^2}{\mathrm{B}} - \frac{a^2}{\mathrm{A}}}\sqrt{\mu^2 + \frac{c^2}{\mathrm{C}} - \frac{a^2}{\mathrm{A}}}}\left\{\frac{\frac{x}{\mu^2}\cos l + \frac{y}{\mu^2+\alpha}\cos l' + \frac{z}{\mu^2+\beta}\cos l''}{\frac{x^2}{\mathrm{A}\mu} + \frac{\mu y^2}{\mathrm{B}(\mu^2+\alpha)^2} + \frac{\mu z^2}{\mathrm{C}(\mu^2+\beta)^2}}\right\}.$$

M. Lamé a démontré que dans le cas d'une conductibilité constante, les flux au travers d'une surface isotherme, considérés aux extrémités de ses trois axes, étaient entre eux comme les longueurs de ces axes. Voyons quel sera le théorème correspondant dans le cas plus général dont nous nous occupons.

Dans la comparaison des flux correspondants à une même valeur

de μ, nous pourrons supprimer le facteur commun

$$\frac{v_1 - v'}{S\sqrt{\mu^2 + \frac{b^2}{B} + \frac{a^2}{A}}\sqrt{\mu^2 + \frac{c^2}{C} - \frac{a^2}{A}}}.$$

Les demi-axes de l'ellipsoïde étant désignés par a'', b'', c''; à l'extrémité de l'axe des x, on a

$$x = a'', \quad y = 0, \quad z = 0, \quad \cos l = 1, \quad \cos l' = 0, \quad \cos l'' = 0.$$

Ce flux sera donc, au facteur commun près,

$$\frac{A\mu}{a''}.$$

On trouvera de même pour les flux aux extrémités des demi-axes b'', c'',

$$\frac{B(\mu^2 + \alpha)}{b''\mu}, \qquad \frac{C(\mu^2 + \beta)}{c''\mu}.$$

Ces trois flux sont donc entre eux

$$:: \frac{A\mu^2}{a''} : \frac{B(\mu^2 + \alpha)}{b''} : \frac{C(\mu^2 + \beta)}{c''},$$

et comme on a

$$A\mu^2 = a''^2, \quad B(\mu^2 + \alpha) = b''^2, \quad C(\mu^2 + \beta) = c''^2,$$

ils seront entre eux

$$:: a'' : b'' : c''.$$

Ainsi, *les flux de chaleur qui traversent un ellipsoïde isotherme aux extrémités de ses trois axes sont entre eux dans le rapport même de ces axes.*

M. Lamé avait démontré ce théorème dans le cas d'une conductibilité constante; et c'est une chose remarquable que ce rapport ne

soit pas altéré, quelle que soit la loi suivant laquelle la conductibilité varie avec la direction.

L'équation (15) conduit à une expression très simple du flux à travers un élément quelconque de la surface d'un ellipsoïde isotherme; et l'on en déduit une proposition qui renferme la précédente. En effet, l'équation du plan tangent à l'ellipsoïde est

$$\frac{xx'}{A\mu^2} + \frac{yy'}{B(\mu^2+\alpha)} + \frac{zz'}{C(\mu^2+\beta)} = 1,$$

x', y', z', étant les coordonnées du point de contact.

Soit P la perpendiculaire abaissée de l'origine sur ce plan, on aura

$$P = \frac{1}{\sqrt{\frac{x'^2}{A^2\mu^4} + \frac{y'^2}{B^2(\mu^2+\alpha)^2} + \frac{z'^2}{C^2(\mu^2+\beta)^2}}},$$

$$\cos l = P\frac{x'}{A\mu^2}, \qquad \cos l' = P\frac{y'}{B(\mu^2+\alpha)}, \qquad \cos l'' = P\frac{z'}{C(\mu^2+\beta)};$$

substituant ces valeurs dans la formule (15) en observant que x', y', z' doivent y être remplacés par x, y, z, il vient

$$(16) \quad F = \frac{P(v_1 - v')}{\mu S\sqrt{\mu^2 + \frac{b^2}{B} - \frac{a^2}{A}}\sqrt{\mu^2 + \frac{c^2}{C} - \frac{a^2}{A}}} = \frac{(v_1 - v')\sqrt{ABC}}{a''b''c''S}.P.$$

Ainsi, *le flux de chaleur qui traverse la surface d'un ellipsoïde isotherme en un point quelconque, est proportionnel à la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en ce point.*

Cette proposition n'avait pas été remarquée par M. Lamé; mais elle l'avait été par M. Chasles dans le cas d'une conductibilité constante. Il est encore remarquable qu'elle subsiste, quelle que soit la loi suivant laquelle la conductibilité varie avec la direction.

On peut encore observer que le flux est en raison inverse du volume de l'ellipsoïde dont on considère la surface, et proportionnel à la différence des températures des surfaces extrêmes.

Flux à travers une surface isotherme.

Si l'on multiplie l'expression du flux, donnée par l'équation (16), par l'élément ds de la surface de l'ellipsoïde isotherme, et qu'on fasse la somme de ces produits dans toute l'étendue de cette surface, on aura la quantité de chaleur qui la traverse dans l'unité de temps; son expression sera

$$\frac{(\nu_{,} - \nu')\sqrt{ABC}}{a''b''c''S}\,\Sigma P ds.$$

Or $\frac{1}{3}Pds$ est le volume du cône dont ds est la base, et qui a son sommet au centre de l'ellipsoïde : donc ΣPds est égal à trois fois le volume de cet ellipsoïde, ou à $4\pi a''b''c''$. Le flux cherché a donc pour valeur

$$4\pi\,\frac{(\nu_{,} - \nu')\sqrt{ABC}}{S}.$$

On voit qu'il est le même quelle que soit la surface isotherme, et cela devait être puisque toutes les températures restent invariables.

Cas des ellipsoïdes isothermes semblables.

Pour que deux ellipsoïdes isothermes quelconques, ayant pour demi-axes a, b, c, a', b', c', soient semblables, il faudra que l'on ait

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Ces équations jointes aux équations (12) donnent

$$\frac{a}{\sqrt{A}} = \frac{b}{\sqrt{B}} = \frac{c}{\sqrt{C}};$$

ce qui ne donne que les ellipsoïdes dont les axes sont proportionnels aux racines carrées des conductibilités principales.

Dans ce cas la formule (14) devient

$$v - v_{,} = \frac{v' - v_{,}}{S} \int_{\frac{a}{\sqrt{A}}}^{\mu} \frac{d\mu}{\mu^2} = \frac{v_{,} - v'}{S} \left(\frac{1}{\mu} - \frac{\sqrt{A}}{a} \right),$$

on a de plus

$$S = \frac{\sqrt{A}}{a} - \frac{\sqrt{A}}{a'},$$

$v_{,}$ et v' désignant les températures constantes et données de deux ellipsoïdes déterminés, ayant pour demi-axes a, b, c, a', b', c'.

Si l'on désigne par a'' le demi-axe des x de l'ellipsoïde qui correspond à la valeur quelconque μ, on aura $u = \frac{a''}{\sqrt{A}}$, d'où en substituant cette valeur à μ,

$$v - v_{,} = (v' - v_{,}) \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{a''}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}};$$

d'ou l'on voit que *la température sera indépendante des conductibilités principales.*

Les ellipsoïdes isothermes semblables deviennent des sphères, quand la conductibilité est la même dans tous les sens.

Surface sphérique isotherme.

Pour que l'une des surfaces isothermes soit sphérique, on devra avoir, en désignant par R son rayon, et par a, b, c les demi-axes de la surface intérieure du corps,

$$\frac{R^2 - a^2}{A} = \frac{R^2 - b^2}{B} = \frac{R^2 - c^2}{C}.$$

Eliminant R on trouve

$$\frac{Ab^2 - Ba^2}{Ac^2 - Ca^2} = \frac{A - B}{A - C}.$$

C'est la *condition pour qu'il puisse y avoir une surface sphérique iso-*

therme dans le système dont fera partie l'ellipsoïde, ayant pour demi-axes a, b, c.

Si elle est satisfaite, on aura

$$R^2 = \frac{Ab^2 - Ba^2}{A - B}.$$

Le flux de chaleur qui traverse la surface de cette sphère sera le même en tous ses points, puisque la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent est constante.

Supposons, comme cela est toujours permis, que l'on ait.... $\frac{a^2}{A} > \frac{b^2}{B} > \frac{c^2}{C}$, l'équation (13) ne représentera des ellipsoïdes que si l'on a $\mu^2 > \frac{a^2}{A} - \frac{c^2}{C}$.

Elle représentera des hyperboloïdes à une nappe, ayant leur axe imaginaire dirigé suivant l'axe des z lorsque l'on aura

$$\mu^2 < \frac{a^2}{A} - \frac{c^2}{C} \quad \text{et} \quad \mu^2 > \frac{a^2}{A} - \frac{b^2}{B}.$$

Enfin elle représentera des hyperboloïdes à deux nappes, ayant leur axe réel dirigé suivant l'axe des x, lorsque l'on aura

$$\mu^2 < \frac{a^2}{A} - \frac{b^2}{B}.$$

En désignant par ν et ρ les valeurs de μ qui se rapportent à ces deux derniers cas, les équations de ces trois espèces de surfaces seront

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{x^2}{A\mu^2} + \frac{y^2}{B\left(\mu^2 + \frac{b^2}{B} - \frac{a^2}{A}\right)} + \frac{z^2}{C\left(\mu^2 + \frac{c^2}{C} - \frac{a^2}{A}\right)} = 1,\\
&\frac{x^2}{A\nu^2} + \frac{y^2}{B\left(\nu^2 + \frac{b^2}{B} - \frac{a^2}{A}\right)} + \frac{z^2}{C\left(\frac{a^2}{A} - \frac{c^2}{C} - \nu^2\right)} = 1,\\
&\frac{x^2}{A\rho^2} + \frac{y^2}{B\left(\frac{a^2}{A} - \frac{b^2}{B} - \rho^2\right)} + \frac{z^2}{C\left(\frac{a^2}{A} - \frac{c^2}{C} - \rho^2\right)} = 1,
\end{aligned}\right.$$

a, b, c, étant trois quantités arbitraires, qui sont les demi-axes d'un ellipsoïde renfermé dans la première de ces équations.

Supposons maintenant que par un point donné dont les coordonnées soient x, y, z, on fasse passer une surface de chacune de ces trois espèces, les trois équations précédentes détermineront x, y, z au moyen des valeurs correspondantes de μ, ν, ρ qui pourront être prises comme éléments de la détermination du point. En indiquant cette transformation, M. Lamé a fait observer que ces trois surfaces se coupent deux à deux à angle droit, comme l'avait démontré depuis long-temps M. Binet. Mais cela supposait la conductibilité constante, et nous allons voir que cette propriété n'a plus lieu lorsqu'elle est variable avec la direction.

En effet les équations (17) donnent pour x, y, z, les valeurs suivantes

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{\mu\nu\rho\sqrt{A}}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{A}-\frac{b^2}{B}\right)\left(\frac{a^2}{A}-\frac{c^2}{C}\right)}},\\ y &= \frac{\sqrt{\left(\mu^2+\frac{b^2}{B}-\frac{a^2}{A}\right)\left(\nu^2+\frac{b^2}{B}-\frac{a^2}{A}\right)\left(\frac{a^2}{A}-\frac{b^2}{B}-\rho^2\right)}\sqrt{B}}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{A}-\frac{b^2}{B}\right)\left(\frac{b^2}{B}-\frac{c^2}{C}\right)}},\\ z &= \frac{\sqrt{\left(\mu^2+\frac{c^2}{C}-\frac{a^2}{A}\right)\left(\frac{a^2}{A}-\frac{c^2}{C}-\nu^2\right)\left(\frac{a^2}{A}-\frac{c^2}{C}-\rho^2\right)}\sqrt{C}}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{A}-\frac{c^2}{C}\right)\left(\frac{b^2}{B}-\frac{c^2}{C}\right)}}. \end{aligned}\right.$$

Les équations des plans tangents aux surfaces (17) sont

$$\frac{xx'}{A\mu^2}+\frac{yy'}{B\left(\mu^2+\frac{b^2}{B}-\frac{a^2}{A}\right)}+\frac{zz'}{C\left(\mu^2+\frac{c^2}{C}-\frac{a^2}{A}\right)}=1,$$

$$\frac{xx'}{A\nu^2}+\frac{yy'}{B\left(\nu^2+\frac{b^2}{B}-\frac{a^2}{A}\right)}-\frac{zz'}{C\left(\frac{a^2}{A}-\frac{c^2}{C}-\nu^2\right)}=1,$$

$$\frac{xx'}{A\rho^2}-\frac{yy'}{B\left(\frac{a^2}{A}-\frac{b^2}{B}-\rho^2\right)}-\frac{zz'}{C\left(\frac{a^2}{A}-\frac{c^2}{C}-\rho^2\right)}=1.$$

Si l'on pose la condition pour que les deux premiers soient perpen-

diculaires, et qu'on remplace $x'y'z'$ par les valeurs données par les équations (18), on arrive à

$$\varrho^2[(B-C)a^2+(C-A)b^2+(A-B)c^2]+\left(\frac{a^2}{A}-\frac{b^2}{B}\right)\left(\frac{a^2}{A}-\frac{c^2}{C}\right)A(C-B)=0,$$

équation qui n'est pas satisfaite d'elle-même.

On trouve semblablement deux conditions qui ne sont pas identiquement satisfaites pour que le premier plan tangent soit perpendiculaire au troisième et le deuxième au troisième. Mais elles ont lieu toutes les trois, si l'on a $A=B=C$, c'est-à-dire si la conductibilité est la même dans tous les sens.

Réflexions sur le Problème de déterminer le nombre de manières dont une figure rectiligne peut être partagée en triangles au moyen de ses diagonales ;

PAR M. J. BINET,

Professeur au Collége de France, ancien Professeur à l'École Polytechnique, etc.

Cette question a été résolue par Euler, mais il n'a pas donné la démonstration de sa formule. On la trouve citée dans l'analyse sommaire d'un Mémoire de Segner, sur le même sujet, imprimé dans la collection de Saint-Pétersbourg, 1758 — 1759 : nous apprenons de Segner qu'Euler lui avait indiqué ce problème et qu'il lui avait en même temps communiqué les nombres de décompositions triangulaires des polygones de 4, 5, 6, 7, 8, 9 côtés : ces nombres sont 2, 5, 14, 42, 132, 429. Segner trouva une méthode pour passer successivement des polygones de moins de n côtés au polygone de n côtés, par une espèce d'échelle de dérivation que nous rapporterons ci-dessous. Il en déduisit une table étendue jusqu'aux polygones de 20 côtés : En comparant cette table à la sienne, Euler reconnut qu'à partir du polygone de 15 côtés, elle était défectueuse. C'est alors qu'il donna sa formule, et la table qu'il en avait déduite portée jusqu'aux polygones de 25 côtés. La formule résulte d'une équation à différences finies du premier ordre, beaucoup plus simple que l'échelle de dérivation de Segner. Ainsi la solution d'un même problème a conduit à deux formules analytiques distinctes : par quelle voie algébrique peut-on passer de l'une à l'autre? Nous avons appris de M. Terquem, dont le talent et l'érudition sont connus des géomètres, que ce problème d'analyse a vainement exercé des hommes habiles. Dans ces derniers temps, M. Lamé a démontré la

solution d'Euler (3e vol. de ce *Journal de Mathématiques*, page 505): en partant de l'équation de Segner, il se sert ingénieusement dans ce but d'une considération géométrique. Je suis informé par M. Liouville que M. Rodrigues vient de prouver plus directement encore la formule d'Euler par une considération synthétique du même genre. Mais la question analytique que je viens d'énoncer subsiste entière, et je vais la traiter. J'y joindrai quelques conséquences naturellement liées à ce sujet. On a eu quelquefois à remarquer que les choses les plus épineuses ne prenaient cette apparence que du point de vue d'où elles étaient considérées : la question dont il s'agit en présentera un nouvel exemple.

[1]. Pour plus de clarté, je crois utile de rappeler le principe très simple de la solution de Segner. Il s'agit dans ce problème de faire l'énumération des manières distinctes dont on peut opérer la décomposition d'une figure rectiligne en triangles, par ses diagonales. On désignera par h l'ordre du polygone, h étant 1 pour le triangle, 2 pour le quadrilatère, etc.; et $h+2$ sera le nombre des sommets ou des côtés du polygone. On dénotera par $T(h)$ le nombre des triangulations contiguës qui conviennent à la figure de l'ordre h, en sorte que $T(1)$ qui se rapporte au triangle égale 1; $T(2)$ relatif au quadrilatère partagé en triangles par ses diagonales, $T(2)=2$; $T(3)=5$, etc. Parmi les sommets de la figure, prenez-en deux qui répondent à un côté LM et joignez-les par des diagonales à un autre angle O; si cet angle appartient à un côté consécutif à LM, le triangle emploiera deux côtés du polygone et seulement une diagonale : alors la figure sera partagée en un triangle LOM et en un polygone dont l'ordre sera $h-1$. Le nombre des triangulations contiguës de la figure de l'ordre $h-1$ sera $T(h-1)$; chacune d'elles étant jointe au triangle donnera une triangulation de la figure proposée : ainsi $T(h-1)$ sera une partie du nombre cherché $T(h)$. Si le triangle LOM laisse à gauche de LO un seul sommet du polygone, ce sommet O′ et LO formeront un triangle; à droite du côté OM il restera $h-1-1$ sommets, qui avec le côté OM composeront une figure de l'ordre $h-2$; le nombre de ses décompositions sera $T(h-2)$, et chacune d'elles jointe au triangle LOM et à la figure triangulaire O′OL, fournira une décomposition du polygone donné; on aura de cette manière $T(h-2)\times T(1)$

décompositions nouvelles faisant aussi partie de $T(h)$; lorsque le sommet O sera pris de telle sorte qu'il laisse à gauche de OL deux sommets O'O'', il en restera $h-3$ à droite de OM; alors le polygone sera partagé en une figure du second ordre (quadrilatère), le triangle LOM, en une figure de l'ordre $h-3$; $T(2)$ sera le nombre des décompositions de la figure du second ordre et $T(h-3)$ le nombre de l'autre polygone partiel; le nombre des décompositions de la figure proposée répondant à ce mode de partage sera $T(2) \times T(h-3)$, et sera aussi une des parties du nombre $T(h)$; en continuant ainsi, on voit que

$$(1)\quad \begin{cases} T(h) = T(h-1) + T(1)\,T(h-2) + T(2)\,T(h-2) + \text{etc.} \\ \quad \ldots + T(h-2).T(1) + T(h-1). \end{cases}$$

Telle est la solution du problème trouvée par Ségner, à la notation près : il emploie des lettres a, b, c... pour représenter ce que nous dénotons par $T(1)$, $T(2)$, etc. Si dans cette formule on pose successivement $h=2$, $=3$, $=4$, etc., on aura

$$(1')\quad \begin{cases} T(2) = T(1) + T(1) = 1 + 1 = 2, \\ T(3) = T(2) + T(1)T(1) + T(2) = 2 + 1 + 2 = 5, \\ T(4) = T(3) + T(1)T(2) + T(2).T(1) + T(3) = 2(5+2) = 14, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Quant à la formule d'Euler, elle s'exprime dans notre notation par l'équation

$$(2)\qquad T(h) = \frac{2.4.6\ldots(4h-3)}{1.2.3\ldots.h.(h+1)};$$

il l'a déduite de l'équation aux différences finies

$$(3)\qquad T(h+1) = \frac{(4h+2)}{h+2}\,T(h),$$

sous la condition de $T(1) = 1$. C'est à cette équation que la nouvelle démonstration de M. Rodrigues conduit directement.

[11]. La question analytique à traiter est de faire voir comment l'une de ces formules peut être une conséquence de l'autre, quand

on considère h comme un nombre entier, ce que suppose nécessairement la formule de Ségner.

$T(1)$, $T(2)$, $T(3)$, etc., étant les quantités que nous avons définies précédemment, c'est-à-dire liées par la formule de Ségner, nous formerons une fonction

$$(4)\quad Z = 1 + zT(1) + z^2T(2) + z^3T(3) + \ldots + z^hT(h) + \text{etc.}$$

Cette formule sera composée d'un nombre infini de termes où $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$, etc., entrent en coefficients : les géomètres désignent les fonctions de cette espèce par le nom de *fonction génératrice des coefficients* $T(1)$, $T(2)\ldots T(h)\ldots$. Les fonctions génératrices sont d'un grand usage dans l'analyse depuis Moivre et Euler; mais c'est à Laplace que l'on doit les considérations les plus étendues et les méthodes les plus générales que l'on en ait tirées pour la transformation des suites et pour d'autres sujets difficiles à traiter autrement. (Voyez sa *Théorie des Probabilités* et ses Mémoires dans le *Recueil de l'Académie des Sciences*, et dans le XVe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*). Dans la fonction Z la quantité z est une arbitraire que l'on suppose assez petite pour que la série soit convergente.

Élevant au carré l'équation (4), on a

$$\begin{aligned} Z^2 = 1 &+ z[T(1) + T(1)] + z^2[T(2) + T(1)T(1) + T(2)] + \ldots \\ &+ z^{h-1}[T(h-1) + T(1)T(h-2) + \text{etc.} + T(h-2)T(1) + T(h-1)] \\ &+ \text{etc.}; \end{aligned}$$

Mais

$$\frac{Z}{z} = \frac{1}{z} + T(1) + zT(2) + z^2T(3) + \ldots + z^{h-1}T(h) + \text{etc.};$$

si l'on soustrait cette dernière formule de la valeur de Z^2, et que l'on ait égard à l'équation (1), ainsi qu'aux équations (1') qui en ont été déduites, on verra que dans le second membre tous les termes, à l'exception d'un seul, disparaissent; on aura donc

$$(5)\qquad Z^2 - \frac{1}{z}Z = -\frac{1}{z};$$

équation du second degré qui fait connaître la nature algébrique de la fonction génératrice Z. On aura en effet, par la résolution de l'équation (5),

$$Z = \frac{1}{2z} - \sqrt{\frac{1}{4z^2} - \frac{1}{z}},$$

ou bien

$$(6) \qquad Z = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - 4z}\right):$$

on a employé le signe négatif du radical, parce que l'autre racine de l'équation ne donne pas $Z = 1$ quand $z = 0$, condition que remplit la fonction génératrice : cette autre racine admettrait des puissances négatives dans la valeur de Z développée, forme que ne comporte pas la fonction définie par l'équation (4).

Actuellement, que l'on développe en série par la formule de Newton, le radical $\sqrt{1 - 4z}$, on aura

$$\sqrt{1 - 4z} = 1 - \frac{1}{2}4z - \frac{1.1}{2.4}(4z)^2 - \frac{1.3}{2.4.6}(4z)^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}(4z)^4 - \text{etc.}$$

Retranchant cette suite de l'unité et divisant par $2z$, on aura formé le développement de la valeur de Z, savoir,

$$Z = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}.4 + \frac{1}{2.4}4^2.z + \frac{1.3}{2.4.6}.4^3.z^2 \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2h-1).4^{h+1}}{2.4\ldots2h.(2h+2)}z^h + \text{etc.}\right]$$

D'après la formation (4) de la fonction génératrice, $T(h)$ est le coefficient de z^h dans ce développement, il en résulte

$$T(h) = \frac{1.3.5\ldots(2h-1)}{2.4.6\ldots2h.(2h+2)}.2^{2h+1}$$

Dans cette fraction, on peut enlever $h+1$ facteurs égaux à 2 au dénominateur, et effacer la puissance 2^{h+1} au numérateur, alors on aura plus simplement

$$(2) \qquad T(h) = \frac{1.3.5\ldots(2h-1).2^h}{1.2.3\ldots h.(h+1)}.$$

Si l'on met ici $h+1$ à la place de h et que l'on prenne le rapport

de $T(h+1)$ à $T(h)$, on aura

$$(3) \qquad T(h+1) = 2\,\frac{(2h+1)}{h+2}\,.\,T(h).$$

Ces deux formules sont celles qui répondent à la solution d'Euler (2), (3). Cette solution se trouve ainsi algébriquement déduite de la formule de Ségner.

[III]. *Réciproquement.* Si par un moyen quelconque, celui de M. Rodrigues, par exemple, on a établi l'équation (2) comme donnant la valeur du nombre $T(h)$, on peut remonter à la formule de Ségner (1), comme conséquence de celle d'Euler. Il suffira pour cela de former la fonction génératrice Z d'après cette loi

$$\begin{aligned} Z &= 1 + zT(1) + z^2.T(2) + z^3T(3) + z^4.T(4)\ldots + z^{h-1}.T(h-1) + \text{etc.} \\ &= 1 + z.2^3\frac{1}{2.4} + z^2.2^5\frac{1.3}{2.4.6} + z^3.2^7.\frac{1.3.5}{2.4.6.8} + \text{etc.} + z^{h-1}2^{2h-1}.\frac{1.3\ldots(2h-3)}{2.4.6\ldots 2h}, \end{aligned}$$

et on y reconnaît facilement le développement de la fonction algébrique $\frac{1}{2z}\left(1-\sqrt{1-4z}\right)$; ainsi l'on aura $Z = \frac{1}{2z}\left(1-\sqrt{1-4z}\right)$; d'où l'on tire $(2Z.z-1)^2 = 1-4z$; ou bien, en divisant par $4z$,

$$Z^2 = \frac{1}{z}.(Z-1).$$

Avec la valeur de $Z = 1 + zT(1) + z^2T(2) + \text{etc.}$ on formera le carré Z^2; on y prendra la somme des termes affectés de la puissance z^{h-1} : cette somme sera

$$T(h-1) + T(1)\,T(h-2) + T(2)\,T(h-3) + \text{etc.} + T(h-1),$$

et en vertu de l'équation précédente, on l'égalera à $T(h)$, coefficient de z^{h-1} dans l'expression de $\frac{1}{z}(Z-1)$. On formera de cette manière l'équation (1)

$$T(h) = T(h-1) + T(1)T(h-2) + T(2)\,T(h-3) + \text{etc.} + T(h-1),$$

comme conséquence de la valeur $T(h) = \frac{1.3.5\ldots(2h-1).2^{2h+1}}{2.4.6\ldots 2h.(2h+2)}$ donnée par Euler.

[IV]. Les nombres entiers $T(1) = 1$, $T(2) = 2$, $T(3) = 5$, $T(4) = 14$, etc., s'étaient déjà présentés à ce grand géomètre avant qu'il y rattachât la question géométrique de la triangulation des polygones : dans le chapitre *du calcul différentiel* où il traite de la transformation des suites, on rencontre (p. 297) précisément la série des entiers $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$, etc.; ils concourent aussi à un mode singulier de résolution de l'équation indéterminée $x^2 = 8z + 1 + 2^m . y$, ainsi qu'on peut le voir dans la Théorie des Nombres de Legendre (2me et 3me édition). Leurs propriétés méritent donc d'attirer l'attention des géomètres. Voici celles que l'on tire immédiatement des méthodes d'Euler pour la transformation des suites.

Nous avons trouvé qu'en posant

$$(4) \qquad Z = 1 + zT(1) + z^2T(2) \ldots + z^hT(h) + \text{etc.},$$

la fonction génératrice $Z = \frac{1}{2z}(1 - \sqrt{1 - 4z})$: Dans ces formules, nous écrirons $z = y - y^2$; il en résultera

$$\sqrt{1 - 4z} = \sqrt{1 - 4y + 4y^2} = 1 - 2y,$$

et
$$Z = \frac{1}{2(y - y^2)}(1 - 1 + 2y) = \frac{1}{1 - y};$$

ou bien en développant selon les puissances de y,

$$Z = 1 + y + y^2 + y^3 + \text{etc.}$$

Mais en substituant dans l'équation (4) $z = y(1 - y)$, on aura sous une autre forme

$$Z = 1 + y(1 - y)T(1) + y^2(1 - y)^2T(2) + y^3(1 - y)^3T(3) + \text{etc.}$$

Lorsque cette dernière suite aura été ordonnée relativement à y, elle devra devenir identique à $1 + y + y^2 + \text{etc.}$; on aura donc

$$\begin{aligned} T(1) &= 1, \\ T(2) - T(1) &= 1, \\ T(3) - 2T(2) &= 1, \\ T(4) - 3T(3) + T(2) &= 1, \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

$$(7)\ T(h)-(h-1)T(h-1)+\frac{(h-2)(h-3)}{2}T(h-2)-\frac{(h-3)(h-4)(h-5)}{2.3}T(h-3)+\text{etc.}=1.$$

Nous venons de trouver $Z=\frac{1}{1-y}=\frac{y}{z}$; substituons cette valeur dans l'équation précédente où entre Z exprimée en T(1), T(2), etc., et multiplions par $1-y$; il en résulte

$$1=1-y+y(1-y)^2T(1)+y^2(1-y)^3T(2)+y^3(1-y)^4T(3)+\text{etc.}$$

Dans celle-ci comparons encore les termes semblables ou affectés des mêmes puissances de y, on aura cette autre suite d'équations

$$\begin{aligned} 0 &= T(1)-1, \\ 0 &= T(2)-2T(1)=0, \\ 0 &= T(3)-3T(2)+T(1)=0, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$(8)\ 0=T(h)-hT(h-1)+\frac{(h-1)(h-2)}{2}T(h-2)-\frac{(h-2)(h-3)(h-4)}{2.3}T(h-3)+\text{etc.}$$

Nous avons appris que par une méthode très différente, M. Catalan a trouvé de son côté une relation analogue à cette dernière équation; elle ne lui est pas tout-à-fait identique, mais elle s'y ramène sans difficulté. On pourra aisément s'assurer que la formule (8) est une conséquence fort simple de l'équation (7) et réciproquement.

Il serait au moins aussi facile de parvenir à la formule (8), par des considérations synthétiques, qu'à celles d'Euler et de Segner : on pourrait ensuite remonter à celles-ci comme conséquences de la nouvelle relation.

[V]. Reprenons l'expression de $T(h)$, savoir

$$T(h)=\frac{1.3.5\ldots(2h-1).2^h}{1.2.3\ldots h(h+1)};$$

en multipliant haut et bas par $1.2.3\ldots h$, on en peut tirer

$$\frac{1.2.3\ldots(2h-1)\,2h}{1.2.3\ldots h.1.2.3\ldots h}=(h+1)\,T(h),$$

le premier membre est le coefficient de a^hb^h dans le développement

de la puissance $(a+b)^{2h}$ du binome $a+b$. Stirling a donné pour le calculer une belle formule que voici et où π désigne le nombre du cercle

$$2^{2h}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2h+1}+\frac{1}{2.(2h+1)(2h+3)}+\frac{1.3^2}{2.4.(2h+1)\ldots(2h+5)}+\text{etc.}\right]},$$

en égalant donc à ce développement la quantité $(h+1)\,T(h)$, il en résulte la formule suivante particulièrement propre au calcul de $T(h)$, quand h devient un grand nombre, c'est-à-dire quand le nombre des côtés du polygone est très grand, puisque ce nombre est $h+2$:

$$T(h)=\frac{2^{2h}}{h+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2h+1}+\frac{1}{2(2h+1)(2h+3)}+\frac{1.3^2}{2.4.(2h+1)(2h+3)(2h+5)}+\text{etc.}\right]}:$$

La série qui entre sous le radical est d'autant plus convergente que h est un nombre plus considérable.

On peut encore évaluer le même nombre par une seconde formule, qui n'est point dans l'ouvrage de Stirling, mais qui a beaucoup d'analogie avec la précédente:

$$T(h)=\frac{2^{2h}}{h+1}\sqrt{\frac{1}{2h}\left[1-\frac{1}{2(2h+1)}-\frac{1}{3}\,\frac{1.3^2}{2.4.(2h+1)(2h+3)}-\frac{1}{5}\,\frac{1.3.5^2}{2.4.6\,(2h+1)\ldots(2h+5)}-\text{etc}\right]}.$$

Par ces expressions on calculera rapidement les nombres rapportés dans la table d'Euler: la première étant arrêtée à un certain terme donnera un nombre moindre que $T(h)$; la seconde donnera un nombre plus fort.

Je n'exposerai pas ici la méthode par laquelle on peut établir simplement ces belles formules. Ces démonstrations se trouveront dans un Mémoire dont la rédaction m'occupe en ce moment, et dont l'objet est l'évaluation des intégrales définies que les géomètres connaissent sous le nom d'*Eulériennes*, et leur usage dans la détermination, en suites convergentes, des formules qui sont fonctions de grands nombres.

Je dois avertir dès à présent les analystes que la dernière formule ne pourrait pas être remplacée à l'aide de la deuxième expression donnée par Stirling (page 120, *Tract. de summ. Serierum*, édit. 1764): je me suis assuré que celle-ci est inexacte. Il en est même ainsi

de la seconde équation de la page 119, prop. XXIII. Les deux autres formules excitèrent l'admiration de Moivre, et elles en étaient bien dignes, ainsi que l'ouvrage entier de Stirling. Comment depuis un siècle de tels résultats ne sont-ils cités dans presque aucun ouvrage français ! Je ne sais même si l'on pourrait y rencontrer une seule de ces formules, avant la seconde édition de la théorie des probabilités de Laplace : dans une addition fort curieuse, il rapporte et démontre un peu plus simplement que Stirling, la première de ses quatre expressions, relatives au plus grand terme du binome élevé à une haute puissance paire. Les trois autres ne méritaient pas moins que la première l'attention des géomètres, soit pour en confirmer l'exactitude, soit pour les rectifier, s'il était nécessaire.

[VI]. L'équation (3) d'Euler $T(h+1) = \frac{2(2h+1)}{h+2} T(h)$, considérée analytiquement et indépendamment de son origine géométrique, est une équation aux différences finies du premier ordre d'une plus grande généralité que l'échelle de dérivation de Ségner :

$$T(h) = T(h-1) + T(1)T(h-2) + T(2)T(h-3) + \text{etc.} + T(h-1).$$

Dans celle-ci h désigne nécessairement un entier positif, puisqu'il est le nombre des termes du second membre : dans l'équation (3), h peut être un nombre quelconque ; $T(h)$ et $T(h+1)$ sont deux valeurs consécutives d'une fonction répondant aux valeurs h et $h+1$ de la variable. L'équation (3) s'intègre facilement à l'aide d'une intégrale binome, car elle est de l'espèce de celles dont Stirling s'est occupé d'abord, et que Euler et Laplace ont traitées à peu près dans le même temps. Pour l'intégrer, on posera $T(h) = 4^h . U(h)$, et en substituant dans l'équation, on aura

$$4^{h+1} U(h+1) = \frac{4(h+\frac{1}{2})}{h+2} 4^h . U(h);$$

divisant de part et d'autre par 4^{h+1}, on aura

$$U(h+1) = \frac{h+\frac{1}{2}}{h+2} . U(h),$$

il suffira de comparer cette équation à la formule des intégrales binomes

$$\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{p}{p+q}\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x)^{q-1},$$

pour reconnaître que si l'on écrit $p=h+\frac{1}{2}$, $p+q=h+2$, d'où $q=\frac{3}{2}$, on pourra employer l'expression suivante pour $U(h)$,

$$U(h) = A\int_0^1 x^{h+\frac{1}{2}-1}\,dx\,(1-x)^{\frac{3}{2}-1},$$

et par conséquent

$$T(h) = A.4^h\int_0^1 x^{h-\frac{1}{2}}\,dx\,(1-x)^{\frac{1}{2}}.$$

Cette expression suppose uniquement que $h+\frac{1}{2}$ soit une quantité positive : A est une constante arbitraire, indépendante de h. Telle est l'intégrale générale de l'équation linéaire (3), du moins sous la seule condition de $h+\frac{1}{2}>0$. Je ne m'occuperai pas en ce moment de l'intégrale relative à des valeurs de $h+\frac{1}{2}<0$; elle serait étrangère à notre sujet et exigerait l'emploi de fonctions liées aux intégrales définies, mais qui ne sont pas seulement des intégrales définies. Si la valeur $T(1)$ est donnée et égale à l'unité, on pourra déterminer A ou la constante arbitraire: pour cela on aura par l'équation (3), elle-même en posant $h=0$, $T(1)=\frac{2}{2}.T(0)$; ainsi $T(0)=T(1)=1$. Si dans la valeur de $T(h)$ on écrit $h=0$, on aura

$$1 = A\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx\,(1-x)^{\frac{1}{2}} = A\,\tfrac{1}{2}\pi, \quad \text{donc} \quad A=\frac{2}{\pi},$$

et par suite

$$T(h) = \frac{2^{2h+1}}{\pi}\int_0^1 x^{h-\frac{1}{2}}\,dx\,(1-x)^{\frac{1}{2}}.$$

[VII]. Après avoir traité sous le rapport analytique la question qui s'est offerte à nos recherches, nous terminerons par une observation sur l'étendue du problème de la triangulation d'un polygone par ses diagonales, considérée synthétiquement. Nous avons dit que

la question consiste à faire l'énumération des manières distinctes dont on peut disposer des triangles dans un certain ordre et dont la somme, pour chaque triangulation, couvre la surface entière du polygone plan et rectiligne.

Ce dénombrement des triangles ne suppose rien de particulier sur la disposition des côtés : il n'est pas nécessaire comme on l'a pensé, que le polygone soit convexe. S'il a des angles rentrans, il arrivera seulement que pour composer sa superficie avec les triangles fournis par les diagonales et les côtés du polygone, on devra retrancher de la somme d'un certain nombre des triangles, la somme des autres. On voit aussi que les mêmes énumérations s'appliquent aux polygones sphériques; elles conviennent également à toute figure tracée sur une surface continue, et qui serait formée par un contour fermé discontinu, anguleux, décrit selon une certaine loi: ce seraient si l'on veut les plus courtes distances à parcourir sur la surface, d'un sommet à l'autre du polygone, les lignes géodésiques, qui formeraient le contour ainsi que les diagonales. Tous ces cas présentent une parfaite analogie, et reçoivent l'application de la même formule. On peut même l'étendre à un périmètre rentrant dont les sommets auraient une disposition arbitraire dans l'espace et non sur un plan, et qui seraient liés consécutivement par des lignes droites. Ce polygone gauche donnerait un semblable dénombrement de triangulations contiguës, mais en ce dernier cas, il n'y aurait plus lieu de composer *la surface d'un polygone* par la somme des surfaces des triangles, ni par la différence de deux sommes.

Novembre 1838.

Solution nouvelle de cette question : *Un polygone étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales ?*

PAR E. CATALAN. *).

Soit ABCD...XYZA, un polygone convexe de $n+1$ côtés, et soit désigné par P_{n+1} le nombre total des décompositions de ce polygone.

Parmi ces décompositions, il y en a qui renferment le triangle ABC : leur nombre est P_n.

Il y en a qui renferment le triangle BCD : elles sont toutes distinctes des précédentes, et leur nombre est pareillement P_n.

A ces deux groupes, nous devons ajouter :

1°. Les décompositions du polygone de n côtés CEF...ZABC, dans lesquelles n'entre pas le triangle ABC; je désigne leur nombre par $P_{n,1}$;

2°. Les décompositions de DFG...ABCD, dans lesquelles n'entrent pas *les deux triangles consécutifs* ABC, BCD; je désigne leur nombre par $P_{n,2}$;

3°. Les décompositions de EGH...BCDE, dans lesquelles n'entrent pas *les trois triangles consécutifs* ABC, BCD, CDE; leur nombre est $P_{n,3}$;

. . . . . .

$(n-2)$°. Enfin, les décompositions du polygone de n côtés ZBCD...XYZ, dans lesquelles n'entrent pas *les* $n-2$ *triangles consécutifs* BCD, CDE,.... XYZ : leur nombre est $P_{n,n-2}$.

En réunissant ces décompositions, nous obtiendrons toutes celles

(*) Cette solution est trouvée depuis le mois de novembre dernier. Comme on en a de plus simples, je ne me serais pas décidé à la publier, si, par une coïncidence assez remarquable, M. BINET n'était arrivé, de son côté, à l'équation (A).

du polygone proposé, sans qu'il y en ait d'*omises* ou de *répétées;* donc

$$P_{n+1} = P_n + P_n + P_{n,1} + P_{n,2} + \ldots + P_{n,n-2}. \quad (1)$$

Désignons actuellement par $P_{k,l}$ le nombre des décompositions d'un polygone de k côtés, $abcd\ldots lmnpq\ldots xyz$, dans lesquelles n'entrent pas l triangles consécutifs abc, bcd, cde,... mnp.

Il est facile de s'assurer que l'on obtiendra ces décompositions si l'on ajoute, à celles qui ne contiennent pas les $l+1$ triangles abc, bcd,... mnp, npq, toutes les décompositions du polygone de $k-1$ côtés $abcd\ldots lmnq\ldots xyz$, dans lesquelles n'entrent pas les $l-1$ triangles consécutifs abc, bcd,... lmn : on a donc

$$P_{k,l} = P_{k,l+1} + P_{k-1,l-1};$$

ou, en changeant l en $l-1$:

$$P_{k,l} = P_{k,l-1} - P_{k-1,l-2}. \quad (2)$$

Pour intégrer cette équation linéaire du second ordre, aux différences finies et partielles à trois variables, on pourrait employer les méthodes de Lagrange ou celles de Laplace (*); mais on parviendra plus facilement au résultat, de la manière suivante.

Changeons l en $l-1$, $l-2$,... 4, 3, 2, et ajoutons les équations résultantes; nous obtiendrons

$$P_{k,l} = P_{k,1} - [P_{k-1,l-2} + P_{k-1,l-3} + \ldots + P_{k-1,1} + P_{k-1,0}]. \quad (3)$$

Si, dans cette nouvelle équation, on suppose successivement $l=1$, $l=2$, $l=3$,.... et si l'on observe avec un peu d'attention les résultats, on trouve qu'ils peuvent se mettre sous cette forme,

$$P_{k,1} = P_{k,1},$$
$$P_{k,2} = [P_{k,1}] - [P_{k-1,0}],$$
$$P_{k,3} = [P_{k,1} - P_{k-1,1}] - [P_{k-1,0}],$$
$$P_{k,4} = [P_{k,1} - 2P_{k-1,1}] - [P_{k-1,0} - P_{k-2,0}],$$

(*) Lagrange, *Mémoires de Berlin*, année 1775, page 183; Laplace, *Académie des Sciences, Savants étrangers*, tome VII, année 1773.

$$P_{k,5} = [P_{k,1} - 3P_{k-1,1} + P_{k-2,1}] - [P_{k-1,0} - 2P_{k-2,0}],$$
$$P_{k,6} = [P_{k,1} - 4P_{k-1,1} + 3P_{k-2,1}] - [P_{k-1,0} - 3P_{k-2,0} + P_{k-3,0}],$$
$$P_{k,7} = [P_{k,1} - 5P_{k-1,1} + 6P_{k-2,1} - 3P_{k-3,1}] - [P_{k-1,0} - 4P_{k-2,0} + 3P_{k-3,0}]. \text{ etc.}$$

Et en général :

1°. Si l est pair, et $= 2i$:

$$\left.\begin{aligned} P_{k,l} = &\left[P_k - \frac{2i-2}{1}P_{k-1,1} + \frac{2i-3}{1}\,\frac{2i-4}{2}P_{k-2,1} - \ldots \pm \frac{i}{1}P_{k-i+1,1}\right] \\ &- \left[P_{k-1,0} - \frac{2i-3}{1}P_{k-2,0} + \frac{2i-4}{1}\,\frac{2i-5}{2}P_{k-3,0} - \ldots \pm P_{k-i,0}\right]; \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

2°. Si l est impair, et $= 2i + 1$:

$$\left.\begin{aligned} P_{k,l} = &\left[P_{k,1} - \frac{2i-1}{1}P_{k-1,1} + \frac{2i-2}{1}\,\frac{2i-3}{2}P_{k-2,1} - \ldots \mp P_{k-i,1}\right] \\ &- \left[P_{k-1,0} - \frac{2i-2}{1}P_{k-2,0} + \frac{2i-3}{1}\,\frac{2i-4}{2}P_{k-3,0} - \ldots \pm iP_{k-1,0}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

On vérifie aisément que ces valeurs de $P_{k,l}$ satisfont, suivant que l est pair ou impair, à l'équation (2). D'ailleurs, elles contiennent deux fonctions arbitraires : elles sont donc bien, l'une ou l'autre, l'intégrale générale de cette équation.

Dans le problème dont il s'agit, on a $P_{k,0} = P_k$: en effet, si dans le polygone de k côtés, nous n'omettons aucun triangle, nous devons trouver toutes les décompositions. En même temps, si l'on ajoute aux décompositions qui contiennent le triangle *abc*, celles qui ne le contiennent pas, on les obtiendra toutes ; ainsi $P_{k-1} + P_{k,1} = P_k$, ou

$$P_{k,1} = P_k - P_{k-1}. \qquad (6)$$

Remplaçant donc, dans les équations (4) et (5), $P_{k,0}$ par P_k, et $P_{k,1}$ par sa valeur, il viendra, en confondant en une seule les deux formules,

$$P_{k,l} = P_k - \frac{l}{1}P_{k-1} + \frac{l-1}{1}\,\frac{l-2}{2}P_{k-2} - \ldots \qquad (7)$$

Le second membre s'arrête de lui-même.

En substituant cette valeur dans l'équation (1), on obtient

$$P_{n+1} - \frac{n}{1} P_n + \frac{n-1}{1} \frac{n-2}{2} P_{n-1} - \ldots = 0. \qquad (8)$$

Si $n = 2i$, le second membre se termine par $\mp \frac{i+1}{1} P_{i+1}$; et si $n = 2i + 1$, par $\pm P_{i+1}$. On voit que cette équation se déduit de la précédente, en y faisant $k = n + 1$ et $l = n$.

En rapprochant le mode de décomposition qui vient d'être employé, de celui qui avait été donné d'abord par *Ségner*, et de la formule trouvée probablement par *Euler*, on arrive à cette conséquence remarquable, savoir que les trois équations,

$$P_{n+1} - \frac{n}{1} P_n + \frac{n-1}{1} \frac{n-2}{2} P_{n-1} - \ldots = 0, \qquad (A)$$

$$P_{n+1} = P_n + P_{n-1}P_3 + P_{n-2}P_4 + \ldots + P_3P_{n-1} + P_n, \qquad (B)$$

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n, \qquad (C)$$

donneront pour P_{n+1} la même valeur numérique, pourvu que l'on suppose dans les deux dernières, $P_3 = 1$, et dans la première, $P_3 = 1$ et $P_4 = 2$.

Addition à la note sur une équation aux différences finies, insérée dans le volume précédent, page 508.

PAR E. CATALAN (*).

VIII.

Si l'on désigne par $C_{2n,n}$ le nombre des combinaisons de $2n$ lettres, prises n à n, on aura

$$C_{2n,n} + C_{2n-2,n-1} \times C_{2,1} + C_{2n-4,n-2} \times C_{4,2} + \ldots + C_{2n,n} = 2^{2n}. \quad (30)$$

Pour démontrer ce théorème, je considère l'équation

$$P_n + P_{n-1}P_1 + P_{n-2}P_2 + \ldots + P_1P_{n-1} + P_n = a^n; \quad (31)$$

dans laquelle a est une constante donnée, et P_n une fonction inconnue du nombre entier n, assujettie seulement à cette condition, que $P_0 = 1$.

Conformément à la méthode très élégante employée par M. *Binet* dans un cas semblable (voyez page 82), je prends la *fonction génératrice* de P_n, savoir

$$Z = 1 + P_1z + P_2z^2 + \ldots + P_nz^n + \ldots, \quad (32)$$

z étant une indéterminée.

En élevant au carré, il vient en vertu de l'équation (31),

$$Z^2 = 1 + az + a^2z^2 + a^3z^3 + \ldots + a^nz^n + \ldots. \quad (33)$$

Or, quel que soit a, on peut toujours supposer z assez petite, pour

(*) On continuera dans cette *Addition* l'ordre des n^os de la note citée.

que la série qui forme le second membre soit convergente, et égale à $\frac{1}{1-az}$. Alors nous aurons

$$Z = (1 - az)^{-\frac{1}{2}};$$

ou, en développant

$$Z = 1 + \frac{1}{2}az + \frac{1.3}{2.4}a^2z^2 + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}.a^nz^n + \ldots \quad (35)$$

Le coefficient de z^n peut facilement se mettre sous la forme,

$$\frac{1.2.3\ldots 2n}{1.2.3\ldots n \times 1.2.3\ldots n}\left(\frac{a}{4}\right)^n = \left(\frac{a}{4}\right)^n . C_{2n,n}.$$

On a donc, en comparant les équations (32) et (35):

$$P_n = \left(\frac{a}{4}\right)^n . C_{2n,n}. \quad (36)$$

Ce qui démontre le théorème énoncé.

IX.

On a $C_{2n,n} = \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1).\Gamma(n+1)}$: l'équation (30) peut par conséquent se mettre sous la forme

$$\sum_0^n \frac{\Gamma(2n-2i+1)}{\Gamma(n-i+1).\Gamma(n-i+1)} \cdot \frac{\Gamma(2i+1)}{\Gamma(i+1).\Gamma(i+1)} = 2^{2n}, \quad (37)$$

ou bien

$$\sum_0^n \frac{\Gamma(2n-2i)}{\Gamma(n-i).\Gamma(n-i+1)} \cdot \frac{\Gamma(2i)}{\Gamma(i)\Gamma(i+1)} = 2^{2n-2}.$$

Cette dernière équation se transforme facilement en

$$\sum_0^n \frac{\Gamma(n-i+\frac{1}{2})}{\Gamma(n-i+1)} \cdot \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+1)} = \pi. \quad (38)$$

On obtient ainsi une propriété des fonctions Γ, analogue à celle exprimée par l'équation (20).

X.

Prenons les deux identités :

$$\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta - \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta = \int_0^1 \theta^{n-i+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta,$$

$$\int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta - \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta = \int_0^1 \theta^{i+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta.$$

En les multipliant membre à membre, donnant à i les valeurs $0, 1, 2, \ldots n$, et ajoutant, nous obtiendrons

$$\begin{aligned}
&\sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta \\
&- \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta \\
&- \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \\
&+ \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \\
&= \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta \times \int_0^1 \theta^{i+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta.
\end{aligned}$$

Le second produit et le troisième deviennent identiques, quand on change i en $n-i$: les sommes de ces produits, prises de $i=0$ à $i=n$ seront donc égales, et nous pourrons ecrire en les confondant en une seule que nous doublerons :

$$\begin{aligned}
&\sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta \\
&- 2\sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta \\
&+ \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \\
&= \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta \times \int_0^1 \theta^{i+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta.
\end{aligned}$$

Or, l'équation (38), ainsi qu'on le voit aisément, équivaut à celle-ci :

$$\sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta = \pi^2. \qquad (39)$$

D'un autre côté, l'équation (17) donne

$$\sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta = 2\pi \int_0^1 \theta^{n+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta;$$

l'équation ci-dessus devient alors

$$\pi^2 + 2\pi \int_0^1 \theta^{n+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta - 2\sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta \times \ldots$$
$$\ldots \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta = \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta \times \int_0^1 \theta^{i+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta$$

Le second membre peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&\sum_0^n \int_0^1 \theta^{(n+2)-(i+1)-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta \times \int_0^1 \theta^{(i+1)-\frac{1}{2}}\,d\theta \\
&= \sum_1^{n'-1} \int_0^1 \theta^{n'-i'-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta \times \int_0^1 \theta^{i'-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta \\
&= \sum_0^{n'} \int_0^1 \theta^{n'-i'-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta \times \int_0^1 \theta^{i'-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta \\
&\quad - 2\int_0^1 \theta^{n'-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta \times \int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta,
\end{aligned}$$

en posant

$$n + 2 = n', \quad i + 1 = i'.$$

La première partie du nouveau second membre est égale à π^2, en vertu de (39); donc

$$\begin{aligned}
&\sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta \\
&= \pi \int_0^1 \theta^{n+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta + \pi \int_0^1 \theta^{n+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta,
\end{aligned}$$

à cause de

$$\int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \pi.$$

Enfin, en remplaçant

$$\int_0^1 \theta^{n+\frac{3}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta \text{ par } \int_0^1 \theta^{n+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta - \int_0^1 \theta^{n+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta,$$

il vient

$$\sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta = \pi \int_0^1 \theta^{n+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta, \quad (40)$$

ou bien,

$$\sum_0^n \frac{\Gamma(n-i+\frac{1}{2})}{\Gamma(n-i+2)} \cdot \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+1)} = 2\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(n+\frac{3}{2})}{\Gamma(n+2)}, \quad (41)$$

ou encore

$$\sum_0^n \frac{1.3.5\ldots(2n-2i-1)}{1.2.3\ldots(n-i+1)} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{1.2.3\ldots i} = \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{1.2.3\ldots(n+1)} : \quad (42)$$

la quantité sous le signe Σ doit être réduite à son second ou à son premier facteur, suivant que i égale o ou n.

(Novembre 1838.)

MÉMOIRE

Sur les axes des surfaces isothermes du second degré, considérés comme des fonctions de la température;

PAR G. LAMÉ,

Professeur à l'École Polytechnique.

§ I.

L'utilité des transcendantes elliptiques s'est déjà fait sentir dans plusieurs questions de Physique mathématique; et tout porte à penser que leurs fonctions périodiques joueront un rôle au moins aussi important que les sinus d'arcs variables, dans l'intégration complète des équations aux différences partielles. Il est à désirer d'après cela que l'étude de ces expressions analytiques nouvelles soit basée sur une représentation, empruntée à la Géométrie ou à la Physique, et qui soit à la fois simple et naturelle. Or tel n'est pas, je crois, le caractère de la notation adoptée aujourd'hui.

Les trois fonctions principales d'une transcendante elliptique, de première espèce, sont représentées par $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$, et la transcendante elle-même par $\varphi=\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$; θ est l'amplitude, k le module. Cette notation était commode et utile, quand il s'agissait de réduire en série les transcendantes elliptiques et leurs fonctions, afin d'obtenir leurs valeurs numériques, et de construire des tables; car pour cette recherche importante, établir un rapprochement avec les fonctions circulaires, si connues et si complétement étudiées, c'était trouver le seul moyen d'atteindre le but.

Les travaux d'Euler, de Lagrange, de Legendre, d'Abel et de

M. Jacobi, ont fait connaître les relations qui existent entre les fonctions elliptiques et celles trigonométriques ou exponentielles. Ces géomètres ont en outre donné des méthodes pour évaluer les nouvelles transcendantes. Et aujourd'hui qu'il s'agit d'utiliser cette conquête analytique, on peut se demander si la notation adoptée possède bien la simplicité et la symétrie indispensables, si elle se présente naturellement lors de l'intégration des équations aux différences partielles, le but le plus utile de toutes les fonctions transcendantes.

Or cette notation n'est ni naturelle, ni simple; car l'amplitude θ qui apparaît dans les expressions $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$, est une fonction très implicite de la transcendante qu'on veut surtout désigner, et qui est $\varphi=\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$. Cette amplitude n'est qu'un intermédiaire obligé pour rattacher la transcendante, qui se cache, aux arcs de cercle et à leurs lignes trigonométriques, qu'on est bien aise de retrouver. Cette notation n'est pas symétrique; car elle sépare complétement la fonction $\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$ des deux autres, $\sin\theta$, $\cos\theta$, quoiqu'elle doive jouer un rôle analogue, et qu'elle possède des propriétés semblables.

Enfin, cette notation se présente péniblement à l'intégration des équations différentielles, où elle ne peut être employée qu'en exigeant des transformations de variables, qui détruisent toute symétrie dans les calculs. En effet, les équations aux différences partielles que l'on peut intégrer au moyen des transcendantes elliptiques, demandent à la fois pour coordonnées leurs trois variétés; et en exprimant ces coordonnées, à l'aide des formes qui n'appartiennent qu'à une seule, on introduit des imaginaires ou des dénominateurs qui bannissent toute élégance, et rendent le calcul pénible, sinon impossible, par l'absence de ses guides naturels, la symétrie et l'homogénéité.

Abel avait compris que la notation en usage, masquait les propriétés les plus importantes des fonctions qu'elle représentait; c'est surtout en écartant cet obstacle, par l'emploi d'une notation nouvelle et plus symétrique, qu'il put signaler la double périodicité, et qu'il fit les découvertes qui le placent au rang des grands géomètres. Enrichie par ses travaux et par ceux de M. Jacobi, la théorie des transcendantes elliptiques ne doit plus avoir la marche timide et incertaine

qu'elle devait à l'ignorance de ses plus belles propriétés, et aux formes factices dont elle était revêtue. Il faut se décider maintenant à l'employer, comme celle des arcs de cercle ou des exponentielles, dans le calcul des phénomènes naturels. Mais il est indispensable, avant tout, de lui rendre la symétrie et l'homogénéité, sans lesquelles les progrès de ses applications seraient lents et imparfaits. Tel est le but que je me suis proposé d'atteindre dans ce Mémoire.

Dans mes recherches sur les surfaces isothermes, j'ai été conduit à une notation pour les transcendantes elliptiques, qui indique à l'analyse les coordonnées qu'il faut choisir, pour représenter l'équilibre et le mouvement de la chaleur, dans les corps solides terminés par des surfaces du second degré, et probablement aussi pour étudier tout autre phénomène physique dans les mêmes corps. Je vais faire voir que cette notation permet de démontrer, d'une manière élémentaire, les propriétés principales des trois variétés de transcendantes elliptiques de première espèce; et qu'elle donne des définitions physiques ou géométriques, des variables et des fonctions introduites, aussi simples, mais plus symétriques, et même plus naturelles que celles des lignes empruntées à la Trigonométrie.

Cette vérification et ces définitions, jointes à l'origine physico-mathématique de la notation dont il s'agit, lui donnent des avantages, qui, je l'espère, la feront prévaloir. D'ailleurs la solution complète d'un des cas généraux de l'équilibre de la chaleur dans un corps solide de forme ellipsoïdale, que je donnerai dans un autre Mémoire, prouvera jusqu'à l'évidence que cette notation est la seule forme que les transcendantes elliptiques puissent affecter dans les questions de physique mathématique.

§ II.

Les ellipsoïdes, au paramètre ρ plus grand que b et c, compris dans l'équation

$$(1)\qquad \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

forment un système de surfaces isothermes. C'est-à-dire que dans une enveloppe solide terminée par deux de ces surfaces, parois soumises

à des foyers constants, qui entretiennent une température uniforme sur chacune d'elles, les surfaces d'égale température seront aussi comprises dans l'équation (1). Si l'on désigne par ε l'intégrale

$$(2) \qquad \int_c^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}} = \varepsilon,$$

la température V, variable dans l'intérieur de l'enveloppe, sera représentée par la formule

$$(3) \qquad V = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\varepsilon'' - \varepsilon'};$$

ε' étant la valeur de l'intégrale (2) correspondant au paramètre ρ' de la paroi intérieure, dont la température fixe est prise pour zéro; ε'' étant la valeur de la même intégrale pour le paramètre ρ'' de la paroi extérieure, dont la température pareillement fixe est prise pour l'unité.

Si l'on suppose que l'espace solide soit infini et plein, que la température zéro soit celle de la plaque elliptique dont le paramètre $\rho = c$, et que l'unité soit celle de la sphère de rayon infini qui correspond au paramètre $\rho = \infty$, on aura simplement

$$(4) \qquad V = \frac{\varepsilon}{\varpi}, \quad \left(\varpi = \int_c^{\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}\right).$$

L'intégrale complète ϖ étant supposée connue, la transcendante ε (2), sera égale à cette constante, multipliée par la température qui existe sur l'ellipsoïde au paramètre ρ, dans l'espace solide qui vient d'être caractérisé; elle est donc proportionnelle à cette tempé-pérature, dont elle peut conséquemment partager la définition physique.

Les trois demi-axes ρ, $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, de l'ellipsoïde, sont des fonctions de la température $\frac{\varepsilon}{\varpi}$ qui appartient à cette surface; nous les représenterons par $A(\varepsilon)$, $B(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)$. Les sections principales correspondantes des ellipsoïdes isothermes ont toutes les mêmes foyers; $2b$, $2c$, $2\sqrt{c^2 - b^2}$, sont les intervalles de ces foyers pour les el-

lipses dont les axes sont 2A et 2B, 2C et 2A, 2B et 2C; nous supposerons b moindre que c, ainsi A est le demi-grand axe, B le demi-axe moyen, et C le demi-petit axe de l'ellipsoïde isotherme sur lequel la température est $\frac{1}{x}$. Telle est la définition, physique et géométrique à la fois, des trois fonctions $A(\varepsilon)$, $B(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)$.

L'équation (2) donne aisément

$$(5)\quad \frac{d\varrho}{d\varepsilon} = \sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2},\quad \frac{d\sqrt{\varrho^2-b^2}}{d\varepsilon} = \rho\sqrt{\rho^2-c^2},\quad \frac{d\sqrt{\varrho^2-c^2}}{d\varepsilon} = \varrho\sqrt{\varrho^2-b^2},$$

et, en employant la notation précédente,

$$(6)\qquad \frac{dA(\varepsilon)}{d\varepsilon} = B(\varepsilon)C(\varepsilon),\quad \frac{dB(\varepsilon)}{d\varepsilon} = C(\varepsilon)A(\varepsilon),\quad \frac{dC(\varepsilon)}{d\varepsilon} = A(\varepsilon)B(\varepsilon).$$

Ainsi la variation de chacune des trois fonctions $A(\varepsilon)$, $B(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)$, prise par rapport à la variable, est égale au produit des deux autres. On a de plus les équations

$$(7)\quad A^2(\varepsilon)-B^2(\varepsilon)=b^2,\quad A^2(\varepsilon)-C^2(\varepsilon)=c^2,\quad B^2(\varepsilon)-C^2(\varepsilon)=c^2-b^2,$$

c'est-à-dire que la différence des carrés de deux quelconques des trois fonctions $A(\varepsilon)$, $B(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)$ est constante.

§ III.

Les hyperboloïdes à une nappe, au paramètre ϱ_1 plus grand que b et moindre que c, compris dans l'équation

$$(8)\qquad \frac{x^2}{\varrho_1^2} + \frac{y^2}{\varrho_1^2-b^2} - \frac{z^2}{c^2-\varrho_1^2} = 1,$$

composent un système de surfaces isothermes : c'est-à-dire que dans une enveloppe solide indéfinie, formée par deux de ces surfaces, parois entretenues à des températures uniformes, les surfaces d'égale température seraient aussi comprises dans l'équation (8). Si l'on désigne par ε_1 l'intégrale

$$(9)\qquad \int_b^{\varrho_1} \frac{d\varrho_1}{\sqrt{\varrho_1^2-b^2}\sqrt{c^2-\varrho_1^2}} = \varepsilon_1,$$

la température V_1 dans l'intérieur de l'enveloppe sera donnée par la formule

$$(10) \qquad V_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_1'}{\varepsilon_1'' - \varepsilon_1'},$$

ε_1 et ε_1'' étant les deux valeurs de l'intégrale (9), pour les parois intérieure et extérieure, ayant pour paramètres ρ_1', ρ_1'', et sur lesquelles on suppose que les températures soient zéro, et l'unité.

Si l'on suppose que l'espace solide soit infini et plein, que la température zéro appartienne à la plaque indéfinie, à vide elliptique, dont le paramètre est $\rho_1 = b$, et que la température 1 soit celle de la plaque hyperbolique à une nappe, dont le paramètre est $\rho_1 = c$, on aura simplement

$$(11) \qquad V_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varpi_1}, \quad \left(\varpi_1 = \int_b \frac{d\rho_1}{\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}}\right).$$

L'intégrale complète ϖ_1 étant supposée connue, la transcendante ε_1 sera égale à cette constante, multipliée par la température qui existe sur l'hyperboloïde à une nappe, au paramètre ρ_1, dans l'espace solide qui vient d'être défini; elle croît donc comme cette température qui en est la définition physique.

Les trois demi-axes ρ_1, $\sqrt{\rho_1^2 - b^2}$, $\sqrt{c^2 - \rho_1^2}$, d'un hyperboloïde isotherme, desquels un seul est transverse, sont des fonctions de la température $\frac{\varepsilon_1}{\varpi_1}$, qui existe sur cette surface; nous les représenterons par $A_1(\varepsilon_1)$, $B_1(\varepsilon_1)$, $C_1(\varepsilon_1)$. Les sections principales correspondantes des hyperboloïdes (7) ont toutes les mêmes foyers; $2b$ est l'intervalle focal pour les ellipses dont les axes sont $2A_1$, $2B_1$; $2c$ et $2\sqrt{c^2 - b^2}$ sont les intervalles des foyers pour les hyperboles principales dont les axes sont $2C_1$ et $2A_1$, $2B_1$ et $2C_1$. Telle est la définition géométrique des fonctions A_1, B_1, C_1, dont nous étudierons plus loin les propriétés.

De l'équation (9), et de la notation qui précède, on déduit aisément :

$$(12) \quad \frac{dA_1(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1} = B_1(\varepsilon_1)C_1(\varepsilon_1), \quad \frac{dB_1(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1} = C_1(\varepsilon_1)A_1(\varepsilon_1), \quad \frac{dC_1(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1} = -A_1(\varepsilon_1)B_1(\varepsilon_1).$$

$$(13) \quad A_1^2(\varepsilon_1) - B_1^2(\varepsilon_1) = b^2, \quad A_1^2(\varepsilon_1) + C_1^2(\varepsilon_1) = c^2, \quad B_1^2(\varepsilon_1) + C_1^2(\varepsilon_1) = c^2 - b^2.$$

Ainsi la variation de l'une quelconque des trois fonctions A_1, B_1, C_1, par rapport à la variable, est égale au produit des deux autres, pris positivement pour A_1 et B_1, négativement pour C_1. La différence des carrés des deux fonctions A_1 et B_1 est constante; la somme des carrés de A_1 et C_1, de B_1 et C_1, est pareillement constante.

§ V.

Les hyperboloïdes à deux nappes, au paramètre ρ_2 moindre que b, compris dans l'équation

$$(14) \qquad \frac{x^2}{\rho_2^2} - \frac{y^2}{b^2 - \rho_2^2} - \frac{z^2}{c^2 - \rho_2^2} = 1,$$

forment un autre système de surfaces isothermes. Si l'on désigne par ε_2 l'intégrale

$$(15) \qquad \int_0^{\rho_2} \frac{d\rho_2}{\sqrt{b^2 - \rho_2^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2}} = \varepsilon_2,$$

la température V_2, dans l'enveloppe solide, aura pour valeur

$$(16) \qquad V_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_2'}{\varepsilon_2'' - \varepsilon_2'};$$

ε_2' et ε_2'' représentant les valeurs de l'intégrale (15) sur les deux parois, dont les températures fixes sont prises pour zéro et l'unité. Si l'on suppose que la température zéro appartienne au plan des yz, compris dans les surfaces (14) sous le paramètre $\rho_2 = 0$, et que celle prise pour unité existe sur la plaque hyperbolique à deux nappes, qui correspond à $\rho_2 = b$, on aura plus simplement :

$$(17) \qquad V_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varpi_2}, \quad \left(\varpi_2 = \int_0^b \frac{d\rho_2}{\sqrt{b^2 - \rho_2^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2}}\right).$$

La transcendante ε_2 sera proportionnelle à la température qui existe sur l'hyperboloïde au paramètre ρ_2, dans l'espace solide qui vient d'être caractérisé, et cette température pourra lui servir de défini-

tion. Les trois demi-axes ρ_2, $\sqrt{b^2-\rho_2}$, $\sqrt{c^2-\rho_2}$, d'un hyperboloïde isotherme (14), desquels les deux derniers sont transverses, sont des fonctions de la température qui existe sur cette surface; nous les représenterons par $A_2(\varepsilon_2)$, $B_2(\varepsilon_2)$, $C_2(\varepsilon_2)$, fonctions qui seront ainsi définies géométriquement.

De l'équation (15), et de la notation qui précède, on déduit facilement

$$(18)\quad \frac{dA_2(\varepsilon_2)}{d\varepsilon_2}=B_2(\varepsilon_2)C_2(\varepsilon_2),\quad \frac{dB_2(\varepsilon_2)}{d\varepsilon_2}=-C_2(\varepsilon_2)A_2(\varepsilon_2),\quad \frac{dC_2(\varepsilon_2)}{d\varepsilon_2}=-A_2(\varepsilon_2)B_2(\varepsilon_2).$$

$$(19)\quad A_2^2(\varepsilon_2)+B_2^2(\varepsilon_2)=b^2,\quad A_2^2(\varepsilon_2)+C_2^2(\varepsilon_2)=c^2,\quad B_2^2(\varepsilon_2)-C_2^2(\varepsilon_2)=c^2-b^2.$$

Ainsi la variation de l'une quelconque des trois fonctions A_2, B_2, C_2, par rapport à la variable, est égale au produit des deux autres, pris positivement pour A_2, négativement pour B_2 et C_2. La somme des carrés des fonctions A_2 et B_2, ou A_2 et C_2 est constante; la différence des carrés des fonctions B_2 et C_2 est pareillement constante.

§ V.

Il s'agit d'étudier les propriétés des fonctions A, B, C; A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; des trois transcendantes ε, ε_1, ε_2, ou celles des axes des trois genres de surfaces isothermes du second degré, sur lesquelles existent les températures $\frac{\varepsilon}{\varpi}$, $\frac{\varepsilon_1}{\varpi_1}$, $\frac{\varepsilon_2}{\varpi_2}$. Nous commencerons par le dernier genre, auquel se rattache plus directement les transcendantes elliptiques définies dans le paragraphe préliminaire, ou qui était seul représenté par l'ancienne notation. Pour cela soit pris la fraction

$$(20)\qquad z = bc\,\frac{x\sqrt{b^2-y^2}\sqrt{c^2-y^2}\pm y\sqrt{b^2-x^2}\sqrt{c^2-y^2}}{b^2c^2-x^2y^2},$$

ou, en posant

$$b^2c^2=p,\quad b^2+c^2=q,\quad \sqrt{x^4-qx^2+p}=X,\quad \sqrt{y^4-qy^2+p}=Y,$$

plus simplement

$$(20)\ bis\qquad z = bc\,\frac{xY\pm yX}{p-x^2y^2}.$$

On aura

$$b^2 - z^2 = b^2 \frac{(p - x^2y^2)^2 - c^2(x^2Y^2 + y^2X^2 \pm 2xyXY)}{(p - x^2y^2)^2};$$

mais on a

$$x^2Y^2 + y^2X^2 = (p + x^2y^2)(x^2 + y^2) - 2qx^2y^2, \quad c^2q - p = c^4,$$

il viendra donc, en développant et remplaçant XY par sa valeur :

$$b^2 - z^2 = b^2 \frac{c^4[b^4 - b^2(x^2 + y^2) + x^2y^2] + x^2y^2[c^4 - c^2(x^2 + y^2) + x^2y^2] \mp 2c^2xyXY}{(p - x^2y^2)^2},$$

et puisque les parenthèses des deux premiers termes du numérateur ne sont autres que les produits $(b^2 - x^2)(b^2 - y^2)$, $(c^2 - x^2)(c^2 - y^2)$, on conclut, directement pour $\sqrt{b^2 - z^2}$, et par symétrie pour $\sqrt{c^2 - z^2}$:

$$(21) \quad \begin{cases} \sqrt{b^2 - z^2} = b \dfrac{c^2\sqrt{b^2 - x^2}\sqrt{b^2 - y^2} \mp xy\sqrt{c^2 - x^2}\sqrt{c^2 - y^2}}{b^2c^2 - x^2y^2}, \\ \sqrt{c^2 - z^2} = c \dfrac{b^2\sqrt{c^2 - x^2}\sqrt{c^2 - y^2} \mp xy\sqrt{b^2 - x^2}\sqrt{b^2 - y^2}}{b^2c^2 - x^2y^2}. \end{cases}$$

L'équation (20 *bis*) différentiée donne

$$dz = bc \frac{(p + x^2y^2)XY \pm yx[(p - x^2y^2)(2x^2 - q) + 2y^2X^2]}{(p - x^2y^2)^2} \frac{dx}{X}$$
$$\pm bc \frac{(p + x^2y^2)XY \pm yx[(p - x^2y^2)(2y^2 - q) + 2x^2Y^2]}{(p - x^2y^2)^2} \frac{dy}{Y},$$

on remarquera que, d'après les valeurs de X et de Y, on a

$$(p - x^2y^2)(2x^2 - q) + 2y^2X^2 = (p - x^2y^2)(2y^2 - q) + 2x^2Y^2 = 2p(x^2 + y^2) - q(p + x^2y^2),$$

ce qui réduit la différentielle dz à l'expression plus simple :

$$dz = bc \frac{(p + x^2y^2)XY \mp xy[q(p + x^2y^2) - 2p(x^2 + y^2)]}{(p - x^2y^2)^2} \left(\frac{dx}{X} \pm \frac{dy}{Y}\right),$$

Or il est facile de voir que le facteur de la parenthèse du second

membre, n'est autre chose que le produit des deux valeurs (21); on a donc

$$(22)\qquad \frac{dz}{\sqrt{b^2-z^2}\,\sqrt{c^2-z^2}} = \frac{dx}{\sqrt{b^2-x^2}\,\sqrt{c^2-x^2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{b^2-y^2}\,\sqrt{c^2-y^2}}.$$

Si l'on désigne par ζ, ξ, η, les intégrales

$$(23)\quad \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{b^2-z^2}\,\sqrt{b^2-z^2}} = \zeta,\ \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{b^2-x^2}\,\sqrt{c^2-x^2}} = \xi,\ \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{b^2-y^2}\,\sqrt{c^2-y^2}} = \eta,$$

et si l'on observe que pour $x = 0$, $y = 0$, la fonction ζ (20) est aussi nulle, on pourra mettre l'intégrale de l'équation (22) sous la forme

$$(24)\qquad \zeta = \xi \pm \eta.$$

Ainsi lorsque les limites supérieures des intégrales (23) sont liées entre elles par l'équation (20), ces intégrales elles-mêmes satisfont à la relation (24). Cette propriété remarquable, découverte par Euler, est l'origine de la théorie des transcendantes elliptiques; prise comme lemme préliminaire, elle peut aussi servir à étudier les propriétés des surfaces isothermes du second degré, ou plutôt celles de leurs axes, considérés comme des fonctions de la température.

§ VI.

La notation du § IV, les relations (23) et (24), permettent d'écrire les équations (20) et (21) ainsi qu'il suit :

$$(25)\quad \begin{cases} A_2(\xi \pm \eta) = bc\,\dfrac{A_2(\xi)B_2(\eta)C_2(\eta) \pm A_2(\eta)B_2(\xi)C_2(\xi)}{b^2c^2 - A^2(\xi)A^2(\eta)}, \\ B_2(\xi \pm \eta) = b\,\dfrac{c^2B_2(\eta)B_2(\xi) \mp A_2(\eta)A_2(\xi)C_2(\eta)C_2(\xi)}{b^2c^2 - A_2^2(\xi)A^2(\eta)}, \\ C_2(\xi \pm \eta) = c\,\dfrac{b^2C_2(\eta)C_2(\xi) \pm A_2(\eta)A_2(\xi)B_2(\eta)B_2(\xi)}{b^2c^2 - A^2(\xi)A_2(\eta)}; \end{cases}$$

formules qui donnent les axes de l'hyperboloïde à deux nappes, dont la température est la somme ou la différence des températures de deux autres surfaces isothermes du même groupe (14), en fonction des axes supposés connus de ces deux dernières surfaces.

A l'aide de ces formules, et de la définition (17) de ϖ_2, on forme aisément le tableau suivant

$$(26)\quad \begin{cases} A_2(0) = 0, & B_2(0) = b, & C_2(0) = c, \\ A_2(\varpi_2) = b, & B_2(\varpi_2) = 0, & C_2(\varpi_2) = \sqrt{c^2-b^2}, \\ A_2(\pm\eta) = \pm A_2(\eta), & B_2(\pm\eta) = B_2(\eta), & C_2(\pm\eta) = C_2(\eta), \\ A_2(2\varpi_2) = 0, & B_2(2\varpi_2) = -b, & C_2(2\varpi_2) = c, \\ A_2(3\varpi_2) = -b, & B_2(3\varpi_2) = 0, & C_2(3\varpi_2) = \sqrt{c^2-b^2}, \\ A_2(4\varpi_2) = 0, & B_2(4\varpi_2) = b, & C_2(4\varpi_2) = c, \end{cases}$$

d'où l'on tire les conclusions suivantes. Les fonctions A_2, B_2, C_2, sont périodiques. A_2 est nul au commencement, au milieu, et à la fin de la période $4\varpi_2$; positif dans la première moitié, négatif dans la seconde, il atteint sa plus grande valeur absolue b, au milieu même de ces moitiés; en un mot la fonction A_2 est analogue au sinus. La fonction B_2 est analogue au cosinus, et passe par les mêmes variations de signe. Quant à la fonction C_2, elle ne change pas de signe, et a pour valeurs positives extrêmes c et $\sqrt{c^2-b^2}$; la période qui lui correspond est $2\varpi_2$. Il résulte de ces périodicités que

$$(27)\quad A_2(4i\varpi_2+\varepsilon_2) = A_2(\varepsilon_2),\ B_2(4i\varpi_2+\varepsilon_2) = B_2(\varepsilon_2),\ C_2(2i\varpi_2+\varepsilon_2) = C_2(\varepsilon_2).$$

quel que soit le nombre entier i. La troisième ligne du tableau (26), indique que la seule des trois fonctions qui change de signe avec la variable est A_2; et c'est aussi la seule qui s'évanouisse quand la variable est nulle.

§ VII.

On obtiendra les formules relatives aux axes des surfaces isothermes du § III, en faisant subir aux équations (20), (21) et (22), la transformation suivante : désignant par u l'une quelconque des trois variables z, x ou y, on posera

$$(28)\quad u = \sqrt{c^2-u'^2},\ \text{d'où}\ \sqrt{b^2-u^2} = \sqrt{u'^2-(c^2-b^2)},\ \sqrt{c^2-u^2} = u',$$

u' représentant la nouvelle variable z', x' ou y', comprise nécessairement entre $\sqrt{c^2-b^2}$ et c; d'où l'on conclut :

$$(29)\qquad \frac{du}{\sqrt{b^2-u^2}\,\sqrt{c^2-u^2}} = -\frac{du'}{\sqrt{u'^2-(c^2-b^2)}\,\sqrt{c^2-u'^2}};$$

la substitution des valeurs (28) de x, y, z, en x', y', z', étant faite dans les équations (20), (21) et (22), on fera $\sqrt{c^2-b^2}=b'$, d'où $b=\sqrt{c^2-b'^2}$, puis on supprimera les accents.

On aura ainsi

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} \sqrt{c^2-z^2} &= c\sqrt{c^2-b^2}\,\frac{y\sqrt{y^2-b^2}\sqrt{c^2-x^2}\pm x\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{c^2-y^2}}{c^2(c^2-b^2)-(c^2-x^2)(c^2-y^2)},\\ \sqrt{z^2-b^2} &= \sqrt{c^2-b^2}\,\frac{c^2\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{y^2-b^2}\mp xy\sqrt{c^2-x^2}\sqrt{c^2-y^2}}{c^2(c^2-b^2)-(c^2-x^2)(c^2-y^2)},\\ z &= c\,\frac{(c^2-b^2)xy\mp\sqrt{c^2-x^2}\sqrt{c^2-y^2}\sqrt{b^2-x^2}\sqrt{b^2-y^2}}{c^2(c^2-b^2)-(c^2-x^2)(c^2-y^2)}, \end{aligned}\right.$$

au lieu des équations (20) et (21); et celle (22) deviendra

$$(31)\qquad \frac{dz}{\sqrt{z^2-b^2}\,\sqrt{c^2-z^2}} = \frac{dx}{\sqrt{x^2-b^2}\,\sqrt{c^2-x^2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{y^2-b^2}\,\sqrt{c^2-y^2}},$$

si l'on désigne maintenant par ζ, ξ, η, les trois intégrales,

$$(32)\qquad \int_b^z \frac{dz}{\sqrt{z^2-b^2}\sqrt{c^2-z^2}}=\zeta,\ \int_b^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{c^2-x^2}}=\xi,\ \int_b^y \frac{dy}{\sqrt{y^2-b^2}\sqrt{c^2-y^2}}=\eta,$$

l'équation (31) intégrée donnera

$$\zeta = \xi \pm \eta + g,$$

g représentant une constante; or lorsqu'on fait $x=c$, $y=c$, dans la fonction z, donnée par la troisième des équations (30), on a aussi $z=c$; c'est-à-dire que les intégrales (32) atteignent en même temps leur plus grande valeur, laquelle n'est autre que ϖ_1 (11); on a donc alors pour déterminer g, l'équation $0=\pm\varpi_1+g$, d'où $g=\mp\varpi_1$, et enfin

$$(31)\qquad \zeta = \xi \pm \eta \mp \varpi_1$$

§ VIII.

La relation (31), les valeurs (32), et la notation du § III, permettent d'écrire ainsi les équations (30), en renversant leur ordre

$$(33)\quad \begin{cases} A_1(\xi \pm \varkappa \mp \varpi_1) = c\,\dfrac{(c^2-b^2)A_1(\xi)A_1(\varkappa) \mp B_1(\xi)B_1(\varkappa)C_1(\xi)C_1(\varkappa)}{c^2(c^2-b^2) - C_1(\xi)C_1^2(\varkappa)}, \\ B_1(\xi \pm \varkappa \mp \varpi_1) = \sqrt{c^2-b^2}\,\dfrac{c^2B_1(\xi)B_1(\varkappa) \mp A_1(\xi)A_1(\varkappa)C_1(\xi)C_1(\varkappa)}{c^2(c^2-b^2) - C_1^2(\xi)C_1^2(\varkappa)}, \\ C_1(\xi \pm \varkappa \mp \varpi_1) = c\sqrt{c^2-b^2}\,\dfrac{C_1(\xi)A_1(\varkappa)B_1(\varkappa) \pm C_1(\varkappa)A_1(\xi)B_1(\xi)}{c^2(c^2-b^2) - C^2(\xi)C_1^2(\varkappa)}. \end{cases}$$

Si l'on fait dans ces équations $\varkappa = 0$, d'où $A_1(\varkappa) = b$, $B_1(\varkappa) = 0$, $C_1(\varkappa) = \sqrt{c^2-b^2}$, elles donnent, en ayant égard aux relations (13) :

$$(34)\quad A_1(\xi \pm \varpi_1) = \frac{cb}{A_1(\xi)},\quad B_1(\xi \pm \varpi_1) = \pm b\,\frac{C_1(\xi)}{A_1(\xi)},\quad C_1(\xi \pm \varpi_1) = \mp c\,\frac{B_1(\xi)}{A_1(\xi)}.$$

Si à l'aide de ces formules on change, dans les équations (33), ξ en $\xi \pm \varpi_1$), et qu'on ait égard aux relations (15), pour simplifier le dénominateur, on trouve

$$(35)\quad \begin{cases} A_1(\xi \pm \varkappa) = b\,\dfrac{(c^2-b^2)A_1(\xi)A_1(\varkappa) \pm B_1(\xi)B_1(\varkappa)C_1(\xi)C_1(\varkappa)}{c^2(c^2-b^2) + B_1^2(\xi)B_1^2(\varkappa)}, \\ B_1(\xi \pm \varkappa) = b\sqrt{c^2-b^2}\,\dfrac{A_1(\varkappa)C_1(\varkappa)B_1(\xi) \pm A_1(\xi)C_1(\xi)B_1(\varkappa)}{b^2(c^2-b^2) + B_1^2(\xi)B_1^2(\varkappa)}, \\ C_1(\xi \pm \varkappa) = \sqrt{c^2-b^2}\,\dfrac{b^2C_1(\xi)C_1(\varkappa) \mp A_1(\xi)A_1(\varkappa)B_1(\xi)B_1(\varkappa)}{b^2(c^2-b^2) + B_1^2(\xi)B_1^2(\varkappa)}, \end{cases}$$

formules qui donnent les axes de l'hyperboloïde à une nappe, dont la température est la somme ou la différence des températures de deux autres surfaces isothermes du même groupe (8), en fonction des axes, supposés connus, de ces deux dernières surfaces.

Les formules (34) et (35) permettent de composer facilement le tableau suivant :

$$(36)\quad \begin{cases} A_1(0) = b, & B_1(0) = 0, & C_1(0) = \sqrt{c^2 - b^2}, \\ A_1(\varpi_1) = c, & B_1(\varpi_1) = \sqrt{c^2 - b^2}, & C_1(\varpi_1) = 0, \\ A_1(\pm n) = A_1(n), & B_1(\pm n) = \pm B_1(n), & C_1(\pm n) = C_1(n), \\ A_1(2\varpi_1) = b, & B_1(2\varpi_1) = 0, & C_1(2\varpi_1) = -\sqrt{c^2 - b^2}, \\ A_1(3\varpi_1) = c, & B_1(3\varpi_1) = -\sqrt{c^2 - b^2}, & C_1(3\varpi_1) = 0, \\ A_1(4\varpi_1) = b, & B_1(4\varpi_1) = 0, & C_1(4\varpi_1) = \sqrt{c^2 - b^2}, \end{cases}$$

D'où l'on conclut que les fonctions A_1, B_1, C_1, sont périodiques : A_1 est toujours positif, et sa valeur oscille entre c et b, b et c; la période qui lui correspond est $2\varpi_1$, celle pour B_1 et C_1 est double ou $4\varpi_1$; B_1 est analogue au sinus, B_1 au cosinus. On a enfin :

$$(37)\quad A_1(2i\varpi_1 + \varepsilon_1) = A_1(\varepsilon_1), \quad B_1(4i\varpi_1 + \varepsilon_1) = B_1(\varepsilon_1), \quad C_1(4i\varpi_1 + \varepsilon_1) = C_1(\varepsilon_1),$$

quel que soit le nombre entier i. D'après la troisième ligne du tableau (36), B_1 est la seule des trois fonctions qui change de signe avec la variable, comme c'est aussi la seule qui s'évanouisse avec elle.

§ IX.

On obtiendra les formules relatives aux axes des ellipsoïdes isothermes, en faisant subir aux équations (20), (21) et (22), la transformation suivante : u désignant l'une quelconque des variables z, x, y, on posera

$$(38)\quad u = \frac{bc}{u'}, \text{ d'où } \sqrt{b^2 - u^2} = b\,\frac{\sqrt{u'^2 - c^2}}{u'}, \quad \sqrt{c^2 - u^2} = c\,\frac{\sqrt{u' - b'}}{u'},$$

u' étant la nouvelle variable correspondante z', x', ou y', nécessairement plus grande que c; d'où l'on conclut

$$(39)\quad \frac{du}{\sqrt{b^2 - u^2}\,\sqrt{c^2 - u^2}} = -\frac{du'}{\sqrt{u'^2 - b^2}\,\sqrt{u'^2 - c^2}}.$$

On aura ainsi, au lieu des équations (20) et (21), en supprimant

les accents :

$$(40)\begin{cases} \dfrac{1}{z} = \dfrac{x\sqrt{y^2-b^2}\sqrt{y^2-c^2} \pm y\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{x^2-c^2}}{x^2y^2-b^2c^2}, \\ \dfrac{\sqrt{z^2-c^2}}{z} = \dfrac{xy\sqrt{x^2-c^2}\sqrt{y^2-c^2} \mp c^2\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{y^2-b^2}}{x^2y^2-b^2c^2}, \\ \dfrac{\sqrt{z^2-b^2}}{z} = \dfrac{xy\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{y^2-b^2} \mp b^2\sqrt{x^2-c^2}\sqrt{y^2-c^2}}{x^2y^2-b^2c^2}, \end{cases}$$

si l'on observe que l'on a identiquement,

$$x^2(y^2-b^2)(y^2-c^2)-y^2(x^2-b^2)(x^2-c^2)=(y^2-x^2)(x^2y^2-b^2c^2).$$

La première des équations (40) donne facilement :

$$(41)\qquad z = \frac{x\sqrt{y^2-b^2}\sqrt{y^2-c^2} \mp y\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{x^2-c^2}}{y^2-x^2};$$

et les deux autres équations (40), multipliées par cette dernière, donnent, en réduisant,

$$(42)\begin{cases} \sqrt{z^2-b^2} = \dfrac{y\sqrt{y^2-c^2}\sqrt{x^2-b^2} \mp x\sqrt{x^2-c^2}\sqrt{y^2-b^2}}{y^2-x^2}, \\ \sqrt{z^2-c^2} = \dfrac{y\sqrt{y^2-b^2}\sqrt{x^2-c^2} \mp y\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{y^2-c^2}}{y^2-x^2}. \end{cases}$$

Quant à l'équation (22), elle devient, par la formule de transformation (39), et après la suppression des accents,

$$(43)\quad \frac{dz}{\sqrt{z^2-b^2}\sqrt{z^2-c^2}} = \frac{dx}{\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{x^2-c^2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{y^2-b^2}\sqrt{y^2-c^2}}.$$

Si l'on désigne maintenant par ζ, ξ, $\varkappa$, les trois intégrales

$$(44)\int_c^z \frac{dz}{\sqrt{z^2-b^2}\sqrt{z^2-c^2}} = \zeta, \int_c^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{x^2-c^2}} = \xi, \int_c^y \frac{dy}{\sqrt{y^2-b^2}\sqrt{y^2-c^2}} = \varkappa,$$

l'équation (43) intégrée donnera

$$\zeta = \xi \pm \varkappa + g.$$

g étant une constante. Or lorsqu'on prend les signes supérieurs, la première des équations (40) indique que z devient infini, quand x et y sont tous les deux infinis, c'est-à-dire que les intégrales (44) atteignent ensemble leur valeur complète, laquelle n'est autre que ϖ (4); on a donc, dans ce cas, $g = -\varpi$. Lorsqu'on prend les signes inférieurs, la première équation (40) montre encore que pour $x = y$, quelle que soit d'ailleurs leur valeur commune, on a $z = \infty$, ou que $\zeta = \varpi$, quand $\xi = \eta$; on a donc alors $g = \varpi$. Donc en réunissant les deux cas

$$(45) \qquad \zeta = \xi \pm \eta \mp \varpi.$$

§ X.

La relation (45), les valeurs (44), et la notation du § II, permettent d'écrire ainsi les équations (41) et (42)

$$(46) \quad \begin{cases} A(\xi \pm \eta \mp \varpi) = \dfrac{A(\xi)\,B(\eta)\,C(\eta) \mp A(\eta)\,A(\xi)\,C(\xi)}{A^2(\eta) - A^2(\xi)}, \\ B(\xi \pm \eta \mp \varpi) = \dfrac{B(\xi)\,C(\eta)A(\eta) \mp B(\eta)\,C(\xi)\,B(\xi)}{A^2(\eta) - A^2(\xi)}, \\ C(\xi \pm \eta \mp \varpi) = \dfrac{C(\xi)\,A(\eta)\,B(\eta) \mp C(\eta)\,A(\xi)\,B(\xi)}{A^2(\eta) - A^2(\xi)}. \end{cases}$$

D'où l'on conclut, en faisant

$$\eta = 0,\ A(\eta) = c,\ B(\eta) = \sqrt{c^2 - b^2},\ C(\eta) = 0,$$

et ayant égard aux relations (7) :

$$(47)\ A(\xi \pm \varpi) = \mp c\frac{B(\xi)}{C(\xi)},\ B(\xi \pm \varpi) = \mp\sqrt{c^2 - b^2}\frac{A(\xi)}{C(\xi)},\ C(\xi \pm \varpi) = -c\frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{C(\xi)}.$$

Si, à l'aide de ces formules, on change dans les équations (46), ξ en $\xi \pm \varpi$, et que l'on simplifie le dénominateur par les relations (7), on trouve

$$(48) \quad \begin{cases} A(\xi \pm \eta) = c\dfrac{(c^2 - b^2)\,A(\xi)\,A(\eta) \pm B(\xi)\,B(\eta)\,C(\xi)\,C(\eta)}{c^2(c^2 - b^2) - C^2(\eta)\,C^2(\xi)}, \\ B(\xi \pm \eta) = \sqrt{c^2 - b^2}\,\dfrac{c^2 B(\xi)\,B(\eta) \pm A(\xi)\,A(\eta)\,C(\xi)\,C(\eta)}{c^2(c^2 - b^2) - C^2(\eta)\,C^2(\xi)}, \\ C(\xi \pm \eta) = c\sqrt{c^2 - b^2}\,\dfrac{C(\xi)\,A(\eta)\,B(\eta) \pm C(\eta)\,A(\xi)\,B(\xi)}{c^2(c^2 - b^2) - C^2(\eta)\,C^2(\xi)}, \end{cases}$$

formules qui donnent les axes de l'ellipsoïde, dont la température est la somme ou la différence des températures de deux autres ellipsoïdes du même groupe (1), en fonction des axes supposés connus de ces deux dernières surfaces isothermes.

Les formules (48), (47), conduisent au tableau suivant :

$$(49)\quad \left\{\begin{array}{l} A(0) = 0, \quad B(0) = \sqrt{c^2 - b^2}, \quad C(0) = 0, \\ A(\varpi) = B(\varpi) = C(\varpi) = \pm\infty, \\ A(\pm\varkappa) = A(\varkappa), \quad B(\pm\varkappa) = B(\varkappa), \quad C(\pm\varkappa) = \pm C(\varkappa), \\ A(2\varpi) = -c, \quad B(2\varpi) = -\sqrt{c^2 - b^2}, \quad C(2\varpi) = 0, \\ A(3\varpi) = B(3\varpi) = C(3\varpi) = \pm\infty, \\ A(4\varpi) = c, \quad B(4\varpi) = \sqrt{c^2 - b^2}, \quad C(4\varpi) = 0. \end{array}\right.$$

D'où l'on conclut que les fonctions A, B, C, sont périodiques. A et B sont analogues à l'expression $\frac{1}{\cos\varphi}$, ou à $\sec\varphi$, leur période 4ϖ correspondant à une circonférence entière; comme $\sec\varphi$, ces fonctions passent du positif au négatif par l'infini. La fonction C passe du positif au négatif à la fois par zéro et l'infini, comme $\tang\varphi$; sa période est seulement 2ϖ. On a donc

$$(50)\quad A(4i\varpi + \varepsilon) = A(\varepsilon), \quad B(4i\varpi + \varepsilon) = B(\varepsilon), \quad C(2i\varpi + \varepsilon) = C(\varepsilon),$$

quel que soit le nombre entier i. D'après la troisième ligne du tableau (49), C est la seule des trois fonctions qui change de signe avec la variable, et est aussi la seule qui s'évanouisse en même temps qu'elle.

§ XI.

Les intégrales définies ϖ, ϖ_1, ϖ_2, sont des fonctions des constantes b et c. Elles ont des relations très simples qu'il importe d'établir. Les formules de transformation (38) conduisent à l'equation différentielle (39) qui intégrée donne

$$(51)\quad \int_0^u \frac{du}{\sqrt{b^2 - u^2}\sqrt{c^2 - u^2}} + \int_0^{u'} \frac{du'}{\sqrt{u'^2 - b^2}\sqrt{c^2 - u'^2}} = g.$$

g étant une constante. Or lorsque $u' = c$, $u = b$ d'après les formules (38); c'est-à-dire que la seconde des intégrales disparaissant dans le premier membre de l'équation précédente, la première atteint sa valeur maxima, ou ϖ_1; on a donc $g = \varpi_2$. D'un autre côté, quand $u' = \infty$, $u = 0$ d'après les mêmes formules (38); c'est-à-dire que dans l'équation (51) la première intégrale s'évanouit, quand la seconde acquiert sa plus grande valeur, ou ϖ; on a donc aussi $g = \varpi$. Ainsi

$$(52)\quad \varpi_1 = \varpi = \int_0^b \frac{d\alpha}{\sqrt{b^2-\alpha^2}\sqrt{c^2-\alpha^2}} = \int_c^\infty \frac{d\beta}{\sqrt{\beta^2-b^2}\sqrt{\beta^2-c^2}}.$$

Si l'on représente par φ et φ' les deux intégrales de l'équation (51), on aura

$$\varphi + \varphi' = \varpi, \qquad \text{d'où} \qquad \varphi' = \varpi - \varphi.$$

Les formules (38) écrites en employant la notation des § II et IV, donneront donc

$$(53)\quad \begin{cases} A_1(\varphi) = \dfrac{bc}{A(\varpi-\varphi)}, & B_2(\varphi) = b\,\dfrac{C(\varpi-\varphi)}{A(\varpi-\varphi)}, & C_2(\varphi) = c\,\dfrac{B(\varpi-\varphi)}{A(\varpi-\varphi)}, \\ A(\varphi) = \dfrac{bc}{A_2(\varpi-\varphi)}, & B(\varphi) = b\,\dfrac{C_2(\varpi-\varphi)}{A_2(\varpi-\varphi)}, & C(\varphi) = c\,\dfrac{B_2(\varpi-\varphi)}{A_2(\varpi-\varphi)}, \end{cases}$$

Or les équations (47) donnent facilement

$$A(\varpi-\varphi) = c\frac{B(\varphi)}{C(\varphi)}, \quad B(\varpi-\varphi) = \sqrt{c^2-b^2}\,\frac{A(\varphi)}{C(\varphi)}, \quad C(\varpi-\varphi) = c\,\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{C(\varphi)};$$

Ces formules (53) deviennent alors

$$(54)\quad \begin{cases} A_1(\varphi) = b\,\dfrac{C(\varphi)}{B(\varphi)}, & B_1(\varphi) = \dfrac{b\sqrt{c^2-b^2}}{B(\varphi)}, & C_1(\varphi) = \sqrt{c^2-b^2}\,\dfrac{A(\varphi)}{B(\varphi)}, \\ A(\varphi) = b\,\dfrac{C_2(\varphi)}{B_2(\varphi)}, & B(\varphi) = \dfrac{b\sqrt{c^2-b^2}}{B_2(\varphi)}, & C(\varphi) = \sqrt{c^2-b^2}\,\dfrac{A_2(\varphi)}{B_2(\varphi)}, \end{cases}$$

et comme $\varpi_1 = \varpi$, ces formules permettent de déduire des axes donnés d'un ellipsoïde isotherme (1), ceux de l'hyperboloïde à deux nappes (14), qui possède la même température, ou inversement.

§ XII.

Les formules de transformation (28) conduisent à l'équation différentielle (29) qui intégrée donne

$$(55)\quad \int_0^u \frac{du}{\sqrt{b^2-u^2}\sqrt{c^2-u^2}} + \int_{\sqrt{c^2-b^2}}^{u'} \frac{du'}{\sqrt{u'^2-(c^2-b^2)}\sqrt{c^2-u'^2}} = g;$$

g étant une constante à déterminer.

La température exprimée au moyen de la seconde intégrale, se rapporte à un nouveau système de surfaces isothermes, qui diffère de celui que nous avons considéré, en ce que la constante b est remplacée par $\sqrt{c^2-b^2}$, et $\sqrt{c^2-b^2}$ par b; comme il est nécessaire, dans ce qui va suivre, d'employer simultanément ces deux systèmes, convenons d'affecter d'un accent supérieur, les constantes, les variables et les fonctions qui appartiennent au nouveau.

Cela posé, lorsque $u=b$, $u'=\sqrt{c^2-b^2}=b'$, d'après les formules (28), c'est-à-dire que la seconde intégrale, dans l'équation précédente, s'évanouit quand la première atteint sa plus grande valeur, ou ϖ_2; on a donc $g=\varpi_2$. D'un autre côté quand $u'=c$, $u=0$ d'après les mêmes formules (28); c'est-à-dire que la première intégrale disparaît lorsque la seconde acquiert sa valeur maxima, ou ϖ'_1; on a donc aussi $g=\varpi'_1$. Ainsi

$$(56)\qquad \varpi_2 = \varpi'_1 \quad \text{ou} \quad \varpi_1 = \varpi'_2.$$

Puisque $\varpi_2=\varpi$ (52), on a $\varpi'_1=\varpi$ ou $\varpi_1=\varpi'$, convenons donc de ne conserver que les deux quantités ϖ et ϖ', qui sont

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} \varpi &= \int_0^b \frac{d\alpha}{\sqrt{b^2-\alpha^2}\sqrt{c^2-\alpha^2}} = \int_{\sqrt{c^2-b^2}}^c \frac{d\beta}{\sqrt{\beta^2-(c^2-b^2)}\sqrt{c^2-\beta^2}} \\ &= \int_c^\infty \frac{d\gamma}{\sqrt{\gamma^2-b^2}\sqrt{\gamma^2-c^2}} = \varpi'_1 = \varpi_2, \\ \varpi' &= \int_0^{\sqrt{c^2-b^2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{c^2-b^2-\alpha^2}\sqrt{c^2-\alpha^2}} = \int_b^c \frac{d\beta}{\sqrt{\beta^2-b^2}\sqrt{c^2-\beta^2}} \\ &= \int_c^\infty \frac{d\gamma}{\sqrt{\gamma^2-(c^2-b^2)}\sqrt{\gamma^2-c^2}} = \varpi_1 = \varpi'_2. \end{aligned}\right.$$

Si l'on représente par φ et φ' les deux intégrales de l'équation (55), on aura $\varphi + \varphi' = \varpi$, $\varphi = \varpi - \varphi'$. Les formules (28) écrites en employant les notations des paragraphes 2 et 3, et ayant soin d'accentuer les fonctions du nouveau système, donneront donc

$$(58)\quad A_1'(\varphi') = C_2(\varpi - \varphi'),\quad B_1'(\varphi') = B_2(\varpi - \varphi'),\quad C_1'(\varphi') = A_2(\varpi - \varphi'),$$

formules qui lient les axes des deux systèmes généraux de surfaces isothermes, pour lesquels la constante b^2 a deux valeurs différentes dont la somme est c^2.

§ XIII.

Les liaisons établies par les formules (53), (54) et (58), entre les trois groupes de fonctions (A, B, C), (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2), ne sont pas les seules; lorsqu'on donne des valeurs imaginaires à leurs variables, on trouve d'autres relations qui conduisent à des conséquences remarquables.

Si dans l'intégrale (15) on pose successivement $\rho_2 = \alpha\sqrt{-1}$, $\alpha = \sqrt{\beta^2 - c^2}$, il vient

$$\varepsilon_2 = \int_0^{\rho_2} \frac{d\xi_2}{\sqrt{b^2 - \xi_2^2}\,\sqrt{c^2 - \xi_2^2}} = \sqrt{-1}\int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{b^2 + \alpha^2}\,\sqrt{c^2 + \alpha^2}}$$
$$= \sqrt{-1}\int_0^{\beta} \frac{d\beta}{\sqrt{\beta^2 - c^2}\,\sqrt{\beta^2 - (c^2 - b^2)}},$$

de là on conclut que $\beta = \sqrt{c^2 + \alpha^2} = \sqrt{c^2 - \rho_2^2} = C_2(\varepsilon_2)$, est aussi égal à $A'(-\varepsilon_2\sqrt{-1})$; on a donc $A'(\varkappa) = C_2(\varkappa\sqrt{-1})$, en représentant $-\varepsilon_2\sqrt{-1}$ par $\varkappa$, et à l'aide des équations (7), on obtient le groupe suivant :

$$(59)\quad A'(\varkappa) = C_2(\varkappa\sqrt{-1}),\quad B'(\varkappa) = B_2(\varkappa\sqrt{-1}),\quad C'(\varkappa) = \sqrt{-1}\,A_2(\varkappa\sqrt{-1}).$$

Si dans l'intégrale (9) on pose successivement $\sqrt{\rho_1^2 - b^2} = \alpha\sqrt{-1}$, $\sqrt{\alpha^2 + (c^2 - b^2)} = \beta$, il vient

$$\varepsilon_1 = \int_b^{\rho_1} \frac{d\varrho_1}{\sqrt{\varrho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}} = \sqrt{-1}\int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{b^2 - \alpha^2}\sqrt{\alpha^2 + (c^2 - b^2)}}$$
$$= \sqrt{-1}\int^{\beta} \frac{d\beta}{\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\beta^2 - (c^2 - b^2)}\sqrt{c^2 - \beta^2}};$$

Ainsi $\beta = \sqrt{c^2 + \alpha^2 - b^2} = \sqrt{c^2 - \rho_1^2} = C_1(\varepsilon_1)$, est en même temps égal à $A_1'(-\varepsilon\sqrt{-1})$, ou bien $A_1'(\eta) = C_1(\eta\sqrt{-1})$; et, à l'aide des équations (13) on obtient

$$(60) \quad A_1'(\eta) = C_1(\eta\sqrt{-1}), \quad B_1'(\eta) = \sqrt{-1}B_1(\eta\sqrt{-1}), \quad C_1'(\eta) = A_1(\eta\sqrt{-1}).$$

§ XIV.

Les formules (59) et (60) démontrent la double périodicité découverte par Abel. En effet, d'après les identités (50), dans les formules (59), les premiers membres $A'(\eta)$, $B'(\eta)$, $C'(\eta)$, ne changent pas lorsqu'on augmente η d'un multiple de $4\varpi'$ pour A' et B', de $2\varpi'$ pour C'; les seconds membres jouissent donc de la même propriété, c'est-à-dire que les fonctions A_2, B_2, C_2 ne changent pas quand on ajoute à leur variable un multiple de $2\varpi'\sqrt{-1}$ pour A_2, de $4\varpi'\sqrt{-1}$ pour B_2 et C_2.

Réciproquement, dans les mêmes formules (59), et d'après les identités (27), les seconds membres ne changeront pas si l'on retranche de $\eta\sqrt{-1}$ un multiple de 4ϖ pour A_2 et B_2, de 2ϖ pour C_2, ou si l'on y change η en $(\eta + 4n\varpi\sqrt{-1})$, $(\eta + 2n\varpi\sqrt{-1})$, n étant entier; les premiers membres doivent donc jouir de la même propriété, c'est-à-dire que les fonctions A', B', C', conservent les mêmes valeurs quand leur variable augmente d'un multiple de $2\varpi\sqrt{-1}$ pour A', de $4\varpi\sqrt{-1}$ pour B' et C'; ou enfin, les fonctions A, B, C, restent les mêmes lorsqu'on ajoute à leur variable $2n'\varpi'\sqrt{-1}$ dans A, $4n'\varpi'\sqrt{-1}$ dans B et C, n' étant un nombre entier.

Dans les formules (60), d'après les identités (37) où $\varpi_1 = \varpi'$, les premiers membres ne changeront pas si l'on augmente η d'un mul-

tiple 2ϖ pour A'_i, de 4ϖ pour B'_i et C'_i; les seconds membres jouissent donc de la même propriété, c'est-à-dire que les fonctions A_i, B_i, C_i, conservent les mêmes valeurs lorsqu'on ajoute à leur variable un multiple de $4\varpi\sqrt{-1}$ pour A_1 et B_1, de $2\varpi\sqrt{-1}$ pour C_1.

Ces conséquences, rapprochées des équations (27), (37) et (50), conduisent aux identités suivantes :

$$\left\{\begin{array}{c}
A(\eta+4n\varpi+2n'\varpi'\sqrt{-1})=A(\eta),\quad B(\eta+4n\varpi+4n'\varpi'\sqrt{-1})=B(\eta),\\
C(\eta+2n\varpi+4n'\varpi'\sqrt{-1})=C(\eta),\\
A_1(\eta+2n\varpi'+4n'\varpi\sqrt{-1})=A_1(\eta),\quad B_1(\eta+4n\varpi'+4n'\varpi\sqrt{-1})=B_1(\eta),\\
C_1(\eta+4n\varpi'+2n'\varpi\sqrt{-1})=C_1(\eta),\\
A_2(\eta+4n\varpi+2n'\varpi'\sqrt{-1})=A_2(\eta),\quad B_2(\eta+4n\varpi+4n'\varpi'\sqrt{-1})=B_2(\eta),\\
C_2(\eta+2n\varpi+4n'\varpi'\sqrt{-1})=C_2(\eta),
\end{array}\right.$$

dans lesquelles n et n' représentent deux nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs. Il y a donc, pour chacune des fonctions que nous étudions, une période réelle et une période imaginaire.

§ XV.

Parmi toutes les formules donnant les axes des sommes ou des différences de température, celles (46) sont les plus simples; car elles sont dégagées des constantes b et c, et les deux termes des fractions qui composent leurs seconds membres ont deux dimensions de moins que dans les autres. Or, on peut ramener à la même forme toutes les relations analogues de ce mémoire; cette généralisation nous paraît assez importante pour être démontrée.

Soit posé généralement, et pour simplifier :

$$(62)\quad\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{A_i(\zeta)\,B_i(\eta)\,C_i(\eta)\pm A_i(\eta)\,B_i(\xi)\,C_i(\xi)}{A_i^2(\eta)-A_i^2(\xi)}=U_i(\eta,\pm\xi),\\[2ex]
\dfrac{B_i(\xi)\,C_i(\eta)\,A_i(\eta)\pm B_i(\eta)\,C_i(\xi)\,A_i(\xi)}{A_i^2(\eta)-A_i^2(\xi)}=V_i(\eta,\pm\xi),\\[2ex]
\dfrac{C_i(\xi)\,A_i(\eta)\,B_i(\eta)\pm C_i(\eta)\,A_i(\xi)\,B_i(\xi)}{A_i^2(\eta)-A_i^2(\xi)}=W_i(\eta,\pm\xi),
\end{array}\right.$$

l'accent i devant être supprimé quand il s'agira des fonctions A, B, C, étant 1 pour celles A_1, B_1, C_1, et 2 pour celles A_2, B_2, C_2

La troisième ligne du tableau (49) permettra d'écrire ainsi les formules (46) :

$$(63)\quad \begin{cases} U(\varkappa, \mp \xi) = A[\varpi - (\varkappa \pm \xi)], \\ V(\varkappa, \mp \xi) = B[\varpi - (\varkappa \pm \xi)], \\ W(\varkappa, \mp \xi) = C[\varpi - (\varkappa \pm \xi)]. \end{cases}$$

Si l'on change b en $\sqrt{c^2 - b^2}$ dans les équations (63), ou par la convention établie, si l'on accentue ϖ et toutes les fonctions A, B, C, qui s'y trouvent, on pourra les remplacer ensuite par des fonctions A_2, B_2, C_2, d'après les relations (59), puis changer $\varkappa\sqrt{-1}$, $\xi\sqrt{-1}$ en $\varkappa$ et ξ; ce qui donnera, puisque $C_2^2(\varkappa) - C_2^2(\xi) = A_2^2(\xi) - A_2^2(\varkappa)$ [formules (19)] :

$$(64)\quad \begin{cases} U_2(\varkappa, \mp \xi) = \pm A_2[\varpi'\sqrt{-1} - (\varkappa \pm \xi)], \\ V_3(\varkappa, \mp \xi) = \sqrt{-1}\, B_2[\varpi'\sqrt{-1} - (\varkappa \pm \xi)], \\ W_2(\varkappa, \mp \xi) = \sqrt{-1}\, C_2[\varpi'\sqrt{-1} - (\varkappa \pm \xi)]. \end{cases}$$

Si l'on change b en $\sqrt{b^2 - c^2}$ dans les formules (32), conséquemment $\varpi_1 = \varpi'$ en ϖ, et qu'on accentue toutes les fonctions A_1, B_1, C_1, on pourra ensuite remplacer les fonctions A_1', B_1', C_1', par des fonctions A_1, B_1, C_1, à l'aide des relations (60), puis changer $\varkappa\sqrt{-1}$, $\xi\sqrt{-1}$, en $\varkappa$ et ξ, ce qui donnera d'abord :

$$A_1(\xi \pm \varkappa \mp \varpi\sqrt{-1}) = cb\sqrt{-1}\,\frac{A_1(\xi)B_1(\varkappa)C_1(\varkappa) \pm A_1(\varkappa)B_1(\xi)C_1(\xi)}{c^2b^2 - A_1^2(\xi)A_1^2(\varkappa)},$$

$$B_1(\xi \pm \varkappa \mp \varpi\sqrt{-1}) = b\sqrt{-1}\,\frac{c^2B_1(\xi)B_1(\varkappa) \pm A_1(\xi)A_1(\varkappa)C_1(\xi)C_1(\varkappa)}{c^2b^2 - A_1^2(\xi)A_1^2(\varkappa)},$$

$$C_1(\xi \pm \varkappa \mp \varpi\sqrt{-1}) = c\,\frac{b^2C_1(\xi)C(\varkappa) \pm A_1(\xi)A_1(\varkappa)B_1(\xi)B_1(\varkappa)}{c^2b^2 - A_1^2(\xi)A_1^2(\varkappa)},$$

et si l'on change dans ces équations $\varkappa$ en $(\varkappa - \varpi')$, en remarquant que

$$A_1(\varkappa - \varpi') = \frac{cb}{A_1(\varkappa)},\quad B_1(\varkappa - \varpi') = -b\,\frac{C_1(\varkappa)}{A_1(\varkappa)},\quad C_1(\varkappa - \varpi') = c\,\frac{B_1(\varkappa)}{A_1(\varkappa)},$$

d'après les formules (32), il vient, toute réduction faite, et en faisant

usage de la troisième ligne du tableau (36) :

$$(65)\quad \begin{cases} U_1(\eta, \mp\xi) = \sqrt{-1}\, A_1[\varpi' + \varpi\sqrt{-1} - (\eta \pm \xi)], \\ V_1(\eta, \mp\xi) = \mp\sqrt{-1}\, B_1[\varpi' + \varpi\sqrt{-1} - (\eta \pm \xi)], \\ W_1(\eta, \mp\xi) = C_1[\varpi' + \varpi\sqrt{-1} - (\eta \pm \xi)]. \end{cases}$$

§ XVI.

Les formules (63), (64), (65), comme étant les plus simples dans chaque groupe de fonctions, indiquent une sorte de complément naturel pour leurs variables, mais qui diffère de l'une à l'autre : pour les fonctions A, B, C, le complément de la variable ε serait $(\varpi - \varepsilon)$; pour A_1, B_1, C_1, le complément de ε_1 serait $(\varpi' + \varpi\sqrt{-1} - \varepsilon_1)$, enfin pour A_2, B_2, C_2, le complément de ε_2 serait $(\varpi'\sqrt{-1} - \varepsilon_2)$.

Si l'on convient de désigner respectivement ces trois compléments par $D\varepsilon$, $D_1\varepsilon_1$, $D_2\varepsilon_2$, on déduira facilement des formules précédentes, en y faisant $\xi = 0$:

$$(66)\quad \begin{cases} A(D\eta) = c\,\dfrac{B(\eta)}{C(\eta)}, \qquad B(D\eta) = \sqrt{c^2 - b^2}\,\dfrac{A(\eta)}{B(\eta)}, \quad C(D\eta) = \dfrac{c\sqrt{c^2 - b^2}}{C(\eta)}, \\ A_1(D_1\eta) = \dfrac{b}{\sqrt{-1}}\,\dfrac{C_1(\eta)}{B_1(\eta)}, \; B_1(D_1\eta) = \dfrac{b}{\sqrt{-1}}\,\dfrac{\sqrt{c^2 - b^2}}{B_1(\eta)}, \; C_1(D_1\eta) = \sqrt{c^2 - b^2}\,\dfrac{A_1(\eta)}{B_1(\eta)}, \\ A_2(D_2\eta) = \dfrac{-bc}{A_2(\eta)}, \qquad B_2(D_2\eta) = \dfrac{b}{\sqrt{-1}}\,\dfrac{C_2(\eta)}{A_2(\eta)}, \; C_2(D_2\eta) = \dfrac{c}{\sqrt{-1}}\,\dfrac{B_2(\eta)}{A_2(\eta)}, \end{cases}$$

Les formules (53) rapprochées de la dernière ligne du tableau (66) démontrent aisément le groupe suivant

$$(67)\quad A(\varepsilon) = A_2(\varpi - \varpi'\sqrt{-1} - \varepsilon), \; B(\varepsilon) = \sqrt{-1}\, B_2(\varpi - \varpi'\sqrt{-1} - \varepsilon),$$
$$C(\varepsilon) = \sqrt{-1}\, C_2(\varpi - \varpi'\sqrt{-1} - \varepsilon).$$

Les relations (58 et 59) donnent d'abord

$$A_1(\varepsilon_1) = C_2'(\varpi' - \varepsilon_1), \qquad B_1(\varepsilon_1) = B_2'(\varpi' - \varepsilon_1), \qquad C_1(\varepsilon_1) = A_2'(\varpi' - \varepsilon_1),$$

$$A_2'(\eta) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, C(-\eta\sqrt{-1}), \; B_2'(\eta) = B(-\eta\sqrt{-1}), \; C_2'(\eta) = A(-\eta\sqrt{-1}),$$

on en conclut aisément, en changeant dans la dernière ligne η en $(\varpi' - \varepsilon_1)$,

$$(68)\quad A_1(\varepsilon_1) = A(\varepsilon_1\sqrt{-1} - \varpi'\sqrt{-1}), \quad B_1(\varepsilon_1) = B(\varepsilon_1\sqrt{-1} - \varpi'\sqrt{-1}),$$
$$C_1(\varepsilon_1) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, C(\varepsilon_1\sqrt{-1} - \varpi'\sqrt{-1}).$$

Enfin un rapprochement facile des groupes (66) et (67) donne

$$(69)\quad A_1(\varepsilon_1)=A_2(\varpi-\varepsilon_1\sqrt{-1}),\ B_1(\varepsilon_1)=\sqrt{-1}\,B_2(\varpi-\varepsilon_1\sqrt{-1}),\ C_1(\varepsilon_1)=C_2(\varpi-\varepsilon_1\sqrt{-1}).$$

Ces formules (67), (68), (69) fournissent le moyen de remplacer les fonctions de l'un des trois systèmes partiels (A, B, C), (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2), par celles correspondantes d'un autre de ces systèmes.

§ XVII.

On peut écrire à la fois les trois groupes (63), (64) et (65) de la manière suivante

$$(70)\quad \begin{cases} U_i(\eta,\mp\xi)=A[D(\eta\pm\xi)], & \text{ou } =\sqrt{-1}\,A_1[D_1(\eta\pm\xi)], \text{ ou} =\pm A_2[D_2(\eta\pm\zeta)], \\ V_i(\eta,\mp\xi)=B[D(\eta\pm\xi)], & \text{ou } =\mp\sqrt{-1}\,B_1[D_1(\eta\pm\xi)], \text{ou} =\sqrt{-1}\,B_2[D_2(\eta\pm\xi)], \\ W_i(\eta,\mp\xi)=\mp C[D(\eta\pm\xi)], & \text{ou } = C_1[D_1(\eta\pm\xi)], \quad \text{ou } =\sqrt{-1}\,C_2[D_2(\eta\pm\xi)], \end{cases}$$

suivant que i manque, ou $=0$, ou $=1$. Ou bien, d'après les valeurs (66) ;

$$(71)\quad \begin{cases} U_i(\eta,\mp\xi)=c\,\dfrac{B(\eta\pm\xi)}{C(\eta\pm\xi)}, & \text{ou } = b\,\dfrac{C_1(\eta\pm\xi)}{B_1(\eta\pm\xi)}, \quad \text{ou } =\pm\dfrac{bc}{A_2(\eta\pm\xi)} \\ V_i(\eta,\mp\xi)=\sqrt{c^2-b^2}\,\dfrac{A(\eta\pm\xi)}{C(\eta\pm\xi)}, & \text{ou } =\pm\dfrac{b\sqrt{c^2-b^2}}{B_1(\eta\pm\xi)}, \quad \text{ou } = b\,\dfrac{C_2(\eta\pm\xi)}{A_2(\eta\pm\xi)}, \\ W_i(\eta,\mp\xi)=\mp\dfrac{c\sqrt{c^2-b^2}}{C(\eta\pm\xi)}, & \text{ou } =\sqrt{c^2-b^2}\,\dfrac{A_1(\eta\pm\xi)}{B_1(\eta\pm\xi)}, \quad \text{ou } = c\,\dfrac{B_2(\eta\pm\xi)}{A_2(\eta\pm\xi)}, \end{cases}$$

équations dégagées d'imaginaires et de compléments.

On déduirait facilement des équations (71), par des éliminations très simples, les formules (48), (35) et (25), lesquelles peuvent d'ailleurs s'écrire ainsi qu'il suit, à l'aide des valeurs (66) :

$$(72)\quad \begin{cases} U_i(D_i\xi,\ \pm\eta)=A(\xi\pm\eta), & \text{ou } =\sqrt{-1}\,A_1(\xi\pm\eta), \quad \text{ou } =\mp A_2(\xi\pm\eta), \\ V_i(D_i\xi,\ \pm\eta)=B(\xi\pm\eta), & \text{ou } =\pm\sqrt{-1}\,B_1(\xi\pm\eta), \quad \text{ou } =\sqrt{-1}\,B_2(\xi\pm\eta), \\ W_i(D_i\xi,\ \pm\eta)=\pm C(\xi\pm\eta), & \text{ou } = C_1(\xi\pm\eta), \quad \text{ou } =\sqrt{-1}\,C_2(\xi\pm\eta), \end{cases}$$

Comme ces dernières formules peuvent se déduire facilement de celles (70), en y changeant ξ en η, et réciproquement, puis $D_i\xi$ en ξ et réciproquement, et enfin en intervertissant les doubles signes, on

peut regarder le tableau (70) comme renfermant toutes les formules à transformer. Ce qui démontre la généralisation indiquée au commencement du § XV.

§ XVIII.

Les trois formes U, V, W, (62), peuvent être réunies sous une seule et même forme. En effet, il suit des groupes d'équations (6) et (7), (12) et (13), (18) et (19), que l'on a, dans tous les cas :

$$(73)\quad \left\{\begin{aligned} U_i(\eta, \pm\xi) &= \frac{\frac{dA_i(\eta)}{d\eta}A_i(\xi) \pm \frac{dA_i(\xi)}{d\xi}A_i(\eta)}{A_i^2(\eta) - A_i^2(\xi)},\\ V_i(\eta, \pm\xi) &= \frac{\frac{dB_i(\eta)}{d\eta}B_i(\xi) \pm \frac{dB_i(\xi)}{d\xi}B_i(\eta)}{B_i^2(\eta) - B_i^2(\xi)},\\ W_i(\eta, \pm\xi) &= \frac{\frac{dC_i(\eta)}{d\eta}C_i(\xi) \pm \frac{dC_i(\xi)}{d\xi}C_i(\eta)}{C_i^2(\eta) - C_i^2(\xi)}, \end{aligned}\right.$$

que i manque, ou $= 1$, ou $= 2$.

Il résulte de là, et du tableau (70), un caractère général, appartenant aux neuf fonctions que nous avons définies et étudiées : si F représente une quelconque de ces fonctions, η et ξ deux valeurs quelconques de la variable, on aura

$$(74)\quad \frac{\frac{dF(\eta)}{d\eta}F(\xi) \mp \frac{dF(\xi)}{d\xi}F(\eta)}{F^2(\eta) - F^2(\xi)} = \mu F[G - (\eta \pm \xi)],$$

G étant une constante, qui est, ϖ pour F prise dans le système (A, B, C); $(\varpi' + \varpi\sqrt{-1})$ pour le système (A_1, B_1, C_1); $\varpi'\sqrt{-1}$ pour celui (A_2, B_2, C_2); et μ étant, suivant les cas, 1, $\sqrt{-1}$, ∓ 1, $\mp\sqrt{-1}$, ± 1. Ce théorème résume en quelque sorte toutes les formules établies dans ce Mémoire.

MÉMOIRE

Sur l'équilibre des Températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux ;

PAR G. LAMÉ.

(Note lue à l'Académie des Sciences.)

Le Mémoire que j'ai l'honneur de présenter au jugement de l'Académie, a pour objet la recherche des lois qui régissent l'équilibre de la chaleur dans un corps, solide et homogène, terminé par une surface de forme ellipsoïdale. Je ne considère dans ce travail que dans le cas le plus simple, celui où la paroi extérieure du corps serait directement entretenue à des températures fixes, mais variables d'un point à l'autre de cette surface.

Le problème correspondant dans le cas de la sphère, se trouve compris dans la solution générale relative à cette forme de corps, que Laplace a donnée le premier, et dont M. Poisson a développé depuis de nombreuses applications. Cette solution m'a servi de guide pour découvrir celle qui concerne l'ellipsoïde à trois axes inégaux, et pour mettre à l'abri de tout doute la généralité des formules auxquelles j'ai été conduit.

Dans la sphère, la température est exprimée, d'après Laplace, par une série, dont chaque terme se compose d'une puissance du rayon, multipliée par une fonction entière et rationnelle des sinus et cosinus de la latitude et de la longitude. D'où il suit que ces deux dernières coordonnées ne sont pas séparées, c'est-à-dire qu'elles n'entrent pas chacune exclusivement, comme le rayon, dans un des facteurs du terme général de la série.

Or, on peut faire disparaître ce défaut de symétrie, en rapportant la sphère à un autre système de coordonnées : il faut prendre pour

surfaces orthogonales, conjuguées à la sphère, des cônes obliques, ou à bases elliptiques, asymptotes à des hyperboloïdes à une et à deux nappes ayant mêmes foyers. Par cette transformation, chaque terme de la série qui représente la température dans la sphère, est le produit de trois facteurs variables, contenant respectivement une seule des trois coordonnées. Chacun des deux derniers est une fonction entière et rationnelle des trois axes de l'hyperboloïde correspondant; les coefficients des différents termes de cette fonction contiennent une racine incommensurable, mais essentiellement réelle; ils sont identiquement les mêmes pour les deux facteurs, entre lesquels il y a symétrie complète.

Cette représentation nouvelle de la solution du système sphérique ne pourrait être préférée, lors des calculs numériques, à celle dont les géomètres font usage, à cause de la complication résultant de l'incommensurabilité des racines qui particularisent chaque terme, et de la nécessité où l'on serait de la faire disparaître, en sommant, par la méthode des fonctions symétriques, les termes correspondants aux racines d'une même équation. Mais cette solution transformée, qui conduit à une expression analytique des températures dans la sphère, ni plus ni moins générale que celle donnée par Laplace, a sur cette dernière le grand avantage d'indiquer de suite comment doit se composer la solution qui concerne l'ellipsoïde à trois axes inégaux.

En effet, le système sphérique, rapporté aux cônes obliques, est évidemment la limite du système ellipsoïdal, rapporté à trois surfaces orthogonales du second ordre, ayant mêmes foyers; d'où il suit que pour passer du premier au second, il n'y a rien à changer aux deux derniers facteurs du terme général de la série qui représente la température, puisque les coordonnées qu'ils contiennent sont identiquement les mêmes dans les deux cas; toutes les modifications doivent se concentrer sur le premier facteur, qui de fonction du rayon de la sphère, doit devenir une fonction des axes de l'ellipsoïde isotherme, conjugué aux deux autres surfaces coordonnées.

Ou autrement : si l'on connaissait la loi des températures dans l'ellipsoïde rapporté à ses coordonnées naturelles, elle comprendrait nécessairement la loi des températures dans la sphère, laquelle ap-

partient à tout système ellipsoïdal; il suffirait en effet, pour déduire la seconde de la première, d'exprimer que les axes de la paroi sont infiniment plus grands que les distances de ses foyers géométriques; or cette transformation pourrait toujours s'effectuer de manière à ne rien changer aux fonctions des axes des deux autres surfaces coordonnées. On devrait donc retomber sur la solution du système sphérique rapporté à des cônes obliques.

D'après cela, on doit pouvoir trouver l'expression de la température dans l'ellipsoïde, en complétant, par une méthode analogue à celle de la variation des constantes arbitraires, le facteur de chaque terme de la série relative à la sphère, qui ne contient que le rayon. Or, pour le cas uniquement traité dans ce Mémoire, ce facteur est une puissance, dont l'exposant est entier et positif; d'où il suit que la méthode des variations dont il s'agit, ne pourra que le transformer en une fonction entière et rationnelle des axes de l'ellipsoïde, et que la série, ainsi complétée dans chacun de ses termes, sera tout aussi générale pour l'ellipsoïde que la solution de Laplace pour la sphère.

Telles sont les considérations qui m'ont conduit à la loi des températures dans l'ellipsoïde à trois axes inégaux, quand sa surface est directement entretenue à des températures fixes, mais variables d'un point à l'autre de cette surface.

Cette loi est exprimée par une série de termes, vérifiant tous séparément l'équation aux différences partielles qui exprime l'équilibre de la chaleur dans un corps solide homogène. Chaque terme est le produit de trois facteurs, lesquels sont trois fonctions rationnelles et entières, ayant même forme et mêmes coefficients, la première des axes de l'ellipsoïde, la seconde des axes de l'hyperboloïde à une nappe, et la troisième des axes de l'hyperboloïde à deux nappes. Les constantes de ces trois fonctions ou de ces trois polynomes, contiennent implicitement la racine incommensurable d'une équation, laquelle est la même pour tous les termes où ces polynomes ont le même degré, et qui change d'un degré à l'autre.

La méthode simple et féconde, par laquelle M. Poisson a démontré la réalité de toutes les racines des équations transcendantes, qui se sont présentées dans la théorie analytique de la chaleur, peut aussi

servir à établir la réalité des racines provenant des équations, en nombre indéfini, mais de degrés limités, qui particularisent les divers groupes de termes dans la série dont il s'agit. Le coefficient général de chaque terme est déterminé, à l'aide de la fonction donnée des températures entretenues sur la surface de l'ellipsoïde, par le quotient de deux intégrales définies, en employant une méthode d'élimination analogue à celle si souvent retrouvée dans toutes les autres recherches de physique mathématique. Enfin la forme même que cette méthode donne aux coefficients des différents termes, démontre que la série qu'ils composent est convergente.

Quand il s'agira d'évaluer en nombre la température d'un point déterminé, cette expression générale de la loi des températures dans l'ellipsoïde, exigera sans doute de plus longs calculs que celle qui correspond au système sphérique; mais elle a sur cette dernière, l'incontestable avantage d'une symétrie parfaite dans la distribution des coordonnées.

Dans cette solution, la fonction des températures sur la paroi, se trouve développée en une série de termes contenant, en facteurs polynomes, les axes des surfaces conjuguées à l'ellipsoïde, et qui le coupent suivant ses lignes de courbure. Or, on peut prendre pour nouveaux paramètres de ces surfaces, les transcendantes elliptiques de première espèce, et de variétés différentes, qui exprimeraient la température dans chacun de ces systèmes coordonnés, pris isolément comme système de surfaces isothermes; et l'on est conduit par cette transformation au développement d'une fonction de deux variables, en une série nouvelle des fonctions étudiées par Abel, et dont il a démontré la double périodicité. Ce genre de développement paraît être le seul avec lequel il soit possible d'aborder le système ellipsoïdal à axes inégaux, dans les cas généraux des diverses questions de physique mathématique.

Les intégrales définies qui composent les coefficients des différents termes de la série exprimant la température dans l'ellipsoïde, sont donc réductibles en transcendantes elliptiques. On pourrait croire d'après cela qu'il fallût toujours avoir recours à des tables, encore fort incomplètes, pour réduire en nombre une valeur particulière de la fonction totale. Mais j'ai fait voir que cette complication n'est qu'ap-

parente, et que les intégrales définies renfermant des fonctions elliptiques, dans le cas dont il s'agit ici, ne contiennent en dernier résultat d'autre nombre transcendant, que le rapport du diamètre à la circonférence du cercle, lequel doit même disparaître comme facteur commun aux deux termes de la fraction qui exprime le coefficient général.

Ainsi la solution à laquelle j'ai été conduit n'est pas seulement une représentation symbolique : elle ne nécessite par elle-même l'emploi d'aucune table, pas même de celle des sinus. Car si les fonctions elliptiques jouent un rôle dans sa composition, tous les résultats numériques que l'on en déduira seront complétement dégagés de tout nombre transcendant, à moins qu'ils ne soient introduits par la loi donnée des températures de la surface.

Il importait de considérer séparément le cas d'un ellipsoïde soit aplati, soit allongé. La solution générale que je viens de décrire, indique par des transformations faciles, la forme de la série qui doit exprimer la température dans ce nouveau corps, et il serait possible de l'en déduire complétement, en faisant un usage convenable de la méthode qui sert à trouver les vraies valeurs des fractions, se présentant sous une expression indéterminée. Mais après avoir ainsi reconnu la forme, essentielle et suffisante, de la nouvelle solution, j'ai cru préférable de la compléter par des recherches directes.

La loi des températures dans l'ellipsoïde de révolution, est définitivement exprimée par une série de termes, desquels chacun est le produit de trois facteurs; l'un est le cosinus ou le sinus d'un multiple de l'angle azimutal, qui particularise les plans méridiens; les deux autres facteurs sont respectivement des fonctions entières et rationnelles du diamètre équatorial, et de l'axe polaire des autres surfaces coordonnées, lesquelles sont des ellipsoïdes et des hyperboloïdes de révolution autour du même axe, isothermes et orthogonaux. Les constantes de ces deux fonctions, ou plutôt de ces deux polynomes sont totalement dégagées de tout nombre incommensurable. Enfin les coefficients des différents termes sont déterminés, à l'aide des températures données de la surface, par des intégrales définies qu'il est facile de calculer.

Cette solution prend une autre forme, quand on choisit pour paramètres des surfaces conjuguées, les transcendantes qui exprime-

raient la température dans chaque système coordonné, pris isolément comme système de surfaces isothermes. Les axes des hyperboloïdes de révolution se transforment alors en exponentielles toujours réelles. Quant à ceux des ellipsoïdes, ils deviennent pareillement des exponentielles réelles, si le sphéroïde est allongé; mais ils prennent la forme de la tangente et de la sécante d'un arc de cercle, si l'ellipsoïde est aplati, c'est-à-dire si l'axe polaire est moindre que le diamètre de son équateur. Dans les deux cas, la fonction introduite se présente développée en une série de sinus ou de cosinus pour l'une des variables, et d'exponentielles réelles pour l'autre.

Lorsque les températures de la surface sont distribuées de la même manière sur tous les méridiens, la série qui donne les températures intérieures est indépendante de la longitude; et la fonction donnée, qui n'est plus qu'à une seule variable, est introduite par son développement en une série d'exponentielles réelles.

Telle est la solution complète d'un des problèmes généraux de la théorie de la chaleur, pour les corps solides homogènes de forme ellipsoïdale; les autres questions exigeront des recherches analytiques d'un ordre plus élevé. Toutefois, l'état variable des températures dans l'ellipsoïde, lorsqu'il s'échauffe ou se refroidit par son contact avec des sources de chaleur ou de froid, doit pouvoir se déduire de la loi connue du mouvement de la chaleur dans la sphère, par des considérations semblables à celles qui m'ont conduit au cas plus simple de l'équilibre; mais cette nouvelle solution exige l'emploi de fonctions plus compliquées, qu'il est nécessaire d'étudier, avant de les introduire dans les applications.

Les deux cas dans lesquels l'ellipsoïde conserverait ou perdrait sa chaleur par le rayonnement de sa surface, sont totalement distincts de ceux qui précèdent; ils présentent une difficulté d'un ordre nouveau, qui tient à ce que l'équation différentielle dite de la surface, se trouve renfermer essentiellement les trois coordonnées à la fois; tandis que dans la sphère, le cylindre droit, et quelques polyèdres, seuls corps complétement traités jusqu'ici, cette équation de la surface ne contient, pour chaque terme simple de la température, qu'une seule coordonnée.

Au reste, la difficulté dont il s'agit est absolument la même que

celle qui naîtrait de l'introduction d'un pouvoir rayonnant variable, sur la surface de la sphère; question importante dont la solution est encore inconnue. La seule tentative que l'on ait faite avec succès, dans cette direction nouvelle, est due à M. Liouville, qui a traité, pour le prisme rectangulaire, le cas d'un pouvoir rayonnant variable; mais la méthode trouvée par ce géomètre, ne peut être appliquée lorsque le pouvoir rayonnant est une fonction irrationnelle, et c'est précisément ce qui a lieu pour l'ellipsoïde.

Les recherches dont je viens d'exposer les résultats, malgré les restrictions apportées à la question de physique mathématique que je m'étais proposé de résoudre, composent un travail fort étendu : car, outre les divers mémoires que j'ai présentés dans ces dernières années, et dont l'objet principal était de lever les difficultés préliminaires de la question dont il s'agit, je suis obligé de diviser le travail actuel en trois mémoires différents. Celui que je présente aujourd'hui contient l'exposé de la solution générale pour l'ellipsoïde à trois axes inégaux; le second, dont la réduction n'est pas encore terminée, contiendra la solution relative à l'ellipsoïde de révolution, traitée directement; enfin le troisième aura pour objet spécial de simplifier les applications de ces deux solutions.

Cette grande étendue, dans un travail destiné à résoudre une question de physique mathématique dont l'énoncé est si simple, peut paraître surprenante. Mais tout étonnement cesse, si l'on considère qu'il s'agissait de traiter un corps pour lequel les procédés d'analyse, employés jusqu'ici, étaient totalement impuissants : car, ni les coordonnées du prisme rectangle, ni celles de la sphère, les seules dont les géomètres aient encore fait usage en physique mathématique, ne pouvaient aborder l'ellipsoïde. Il fallait donc découvrir un système coordonné, autre que les plans, les rayons vecteurs et les angles, qui permît de traiter le nouveau corps avec tout autant de facilité que la sphère ou le cylindre droit. Ce nouvel instrument découvert, il était nécessaire d'étudier ses propriétés, avant de penser à l'appliquer. Et même quand cette étude préliminaire m'avait en quelque sorte familiarisé avec les nouvelles coordonnées, je rencontrais à chaque pas des formes imprévues dont l'interprétation n'était pas sans difficulté.

J'ose espérer que les géomètres ne verront pas sans intérêt les développements en séries nouvelles, qui caractérisent principalement la solution que j'ai trouvée, et qui donnent un premier exemple de l'utilité des fonctions périodiques, si bien étudiées par Abel et par M. Jacobi.

§ I.

La théorie de la chaleur, limitée à la recherche des lois qui régissent les températures dans les corps solides homogènes, se réduit à un petit nombre de questions générales, qui se traduisent en autant de problèmes d'analyse, quand on considère un corps de forme particulière. Je me propose de résoudre une de ces questions dans le cas de l'ellipsoïde à axes inégaux. La surface de ce corps est en contact avec des sources de chaleur ou de froid, qui diffèrent d'un point à l'autre, et il s'agit de chercher la loi des températures dans l'intérieur de l'ellipsoïde, lorsque leur équilibre est établi.

Voici le problème d'analyse correspondant : la surface de l'ellipsoïde ayant pour équation

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\varrho_0^2} + \frac{y^2}{\varrho_0^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho_0^2 - c^2} = 1,$$

il s'agit de trouver une fonction V, qui vérifie l'équation aux différences partielles,

$$(2) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0,$$

et qui, exprimant la température, prenne des valeurs données pour les points de la surface, ou pour les différents groupes de valeurs de x, y, z, satisfaisant à l'équation (1).

Cet énoncé devient plus explicite et plus clair, quand on choisit un système de coordonnées tel, que sur la surface de l'ellipsoïde, une des coordonnées soit constante. Il faut alors rapporter l'espace au sys-

tème des surfaces du second degré représentées par les équations

$$(3)\quad \frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1,\quad \frac{x^2}{\rho_1^2}+\frac{y^2}{\rho_1^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\rho_1^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{\rho_2^2}-\frac{y^2}{b^2-\rho_2^2}-\frac{z^2}{c^2-\rho_2^2}=1,$$

dans lesquelles la constante b est moindre que c, le paramètre ρ plus grand que b et c, ρ_1 compris entre b et c, enfin ρ_2 plus petit que b. La première des équations (3) représente des ellipsoïdes, la seconde des hyperboloïdes à une nappe, et la troisième des hyperboloïdes à deux nappes. Ces surfaces sont orthogonales, et leurs sections principales ont toutes les mêmes foyers géométriques.

Les paramètres ρ, ρ_1, ρ_2, pris pour nouvelles coordonnées, sont liés aux anciennes par les équations (3), qui donnent

$$(4)\quad bcx=\rho\rho_1\rho_2,\quad b\sqrt{c^2-b^2}.y=\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{b^2-\rho_2^2},$$
$$c\sqrt{c^2-b^2}.z=\sqrt{\rho^2-c^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}.$$

et l'on a, comme il est aisé de le vérifier,

$$\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_2}{dx}+\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_2}{dy}+\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_2}{dz}=0,\ \frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\rho}{dx}+\frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\rho}{dy}+\frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\rho}{dz}=0,\ \frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dx}+\frac{d\rho}{dy}\frac{d\rho_1}{dy}+\frac{d\rho}{dz}\frac{d\rho_1}{dz}=0.$$

Si l'on désigne par h, h_1, h_2, l'expression différentielle..... $\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}$, lorsque F est successivement égal à ρ, ρ_1, ρ_2, le calcul donne

$$(5)\quad h=\frac{\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}}{\sqrt{\rho^2-\rho_1^2}\sqrt{\rho^2-\rho_2^2}},\quad h_1=\frac{\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}}{\sqrt{\rho_1^2-\rho_2^2}\sqrt{\rho_1^2-\rho_2^2}},\quad h_2=\frac{\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{\rho_1^2-\rho_2^2}}{\sqrt{\rho^2-\rho_2^2}\sqrt{\rho_1^2-\rho_2^2}}.$$

Enfin, si l'on désigne généralement par $\Delta_2 F$ l'expression différentielle $\left(\frac{d^2F}{dx^2}+\frac{d^2F}{dy^2}+\frac{d^2F}{d^2z}\right)$, on trouve

$$(6)\quad \Delta_2\rho=\frac{d.\log\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}}{d\rho}h^2,\quad \Delta_2\rho_1=\frac{d.\log\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}}{d\rho_1}h_1^2,$$
$$\Delta_2\rho_2=\frac{d.\log\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}}{d\rho_2}h_2^2.$$

§ II.

Pour simplifier les équations différentielles, transformées en ρ, ρ_1, ρ_2, à l'aide des formules (5) et (6), il convient d'introduire leurs fonctions transcendantes

$$(7)\quad \varepsilon = \int_0^{\rho} \frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}},\quad \varepsilon_1 = \int_b^{\rho_1} \frac{d\varrho_1}{\sqrt{\varrho_1^2-b^2}\sqrt{c^2-\varrho_1^2}},\quad \varepsilon_2 = \int_0^{\rho_2} \frac{d\varrho_2}{\sqrt{b^2-\varrho_2^2}\sqrt{c^2-\varrho_2^2}},$$

qui sont telles que $\Delta_2\varepsilon = 0$, $\Delta_2\varepsilon_1 = 0$, $\Delta_2\varepsilon_2 = 0$, et qu'en outre

$$\frac{d\varepsilon_1}{dx}\frac{d\varepsilon_2}{dx} + \frac{d\varepsilon_1}{dy}\frac{d\varepsilon_2}{dy} + \frac{d\varepsilon_1}{dz}\frac{d\varepsilon_2}{dz} = 0,\quad \frac{d\varepsilon_2}{dx}\frac{d\varepsilon}{dx} + \frac{d\varepsilon_2}{dy}\frac{d\varepsilon}{dy} + \frac{d\varepsilon_2}{dz}\frac{d\varepsilon}{dz} = 0,\quad \frac{d\varepsilon}{dx}\frac{d\varepsilon_1}{dx} + \frac{d\varepsilon}{dy}\frac{d\varepsilon_1}{dy} + \frac{d\varepsilon}{dz}\frac{d\varepsilon_1}{dz} = 0.$$

L'équation (2) devient alors, par un calcul facile à retrouver,

$$(8)\qquad (\rho_1^2 - \rho_2^2)\frac{dV}{d\varepsilon^2} + (\rho^2 - \rho_2^2)\frac{d^2V}{d\varepsilon_1^2} + (\rho^2 - \rho_1^2)\frac{d^2V}{d\varepsilon_2^2} = 0.$$

La température V est une fonction de ε, ε_1, ε_2, et ρ, ρ_1, ρ_2 représentent les fonctions de ces variables qu'on déduirait des équations (7). Ou bien V est fonction de ρ, ρ_1, ρ_2, et ε, ε_1, ε_2, sont les transcendantes (7). La loi des températures de la surface de l'ellipsoïde, dont le paramètre est $\rho = \rho_0$, est alors donnée par une équation de la forme $V_0 = \varphi(\rho_1, \rho_2)$, puisque ρ_1 et ρ_2 sont les seules coordonnées qui varient sur cette surface.

Le problème d'analyse, qu'il s'agit de résoudre, consiste donc à trouver une fonction V de ρ, ρ_1, ρ_2, qui, vérifiant l'équation (8), se réduise à $\varphi(\rho_1, \rho_2)$ quand $\rho = \rho_0$.

On parvient à la solution cherchée, en prenant pour V une série de termes différents qui vérifient chacun séparément l'équation (8). Lorsque $\rho = \rho_0$, cette série n'est plus qu'à deux variables, et l'on détermine ces coefficients, dont le nombre est infini, de telle sorte qu'elle devienne un des développements possibles de la fonction φ. La première recherche à faire, pour procéder à cette solution générale, consiste à découvrir la forme essentielle et suffisante, que doit

avoir le terme général de la série V. Il importe pour cela de considérer d'abord le cas où l'ellipsoïde se réduirait à une sphère.

§ III.

La solution de la question qui nous occupe, dans le cas du système sphérique, est connue depuis long-temps, et l'on ne saurait émettre aucun doute sur sa généralité. Les variables r, θ et ψ, désignant le rayon vecteur, la latitude et la longitude d'un point intérieur de la sphère, on a $x = r\cos\psi\cos\theta$, $y = r\sin\psi\cos\theta$, $z = r\sin\theta$; et l'équation (2), transformée en coordonnées polaires, est

$$(9)\qquad \frac{dr^2\frac{dV}{dr}}{dr}\cos^2\theta + \frac{d\frac{dV}{d\theta}\cos\theta}{d\theta}\cos\theta + \frac{d^2V}{d\psi^2} = 0.$$

La fonction V, qui, vérifiant l'équation (9), doit se réduire à $\varphi(\psi, \theta)$ pour $r = r_0$, est donnée par une série de la forme

$$(10)\qquad V = \Sigma U_n r^n;$$

n étant un nombre entier et positif, et U_n une fonction entière et rationnelle de $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\sin\psi$, $\cos\psi$, qui satisfait à l'équation

$$(11)\qquad n(n+1)U_n\cos^2\theta + \frac{d\frac{dU_n}{d\theta}\cos\theta}{d\theta}\cos\theta + \frac{d^2U_n}{d\psi^2} = 0,$$

et qui renferme des constantes arbitraires, dont le nombre est, dans le cas le plus général, $2n+1$.

Si l'on désigne par θ' et ψ', deux valeurs particulières de θ et ψ, et que l'on pose

$$(12)\qquad \mu = \sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta'\cos(\psi - \psi'),$$

μ sera le cosinus de l'angle formé par le rayon vecteur r avec l'axe particulier que déterminent les angles θ' et ψ'. Soit ensuite représenté par u_n, la fonction entière et rationnelle de μ qui multiplie ζ^n,

dans le développement de $\frac{1}{\sqrt{1-2\mu\zeta+\zeta^2}}$ suivant les puissances ascendantes de ζ; on sait que ce polynome u_n, sera du degré n en μ; qu'il ne contiendra que des puissances paires de μ, si n est pair, et seulement des puissances impaires de la même variable, si n est impair. On pourra égaler U_n à une somme de termes de la forme SAu_n, les coefficients θ', ψ, A, variant d'un terme à l'autre. On composera ainsi la valeur la plus générale de U_n dans la série V(10), adoptée par les géomètres comme devant exprimer la loi des températures pour le système sphérique, dans la question physique que nous considérons exclusivement.

§ IV.

Or, il est à remarquer que la loi de formation de la fonction U_n, qui vient d'être exposée, n'impose pas la condition de se servir des coordonnées θ et ψ. D'après cette loi, U_n est la somme d'un certain nombre de polynomes, de même forme et de même degré; la variable μ, particulière à chacun d'eux, représente le cosinus de l'angle que le rayon vecteur r fait avec un axe fixe arbitraire, mené par le centre du système sphérique; et cet axe est seul différent pour chaque polynome. Il suit de là que la valeur de U_n ne sera nullement changée, si l'on adopte tout autre système de coordonnées, que celui des latitudes et des longitudes, pour exprimer les cosinus μ, qui particularisent les polynomes u_n.

Conservant le rayon vecteur r, on peut prendre pour les deux autres coordonnées, les paramètres ρ_1 et ρ_2 des surfaces représentées par les équations

$$(13)\quad \frac{x^2}{\rho_1^2}+\frac{y^2}{\rho_1^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\rho_1^2}=0,\quad \frac{x^2}{\rho_2^2}-\frac{y^2}{b^2-\rho_2^2}-\frac{z^2}{c^2-\rho_2^2}=0,$$

dans lesquelles b est moindre que c, le paramètre ρ_1 compris entre b et c, et ρ_2 plus petit que b. Ces surfaces sont des cônes obliques, ou à bases elliptiques, asymptotes à des hyperboloïdes à une et à deux nappes, ayant mêmes foyers. Les nouvelles coordonnées r,

ρ_1, ρ_2, sont liées à celles x, y, z, par les équations (13), et par celle-ci $(x^2+y^2+z^2=r^2)$; d'où l'on déduit facilement,

$$(14)\qquad bcx = r\rho_1\rho_2, \quad b\sqrt{c^2-b^2}\,.\,y = r\sqrt{\rho_1^2-b^2}\,\sqrt{b^2-\rho_2^2},$$
$$c\sqrt{c^2-b^2}\,.\,z = r\sqrt{c^2-\rho_1^2}\,\sqrt{c^2-\rho_2^2}.$$

Si l'on désigne alors par ρ_1' et ρ_2' les paramètres des deux cônes (13), qui se coupent suivant l'axe que déterminaient précédemment les angles θ' et ψ', on aura évidemment

$$(15)\qquad \mu = \frac{\varrho_1'\varrho_2'}{bc}\cdot\frac{\varrho_1\varrho_2}{bc} + \frac{\sqrt{\varrho_1'^2-b^2}\,\sqrt{b^2-\varrho_2'^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}}\cdot\frac{\sqrt{\varrho_1^2-b^2}\,\sqrt{b^2-\varrho_2^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}}$$
$$+\frac{\sqrt{c^2-\varrho_1'^2}\,\sqrt{c^2-\varrho_2'^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}}\cdot\frac{\sqrt{c^2-\varrho_1^2}\,\sqrt{c^2-\varrho_2^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}},$$

pour exprimer le cosinus μ (12), en fonction des nouvelles coordonnées; le poylnome partiel u_n qui ne contient que des puissances entières et positives de μ, sera alors transformé en une fonction entière et rationnelle de ρ_1, $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, ρ_2, $\sqrt{b^2-\rho_2^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_2^2}$, laquelle sera nécessairement symétrique par rapport à ces variables; c'est-à-dire que chaque terme de cette fonction contiendra comme facteurs les mêmes puissances de ρ_1 et ρ_2, ou de $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$ et $\sqrt{b^2-\rho_2^2}$, ou de $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$ et $\sqrt{c^2-\rho_2^2}$. Et la fonction U_n transformée, sera pareillement entière, rationnelle par rapport aux mêmes variables, et jouira de la même symétrie.

§ V.

Dans le nouveau système de coordonnées, il convient d'introduire, pour simplifier, les fonctions transcendantes

$$(16)\qquad \varepsilon_1 = \int_b^{\rho_1}\frac{d\varrho_1}{\sqrt{\varrho_1^2-b^2}\,\sqrt{c^2-\varrho_1^2}}, \qquad \varepsilon_2 = \int_0^{\rho_2}\frac{d\varrho_2}{\sqrt{b^2-\varrho_2^2}\,\sqrt{c^2-\varrho_2^2}}.$$

L'équation générale (2) devient alors

$$(17)\qquad (\rho_1^2-\rho_2^2)\frac{dr^2\frac{dV}{dr}}{dr} + \frac{d^2V}{d\varepsilon_1^2} + \frac{d^2V}{d\varepsilon_2^2} = 0.$$

Si la série (10) contient la solution de la question posée pour la sphère, lorsque U_n est exprimé en θ et ψ, elle conservera évidemment cette propriété, quand U_n, déduit du même mode de formation, sera exprimé en ρ_1 et ρ_2; cette fonction U_n satisfera d'ailleurs à l'équation

$$(18) \qquad n(n+1)U_n(\rho_1^2-\rho_2^2)+\frac{d^2U_n}{d\rho_1^2}+\frac{d^2U_n}{d\rho_2^2}=0,$$

laquelle n'est autre que celle (11) transformée, comme l'équation (17) est la transformation de celle (9).

Ainsi la loi des températures dans une sphère solide et homogène, dont la surface est en contact avec des sources constantes de chaleur et de froid, est nécessairement donnée par une série de la forme (10); U_n étant une fonction entière et rationnelle de ρ_1, $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, et de ρ_2, $\sqrt{b^2-\rho_2^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_2^2}$, symétrique en ρ_1 et ρ_2, en $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$ et $\sqrt{b^2-\rho_2^2}$, en $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$ et $\sqrt{c^2-\rho_2^2}$, qui contient au plus $2n+1$ constantes arbitraires, et qui vérifie l'équation différentielle (18).

Nous allons démontrer qu'il est possible de trouver une fonction, jouissant de la symétrie indiquée, et qui soit de la forme

$$(19) \qquad U_n = SAE_1E_2;$$

E_1 et E_2 étant respectivement fonction de ρ_1 seul, et de ρ_2 seul; le produit E_1E_2 vérifiant séparément l'équation différentielle (18), et le nombre des produits différents qui jouissent de cette propriété étant $2n+1$. D'où il suivra que les coefficients A, dans la somme précédente, pouvant être au nombre de $2n+1$, et totalement indépendants les uns des autres, cette somme (19) pourra être prise pour la valeur la plus générale de U_n, ou pour l'intégrale complète de l'équation (18), dans les conditions que la question actuelle lui impose.

§ VI.

Soit posé $U_n = E_1 E_2$ dans l'équation (18), on devra avoir

$$n(n+1)E_1E_2(\rho_1^2 - \rho_2^2) + E_2 \frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2} + E_1 \frac{d^2E_2}{d\varepsilon_2^2} = 0.$$

ce qui exigera que l'on ait séparément

$$(20) \quad \frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2} = [B - n(n+1)\rho_1^2]E_1, \quad \frac{d^2E_2}{d\varepsilon_2^2} = [n(n+1)\rho_2^2 - B]E_2,$$

B étant une constante. S'il est possible que U_n soit composable de termes de la forme E_1E_2, comme cette fonction doit être entière, rationnelle et symétrique en ρ_1, $\sqrt{\rho_1^2 - b^2}$, $\sqrt{c^2 - \rho_1^2}$, et ρ_2, $\sqrt{b^2 - \rho_2^2}$, $\sqrt{c^2 - \rho_2^2}$, le produit E_1E_2 devra jouir de la même propriété. C'est-à-dire que E_1 sera un polynome entier et rationnel en ρ_1, $\sqrt{\rho_1^2 - b^2}$, $\sqrt{c^2 - \rho_1^2}$, et E_2 le même polynome, dans lequel les trois variables précédentes seront remplacées par ρ_2, $\sqrt{b - \rho_2^2}$, $\sqrt{c^2 - \rho_2^2}$.

On remarquera d'abord que les transcendantes (16) donnent

$$\frac{dE_1}{d\varepsilon_1} = \frac{dE_1}{d\varrho_1}\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2},$$

$$\frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2} = \frac{d^2E_1}{d\varrho_1^2}[-\rho_1^4 + (b^2 + c^2)\rho_1^2 - b^2c^2] + \frac{dE_1}{d\varrho_1}[(b^2 + c^2)\rho_1 - 2\rho_1^3],$$

$$\frac{dE_2}{d\varepsilon_2} = \frac{dE_2}{d\varrho_2}\sqrt{b^2 - \rho_2^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2},$$

$$\frac{d^2E_2}{d\varepsilon_2^2} = \frac{d^2E_2}{d\varrho_2^2}[\rho_2^4 - (b^2 + c^2)\rho_2^2 + b^2c^2] + \frac{dE_2}{d\varrho_2}[2\rho_2^3 - (b^2 + c^2)\rho_2].$$

Si donc on pose pour simplifier,

$$(21) \qquad b^2 + c^2 = q, \quad b^2c^2 = p,$$

les équations (20), en changeant les signes de la première, prennent la forme

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2E_1}{d\varrho_1^2}(\rho_1^4 - q\rho_1^2 + p) + \dfrac{dE_1}{d\varrho_1}(2\rho_1^3 - q\rho_1) = [n(n+1)\rho_1^2 - B]E_1, \\ \dfrac{d^2E_2}{d\varrho_2^2}(\rho_2^4 - q\rho_2^2 + p) + \dfrac{dE_2}{d\varrho_2}(2\rho_2^3 - q\rho_2) = [n(n+1)\rho_2^2 - B]E_2. \end{cases}$$

D'après la composition et la symétrie exigée pour les fonctions E_1 et E_2, et puisque les puissances paires des radicaux $\sqrt{\rho_1^2 - b^2}$, $\sqrt{c^2 - \rho_1^2}$, $\sqrt{b^2 - \rho_2^2}$, $\sqrt{c^2 - \rho_2^2}$, sont des fonctions entières de ρ_1 et ρ_2, il est évident que E_1 ne pourra être que de l'une des quatre formes P_1, $Q_1\sqrt{\rho_1^2 - b^2}$, $R_1\sqrt{c^2 - \rho_1^2}$, ou $S_1\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}$; les fonctions P_1, Q_1, R_1, S_1, étant entières et rationnelles en ρ_1. E_2 aura pour forme correspondante P_2, $Q_2\sqrt{b^2 - \rho_2^2}$, $R_2\sqrt{c^2 - \rho_2^2}$, $S_2\sqrt{b^2 - \rho_2^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2}$; P_2, Q_2, R_2, S_2 ne différant de P_1, Q_1, R_1, S_1 qu'en ce que ρ_2 sera substitué à ρ_1.

Il faut se rappeler que u_n, exprimé en μ, est du degré n; qu'il ne contient que des puissances paires ou impaires de μ, suivant que n est pair ou impair; enfin que U_n est une somme de polynomes u_n de même degré et de même forme. On conclura facilement de ces propriétés, et de la valeur (15), que u_n, U_n, exprimés en ρ_1 et ρ_2, ainsi que le produit E_1E_2, sont du degré $2n$ par rapport aux six variables à la fois $(\rho_1, \rho_2, \sqrt{\rho_1^2 - b^2}, \sqrt{b^2 - \rho_2^2}, \sqrt{c^2 - \rho_1^2}, \sqrt{c^2 - \rho_2^2})$; que conséquemment E_1 est du degré n par rapport à ρ_1, $\sqrt{\rho_1^2 - b^2}$, $\sqrt{c^2 - \rho_1^2}$, et que dans chaque terme la somme des exposants de ces trois variables est toujours paire ou toujours impaire, suivant que n est de l'une ou de l'autre des formes $2i$, $2i+1$.

Dans le premier cas, ou pour $n = 2i$, les quatre formes trouvées pour E_1, seront donc telles que P_1 et S_1 se composeront de puissances paires de ρ_1, P_1 étant du degré $2i$, et S_1 du degré $(2i-2)$; tandis que Q_1 et R_1 ne contiendront que des puissances impaires et seront du degré $(2i-1)$. Dans le second cas, ou pour $n = 2i+1$, P_1 et S_1, formés de puissances impaires seulement, auront respectivement les degrés $(2i+1)$ et $(2i-1)$; tandis que Q_1 et R_1, ne contenant que des puissances paires de ρ_1, seront du degré $2i$. Il est nécessaire de considérer successivement ces deux cas généraux.

§ VII.

Soit $n=2i$, et soit pris d'abord $E_i=\alpha_0\rho_1^{2i}+\alpha_1\rho_1^{2i-2}+\ldots+\alpha_{i-1}\rho_1^2+\alpha_i$; les $(i+1)$ coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}, \alpha_i$ devant être déterminés, ainsi que la constante B, par la condition que cette valeur de E_i vérifie la première des équations (22).

Pour simplifier, convenons de représenter généralement par les symboles A_k et A'_k, les produits $2k(2k+1)$ et $2k(2k-1)$, qui diffèrent l'un de l'autre, en ce que le nombre pair $2k$ est multiplié par l'impair qui le suit pour A_k, et par celui qui le précède pour A'_k. Cette convention établie, il est facile de voir que la substitution du polynome proposé, dans la première des équations (22), conduira à identifier les deux fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
&A_i\alpha_0\rho_1^{2i+2}+[A_{i-1}\alpha_1-(2i)^2q\alpha_0]\rho_1^{2i}+[A_{i-2}\alpha_2-(2i-2)^2q\alpha_1+A'_1p\alpha_0]\rho_1^{2i-2}\\
&\quad+[A_{i-3}\alpha_3-(2i-4)^2q\alpha_2+A'_{i-1}p\alpha_1]\rho_1^{2i-4}+\ldots+(A_2\alpha_{i-2}-36q\alpha_{i-3}+A'_2p\alpha_{i-4})\rho_1^6\\
&\quad+(A_1\alpha_{i-1}-16q\alpha_{i-2}+A'_3p\alpha_{i-3})\rho_1^4+(-4q\alpha_{i-1}+A'_2p\alpha_{i-2})\rho_1^2+A'_1p\alpha_{i-1}\\
&=A_i\alpha_0\rho_1^{2i+2}+(A_i\alpha_1-B\alpha_0)\rho_1^{2i}+(A_i\alpha_2-B\alpha_1)\rho_1^{2i-2}+(A_i\alpha_3-B\alpha_2)\rho_1^{2i-4}+\ldots\\
&\quad+(A_i\alpha_{i-2}-B\alpha_{i-3})\rho^6+(A_i\alpha_{i-1}-B\alpha_{i-2})\rho_1^4+(A_i\alpha_i-B\alpha_{i-1})\rho_1^2-B\alpha_i.
\end{aligned}$$

Ces deux polynomes ont le même degré $(2i+2)$, le même nombre de termes $(i+2)$, le même premier terme; et leur identification complète conduit aux $(i+2)$ relations suivantes :

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{ll}
(A_i-A_{i-1})\alpha_1=[B-(2i)^2q]\alpha_0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(A_i-A_{i-2})\alpha_2=[B-(2i-2)^2q]\alpha_1+A'_1p\alpha_0 & (A_i-A_1)\alpha_{i-1}=(B-16q)\alpha_{i-2}+A'_3p\alpha_{i-3},\\
(A_i-A_{i-3})\alpha_3=[B-(2i-4)^2q]\alpha_2+A'_{i-1}p\alpha_1 & A_i\alpha_i=(B-4q)\alpha_{i-1}+A'_2p\alpha_{i-2},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0=B\alpha_i+A'_1p\alpha_{i-1}.
\end{array}\right.$$

Si l'on élimine α_i entre les deux dernières, il vient

$$0=[B(B-4q)+A'_1A_ip]\alpha_{i-1}+A'_2Bp\alpha_{i-2}.$$

Si l'on élimine α_{i-1} entre celle-ci et la troisième en remontant dans le groupe (23), il vient

$$\begin{aligned}
0=\{&[B(B-4q)+A'_1A_ip](B-16q)+A'_2B(A_i-A_1)p\}\alpha_{i-2}\\
&+A'_3[B(B-4q)+A'_1A_ip]\,p\alpha_{i-3};
\end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Or, en continuant ainsi à supprimer successivement, à partir d'en bas, une des équations du groupe (23), ce qui augmente à chaque fois d'une unité le plus haut exposant de B dans la dernière conservée, on arrive nécessairement à une seule équation de la forme $0 = M\alpha_0$, M étant un polynome en B du degré $(i+1)$; et comme α_0 ne peut être nul, il faut que $M = 0$. Cette équation finale, du degré $i+1$ en B, a toutes ses racines réelles, comme il sera démontré plus bas. A chacune de ces racines correspondra un seul système de valeurs des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}, \alpha_i$, puisque les équations (23) sont du premier degré par rapport à ces coefficients; α_0 restera seul indéterminé, et entrera comme facteur dans la valeur de chacun des autres; on pourra le supposer égal à l'unité.

Il existe donc $(i+1)$ polynomes de la forme

$$E_1 = \rho_1^{2i} + \alpha_1 \rho_1^{2i-2} + \alpha_2 \rho_1^{2i-4} + \ldots + \alpha_{i-1} \rho_1^2 + \alpha_i,$$

correspondant à $(i+1)$ valeurs de la constante B, qui vérifient la première des équations (22) pour $n = 2i$. A cause de l'identité de forme de ces deux équations (22) le polynome

$$E_2 = \rho_2^{2i} + \alpha_1 \rho_2^{2i-2} + \alpha_2 \rho_2^{2i-4} + \ldots + \alpha_{i-1} \rho_2^2 + \alpha_i,$$

ayant mêmes coefficients que E_1, vérifiera la seconde pour les mêmes valeurs de B. Ainsi, lorsque $n = 2i$, l'équation (18) est vérifiable par $i+1$ produits différents de la forme $U = E_1 E_2$, E_1 et E_2 étant des polynomes à puissances paires de ρ_1 et ρ_2, du degré $2i$, et ayant mêmes coefficients.

§ VIII.

Soit, toujours dans le cas de $n = 2i$, $E_1 = Q_1 \sqrt{\rho_1^2 - b^2}$, $E_2 = Q_2 \sqrt{b^2 - \rho_2^2}$; on a, par deux différentiations successives,

$$\frac{d^2 E_1}{d\xi_1^2} = \left\{ \frac{d^2 Q_1}{d\xi_1^2} (-\xi_1^4 + q\xi_1^2 - p) + \frac{dQ_1}{d\xi_1} [(q + 2c^2)\xi_1 - 4\xi_1^3] + Q_1 (c^2 - 2\xi_1^2) \right\} \sqrt{\xi_1^2 - b^2},$$

$$\frac{d^2 E_2}{d\xi_2^2} = \left\{ \frac{d^2 Q_2}{d\xi_2^2} (\xi_2^4 - q\xi_2^2 + p) + \frac{dQ_2}{d\xi_2} [4\xi_2^3 - (2c^2 + q)\xi_2] + Q_2 (2\xi_2^2 - c^2) \right\} \sqrt{b^2 - \xi_2^2}.$$

et les équations (20) deviennent, en supprimant les facteurs communs $\sqrt{\rho_1^2 - b^2}$, $\sqrt{b^2 - \rho_2^2}$, et par un simple changement de signe :

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 Q_1}{d\rho_1^2}(\rho_1^4 - q\rho_1^2 + p) + \frac{dQ_1}{d\rho_1}[4\rho_1^3 - (q + 2c^2)\rho_1] \\ &\qquad = \{[n(n+1) - 2]\rho_1^2 - (B - c^2)\} Q_1, \\ &\frac{d^2 Q_2}{d\rho_2^2}(\rho_2^4 - q\rho_2^2 + p) + \frac{dQ_2}{d\rho_2}[4\rho_2^3 - (q + 2c^2)\rho_2] \\ &\qquad = \{[n(n+1) - 2]\rho_2^2 - (B - c^2)\} Q_2. \end{aligned}\right.$$

Si l'on pose maintenant $Q_i = \alpha_0 \rho_1^{2i-1} + \alpha_1 \rho_1^{2i-3} + \ldots + \alpha_{i-2}\rho_1^3 + \alpha_{i-1}\rho_1$, dans la première de ces équations, on est conduit à identifier deux polynomes, ne contenant que des puissances impaires de ρ_1, ayant même degré $2i + 1$, même nombre de termes $i + 1$, et même premier terme $(A_i - 2)\alpha_0 \rho_1^{2i+1}$. Cette identification donne i relations du premier degré par rapport aux i coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-1}$; et l'on parvient à une équation finale en B du degré i; à chacune des racines de cette équation correspond un système unique de valeurs des $(i - 1)$ coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-1}$, lesquelles contiennent toutes α_0 comme facteur, et l'on peut poser $\alpha_0 = 1$. A cause de l'identité de forme des équations (24), les deux polynomes Q_1 et Q_2 correspondant à la même valeur de B, ont les mêmes coefficients.

Ainsi l'équation (18), quand $n = 2i$, peut être vérifiée par i produits de la forme $U = Q_1 Q_2 \sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \rho_2^2}$, Q_1 et Q_2 étant des polynomes à puissances impaires de ρ_1, ρ_2, du degré $(2i - 1)$, et ayant mêmes coefficients.

On démontre de la même manière, que l'équation (18) est vérifiable par i produits distincts de la forme $U = R_1 R_2 \sqrt{c^2 - \rho_1^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2}$, R_1 et R_2 étant des polynomes à puissances impaires de ρ_1 et ρ_2, du degré $(2i - 1)$, et ayant mêmes coefficients.

Enfin, toujours pour $n = 2i$, soit $E_1 = S_1 \sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}$, $E_2 = S_2 \sqrt{b^2 - \rho_2^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2}$; deux différentiations successives donnent

$$\frac{d^2 E_1}{d\rho_1^2} = \left[\frac{d^2 S_1}{d\rho_1^2}(-\rho_1^4 + q\rho_1^2 - p) + 3\frac{dS_1}{d\rho_1}(q\rho_1 - 2\rho_1^3) + S_1(q - 6\rho_1^2)\right]\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2},$$

$$\frac{d^2 E_2}{d\rho_2^2} = \left[\frac{d^2 S_2}{d\rho_2^2}(\rho_2^4 - q\rho_2^2 + p) + 3\frac{dS_2}{d\rho_2}(2\rho_2^3 - q\rho_2) + S_2(6\rho_2^2 - q)\right]\sqrt{b^2 - \rho_2^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2};$$

et ces valeurs substituées dans les équations (20) les transforment ainsi

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2S_1}{d\rho_1^2}(\rho_1^4-q\rho_1^2+p)+3\dfrac{dS_1}{d\rho_1}(2\rho_1^3-q\rho_1)=\{[n(n+1)-6]\rho_1^2-(B-q)\}S_1, \\ \dfrac{d^2S_2}{d\rho_2^2}(\rho_2^4-q\rho_2^2+p)+3\dfrac{dS_2}{d\rho_2}(2\rho_2^3-q\rho_2)=\{[n(n+1)-6]\rho_2^2-(B-q)\}S_2. \end{cases}$$

Si l'on pose maintenant $S_1=\alpha_0\rho_1^{2i-2}+\alpha_1\rho_1^{2i-4}+\ldots+\alpha_{i-2}\rho_1^2+\alpha_{i-1}$, dans la première de ces équations, les polynomes qu'il faut identifier ne contiennent que des puissances paires de ρ_1, ont le même degré $2i$, le même nombre de termes $(i+1)$, et le même premier terme $(A_1-6)\alpha_0\rho_1^{2i}$. On a alors i relations du premier degré par rapport aux i coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{i-1}$; et l'équation finale en B est encore du degré i. Les deux équations (25) ayant la même forme, les polynomes S_1 et S_2 correspondant à la même valeur de B ont les mêmes coefficients.

Ainsi l'équation (18), pour $n=2i$, est encore satisfaite par i produits distincts, de forme $U=S_1S_2\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}$; S_1 et S_2 étant des polynomes à puissances paires de ρ_1 et ρ_2, du degré $(2i-2)$, et ayant mêmes coefficients.

§ IX.

En résumé, dans le cas de $n=2i$, les équations (20) sont vérifiables par $(4i+1)$ ou $(2n+1)$ groupes de fonctions E_1 et E_2, entières, rationnelles et symétriques en ρ_1, $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, et ρ_2, $\sqrt{b^2-\rho_2^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_2^2}$; chaque groupe est caractérisé par une valeur particulière de la constante B; les $(4i+1)$ valeurs de B sont les racines de quatre équations, l'une de degré $i+1$, et les trois autres de degré i. L'équation (18) est alors vérifiable séparément par le produit des deux fonctions de chaque groupe, et U_n peut être égalé à la somme de ces $(2n+1)$ produits distincts, respectivement multipliés par autant de coefficients arbitraires.

On arrive à des conclusions semblables dans le cas de n impair, ou égal à $2i+1$. En effet, on s'assure facilement qu'en substituant à E_1, dans la première des équations (22), un polynome P_1 à puissances impaires de ρ_1, et du degré $2i+1$, l'équation finale en B qu'exige

la vérification est du degré $i+1$. Si, n étant toujours égal à $2i+1$, on pose à la place de Q_i dans la première des équations (24), un polynome à puissances paires de ρ_1 du degré $2i$, l'identification des deux membres conduit encore à une équation finale en B du degré $(i+1)$. Enfin si dans la première des équations (25) on pose $n=2i+1$, et que l'on prenne pour S_i un polynome à puissances impaires du degré $2i-1$, l'équation finale en B exigée par la vérification est du degré i.

En résumé : dans le cas de $n=2i+1$, les équations (20) sont vérifiables par $(4i+3)$ ou $(2n+1)$ groupes de fonctions E_1 et E_2, entières, rationnelles et symétriques en ρ_1, $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, et ρ_2, $\sqrt{b^2-\rho_2^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_2^2}$; chaque groupe est particularisé par une valeur de la constante B; les $(4i+3)$ valeurs de B sont les racines de quatre équations, trois de degré $(i+1)$, et la quatrième de degré i. D'où il suit que l'équation (18) est encore vérifiable par $2n+1$ produits distincts. Les conséquences déduites de l'équation (19) se trouvent ainsi justifiées dans tous les cas.

§ X.

Il importe de remarquer que tous les polynomes E_1, dont on vient d'analyser la forme et le nombre, sont tels que l'une des deux fonctions E_1 et $\frac{dE_1}{d\rho_1}$, s'évanouit à chacune des deux limites de la variable ρ_1, lesquelles sont $\rho_1=b$, et $\rho_1=c$; et que pareillement tous les polynomes E_2 sont tels que l'une des deux fonctions E_2 et $\frac{dE_2}{d\rho_2}$ est nulle, à chacune des deux limites de la variable ρ_2, lesquelles sont $\rho_2=0$, et $\rho_2=b$.

En effet : 1°. Dans le cas où E_1 et E_2 sont rationnels en ρ_1 et ρ_2,

on a $\frac{dE_1}{d\rho_1}=\frac{dE_1}{d\rho_1}\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, $\frac{dE_2}{d\rho_2}=\frac{dE_2}{d\rho_2}\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}$,

et l'on voit de suite que $\frac{dE_1}{d\rho_1}$ s'évanouit aux deux limites de ρ_1, $\frac{dE_2}{d\rho_2}$ à celle b de ρ_2; et que E_2, ou $\frac{dE_2}{d\rho_2}$ sera nul pour $\rho_2=0$, suivant que E_2 contiendra des puissances impaires ou paires, de ρ_2.

2°. Lorsque E_1 et E_2 sont de la forme $Q_1\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, $Q_2\sqrt{b^2-\rho_2^2}$, on a

$$\frac{dE_1}{d\varepsilon_1}=\left[\frac{dQ_1}{d\varrho_1}(\rho_1^2-b^2)+Q_1\rho_1\right]\sqrt{c^2-\rho_1^2},\quad \frac{dE_2}{d\varepsilon_2}=\left[\frac{dQ_2}{d\varrho_2}(b^2-\rho_2^2)-Q_2\rho_2\right]\sqrt{c^2-\rho_2^2};$$

alors $E_1=0$ pour $\rho_1=b$; $\frac{dE_1}{d\varepsilon_1}=0$ pour $\rho_1=c$; $E_2=0$ pour $\rho_2=b$; pour $\rho_2=0$, c'est encore E_2 qui s'évanouit si le polynome Q_2 ne contient que des puissances impaires de ρ_2, et l'on a $\frac{dE_2}{d\varepsilon_2}=0$ dans le cas contraire.

3°. Quand E_1 et E_2 sont de la forme $R_1\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, $R_2\sqrt{c^2-\rho_2^2}$, on a

$$\frac{dE_1}{d\varepsilon_1}=\left[\frac{dR_1}{d\varrho_1}(c^2-\rho_1^2)-R_1\rho_1\right]\sqrt{\rho_1^2-b^2},\quad \frac{dE_2}{d\varepsilon_2}=\left[\frac{dR_2}{d\varrho_2}(c^2-\rho_2^2)-R_2\rho_2\right]\sqrt{b^2-\rho_2^2};$$

alors $\frac{dE_1}{d\varepsilon_1}=0$ pour $\rho_1=b$; $E_1=0$ pour $\rho_1=c$; $\frac{dE_2}{d\varepsilon_2}=0$ pour $\rho_2=b$; enfin pour $\rho_2=0$, E_2, ou $\frac{dE_2}{d\varepsilon_2}$, s'évanouit suivant que le polynome R_2 est à puissances impaires ou paires de ρ_2.

4°. Enfin, lorsque E_1 et E_2 ont la forme $S_1\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, $S_2\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}$, E_1 s'évanouit aux deux limites de ρ_1, E_2 à celle B de ρ_2; et pour $\rho_2=0$, on a $E_2=0$, ou $\frac{dE_2}{d\varepsilon_2}=0$, suivant que le polynome S_2 est à puissances impaires ou paires.

Le théorème énoncé plus haut a donc lieu dans tous les cas. D'où il suit qu'en désignant par E_1 et E_1', ou par E_2 et E_2', deux fonctions différentes E_1, ou E_2, appartenant à la même forme et du même degré; c'est-à-dire deux fonctions correspondant à la même valeur de n, et de plus caractérisées par deux racines différentes de la même équation en B, l'expression $\left(E_1\frac{dE_1'}{d\varepsilon_1}-E_1'\frac{dE_1}{d\varepsilon_1}\right)$, ou $\left(E_2\frac{dE_2'}{d\varepsilon_2}-E_2'\frac{dE_2}{d\varepsilon_2}\right)$, s'évanouira nécessairement aux deux limites de ρ_1, ou de ρ_2.

§ XI.

Il est facile de prouver, à l'aide de cette dernière propriété, que toutes les racines des équations finales en B sont réelles. En effet, supposons qu'une quelconque de ces équations ait une racine égale à $B' + B''\sqrt{-1}$, B' et B'' étant réels; le polynome E_1 correspondant sera de la forme $E' + E''\sqrt{-1}$; E' et E'' étant deux nouveaux polynomes en ρ_1, dont les coefficients sont réels. Mais l'existence de la racine $B' + B''\sqrt{-1}$, exige que la même équation en ait une autre égale à $B' - B''\sqrt{-1}$, car les coefficients de toutes les équations en B sont essentiellement réels; à cette nouvelle racine correspondra un nouveau polynome E_1 égal à $E' - E''\sqrt{-1}$. Si l'on substitue les deux valeurs $(E' + E''\sqrt{-1})$, $(E' - E''\sqrt{-1})$, à E_1, E_1', dans l'expression $\left(E_1 \frac{dE_1'}{d\varepsilon_1} - E_1' \frac{dE_1}{d\varepsilon_1}\right)$ qui s'évanouit aux deux limites de ρ_1 (§ X), elle devient $\left(E'' \frac{dE'}{d\varepsilon_1} - E' \frac{dE''}{d\varepsilon_1}\right)\sqrt{-1}$; d'où il suit que l'expression $\left(E' \frac{dE''}{d\varepsilon_1} - E'' \frac{dE'}{d\varepsilon_1}\right)$ doit être nulle pour $\rho_1 = b$, $\rho_1 = c$.

Cela posé, la valeur $E_1 = E' + E''\sqrt{-1}$, qui correspond à $B = B' + B''\sqrt{-1}$, doit vérifier la première des équations (20); on a donc

$$\frac{d^2E'}{d\varepsilon_1^2} + \frac{d^2E''}{d\varepsilon_1^2}\sqrt{-1} = [B' + B''\sqrt{-1} - n(n+1)\rho_1^2](E' + E''\sqrt{-1}),$$

ce qui exige que l'on ait séparément

$$\frac{d^2E'}{d\varepsilon_1^2} = [B' - n(n+1)\rho_1^2]E' - B''E'', \quad \frac{d^2E''}{d\varepsilon_1^2} = [B' - n(n+1)\rho_1^2]E'' + B''E',$$

d'où l'on conclut par l'élimination du binome en ρ_1^2 :

$$E' \frac{d^2E''}{d\varepsilon_1^2} - E'' \frac{d^2E'}{d\varepsilon_1^2} = B''(E'^2 + E''^2).$$

Or, si l'on multiplie les deux membres de cette équation par

$d\varepsilon_1 = \frac{d\varrho_1}{\sqrt{\varrho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}}$, et qu'on intègre de $\rho_1 = b$ à $\rho_1 = c$, le premier membre, dont l'intégrale indéfinie est $\left(E' \frac{dE''}{d\varepsilon_1} - E'' \frac{dE'}{d\varepsilon_1}\right)$, s'évanouissant aux deux limites, il faudra que le second membre soit nul. C'est-à-dire que l'on devrait avoir

$$B'' \int_b^c \frac{(E'^2 + E''^2)\, d\varrho_1}{\sqrt{\varrho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}} = 0,$$

condition impossible, si B'' n'est pas nul; car l'intégrale ne saurait s'évanouir, puisque la différentielle reste essentiellement positive entre les limites de la variable. Donc B'' est nul, et toutes les racines B sont réelles.

§ XII.

Il résulte de notre analyse, que la loi des températures stationnaires, dans une sphère maintenue au contact de sources constantes de chaleur et de froid, et qui est représentée par la série (10), peut pareillement être exprimée par la nouvelle série :

$$(26) \qquad V = \sum_{n=0}^{n=\infty} r^n S_n \, M E_1 E_2.$$

Le sigma s'étend à toutes les valeurs positives du nombre entier n; la somme S_n peut comprendre $2n + 1$ termes pour chaque valeur de n; E_1 et E_2 sont les fonctions polynomes, dont les §§ VI, VII, VIII, IX, définissent la forme et la composition.

Pour achever la solution de la sphère, à l'aide de la nouvelle série (26), il resterait à donner une méthode pour déterminer les coefficients M, par la condition que, pour $r = r_0$, la fonction V devînt une fonction donnée des deux coordonnées ρ_1 et ρ_2. Mais comme cette nouvelle solution complète, du système sphérique, n'a par elle-même aucun avantage pratique sur celle adoptée par les géomètres, nous ne la donnerons pas ici. On pourra d'ailleurs la déduire facilement de la solution du système ellipsoïdal, à laquelle il est temps de revenir.

§ XIII.

Les considérations, exposées dans la Note descriptive placée au commencement de ce Mémoire, et que nous ne répéterons pas ici, conduisent à prendre pour exprimer la loi des températures permanentes dans l'ellipsoïde à axes inégaux, lorsque sa surface est en contact avec des sources de chaleur et de froid, une série de la forme

$$(27)\qquad V = \sum_{n=0}^{n=\infty} S_n M E E_1 E_2.$$

E_1 et E_2 sont les mêmes fonctions de ρ_1 et de ρ_2 que dans la série (26) relative à la sphère, ou celles qui vérifient les équations (20). E est une fonction encore inconnue du paramètre ρ, mais qui doit être déterminée par la condition que le produit EE_1E_2 vérifie l'équation générale (8).

Si l'on pose $V = EE_1E_2$ dans cette équation (8), on trouve, en remarquant que E est seulement fonction de ρ, ou de la transcendante ε (7),

$$(28)\quad (\varrho_1^2 - \varrho_2^2)E_1E_2\frac{d^2E}{d\varepsilon^2} + (\varrho_1^2-\varrho_2^2)E_2E\frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2} + (\varrho_1^2-\varrho_2^2)EE_1\frac{d^2E_2}{d\varepsilon_2^2} = 0.$$

Or, des équations (20), on déduit aisément

$$E_2\frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2} + E_1\frac{d^2E_2}{d\varepsilon_2^2} = -n(n+1)(\varrho_1^2-\varrho_2^2)E_1E_2,\quad \varrho_2^2E_2\frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2} + \varrho_1^2E_1\frac{d^2E_2}{d\varepsilon_2^2} = -B(\varrho_1^2-\varrho_2^2)E_1E_2,$$

et ces valeurs substituées dans l'équation (28) la transforment ainsi

$$(\rho_1^2 - \rho_2^2)\,E_1E_2\left[\frac{d^2E}{d\varepsilon^2} - n(n+1)\rho^2E + BE\right] = 0;$$

ce qui exige que l'on ait

$$(29)\qquad \frac{d^2E}{d\varepsilon^2} = [n(n+1)\rho^2 - B]E,$$

ou bien, d'après la valeur (7) de la transcendante ε,

$$(30)\quad \frac{d^2E}{d\varrho^2}(\rho^4 - q\rho^2 + p) + \frac{dE}{d\varrho}(2\rho^3 - q\rho) = [n(n+1)\rho^2 - B]E.$$

Cette équation ayant une forme identique avec celle (22), E pourra être un polynome en ρ, $\sqrt{\rho^2-b^2}$, $\sqrt{\rho^2-c^2}$, composé de la même manière que E_1 l'est en ρ_1, $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, et que E_2 l'est en ρ_2, $\sqrt{b^2-\rho_2^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_2^2}$. Une intégrale plus complète de l'équation (29) ou (30) n'est pas nécessaire, dans la question physique qui nous occupe; car si l'on prenait une valeur plus générale de E, la série (27) ne comprendrait plus celle (26), ce qui doit toujours être.

§ XIV.

En effet, les ellipsoïdes au paramètre ρ, représentés par la premiere des équations (3), vont en s'approchant de plus en plus de la forme sphérique, à mesure que ρ augmente, comparativement aux constantes b et c; ces ellipsoïdes deviennent donc des sphères, quand on donne au paramètre ρ des valeurs infiniment plus grandes que b et c, ou quand b et c deviennent infiniment petits. Or, comme la série, qui donnera la solution du système ellipsoïdal à axes inégaux, ne doit rien spécifier sur les grandeurs absolues et relatives des distances focales principales $2b$, $2c$, $2\sqrt{c^2-b^2}$, elle sera vraie pour toutes les valeurs de b et c, pour celles infiniment petites comme pour celles finies; cette série devra donc comprendre celle (26), que l'on devra pouvoir en déduire, en donnant aux constantes b et c des valeurs infiniment petites.

On remarquera maintenant que tous les polynomes E, E_1, E_2, de degré n, sont homogènes; que le coefficient de leur premier terme étant l'unité, les coefficients des autres termes doivent être des nombres, multipliés par des puissances de b et c, qui réunies à l'exposant de la variable, donnent à tous ces termes le même degré n. Lors donc que l'on supposera ρ infiniment plus grand que b et c, le polynome E se réduira à son premier terme ρ^n (soit r^n); et il en sera de même de tous les polynomes E correspondants à la même valeur de n, et aux différentes valeurs de la constante B.

Quant aux polynomes E_1 et E_2, leur forme ne sera pas changée, et ils conserveront tous leurs termes: car ρ_1 étant toujours compris entre b et c, et ρ_2 toujours moindre que b, il faudra remplacer dans ces

polynomes les variables ρ_1 et ρ_2, et les constantes b et c, par $\alpha\rho'_1$, $\alpha\rho'_2$, $\alpha b'$, $\alpha c'$; la quantité α étant infiniment petite, et ρ'_1, ρ'_2, b', c' des variables et des constantes finies; ce qui transformera E_1 et E_2, en $\alpha^n E'_1$ et $\alpha^n E'_2$, d'après l'homogénéité établie; E'_1 et E'_2 ayant absolument la même forme et la même composition en ρ'_1, ρ'_2, b' et c', que E_1 et E_2 en ρ_1, ρ_2, b et c. Le facteur α^{2n} qui apparaîtra alors dans le terme général de la série, se confondra avec le coefficient M arbitraire, ou devra disparaître comme commun à son dénominateur transformé, si ce coefficient est déterminé.

Il faut remarquer, en outre, que cette réduction de la série (27) en celle (26), est accompagnée d'une transformation des équations (3) représentant les surfaces coordonnées du système ellipsoïdal, en celles (13) appartenant au système sphérique rapporté à des cônes obliques. En effet, d'une part, la première des équations (3), lorsque b et c sont infiniment plus petits que ρ, se réduit à.... $x^2+y^2+z^2=\rho^2=r^2$; et d'autre part, la substitution de $\alpha\rho'_1$, $\alpha\rho'_2$, $\alpha b'$, $\alpha c'$, à ρ_1, ρ_2, b, c, dans les deux dernières équations (3), puis l'annulation de α, et enfin la suppression des accents, conduisent aux équations (13).

Ainsi la série (27), dans laquelle E est une fonction rationnelle, entière et du degré n, de ρ, $\sqrt{\rho^2-b^2}$, $\sqrt{\rho^2-c^2}$, comprend, comme cela devait être, celle (26) relative à la sphère; ce qui n'aurait plus lieu, si l'on prenait pour E une intégrale plus générale de l'équation (30).

Cette liaison nécessaire entre les séries (27) et (26) étant vérifiée, on doit être convaincu que la série (27) est tout aussi générale qu'il le faut, pour représenter la loi des températures permanentes de l'ellipsoïde, dans la question qui nous occupe. Car si cela n'était pas, il s'ensuivrait nécessairement que la série (26), ou celle (10) dont elle n'est qu'une transformation, serait incapable de fournir la solution correspondante pour le système sphérique; conséquence démentie par les travaux de nos premiers géomètres.

Ayant ainsi démontré que la loi des températures, que nous cherchons, doit pouvoir être représentée par la série (27), dont la forme est essentielle et suffisante, il reste à trouver le moyen général de déterminer les coefficients M de ses différents termes, par la condition

que sur la surface de l'ellipsoïde (1), ou pour $\rho = \rho_0$, V se réduise à une fonction donnée $\varphi(\rho_1, \rho_2)$ de ρ_1 et ρ_2. Mais pour faciliter cette recherche, il convient de distinguer différents cas, où la fonction φ satisfait à des conditions diverses.

§ XV.

La fonction V étant de la forme définie par l'équation (27), son développement peut être écrit ainsi :

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} V = P + Q\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{b^2-\rho_2^2} + R\sqrt{\rho^2-c^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2} \\ + S\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{\rho^2-c^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}, \end{aligned}\right.$$

P, Q, R, S étant des séries de termes rationnelles en ρ, ρ_1, ρ_2, et ne contenant que des puissances positives de ces variables. Cette forme (31) est d'ailleurs une conséquence nécessaire du choix des coordonnées ρ, ρ_1, ρ_2, et des limites imposées à la question physique qu'il s'agit de représenter.

En effet, quelle que soit la fonction définitive V, si on l'imagine exprimée en coordonnées rectilignes x, y, z, elle devra pouvoir se développer suivant les puissances ascendantes de ces variables, sans que la série contienne des puissances négatives ; car la température ne saurait devenir infinie quand une des coordonnées est nulle, c'est-à-dire pour des points intérieurs de l'ellipsoïde situés sur les plans de ses sections principales. Or il sera toujours possible de grouper ce développement de V en x, y, z, de cette manière

$$V = P + P'x + P''y + P'''z + P_3yz + P_2zx + P_1xy + P_0xyz,$$

P, P', ... P_1, P_0, étant des fonctions de x^2, y^2, z^2; et si l'on substitue maintenant aux coordonnées x, y, z leurs valeurs en ρ, ρ_1, ρ_2, données par les formules (4), l'expression précédente de V sera ainsi transformée

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} V = (Q + Q'\varrho\varrho_1\varrho_2) + (Q_3 + Q_0\varrho\varrho_1\varrho_2)\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\varrho_1^2-b^2}\sqrt{b^2-\varrho_2^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}\sqrt{c^2-\varrho_1^2}\sqrt{c^2-\varrho_2^2} \\ + (Q'' + Q_1\varrho\varrho_1\varrho_2)\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\varrho_1^2-b^2}\sqrt{b^2-\varrho_2^2} + (Q''' + Q_2\varrho\varrho_1\varrho_2)\sqrt{\varrho^2-c^2}\sqrt{c^2-\varrho_1^2}\sqrt{c^2-\varrho_2^2}, \end{aligned}\right.$$

$Q, Q', \ldots Q_1, Q_0$, étant des fonctions rationnelles de $\rho^2, \rho_1^2, \rho_2^2$; et cette forme n'est autre que celle (31) déduite de la série (27).

Sur la surface de l'ellipsoïde, ou quand $\rho = \rho_0$, la fonction V(32), qui n'est plus qu'à deux variables, sera de la forme

$$(33)\quad \begin{cases} V_0 = (q + q'\varepsilon_1\varepsilon_2) + (q'' + q_1\varepsilon_1\varepsilon_2)\sqrt{\varepsilon_1^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \varepsilon_2^2} \\ + (q''' + q_2\varepsilon_1\varepsilon_2)\sqrt{c^2 - \varepsilon_1^2}\sqrt{c^2 - \varepsilon_2^2} + (q_3 + q_4\varepsilon_1\varepsilon_2)\sqrt{\varepsilon_1^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \varepsilon_2^2}\sqrt{c^2 - \varepsilon_1^2}\sqrt{c^2 - \varepsilon_2^2}, \end{cases}$$

$q, q', \ldots q_1, q_0$, étant des fonctions rationnelles de ρ_1^2 et ρ_2^2.

L'expression (32) de la température dans l'ellipsoïde, et celle (33) des températures de la surface, se trouvent ainsi composées chacune de huit parties correspondantes, jouissant de propriétés distinctes, et appartenant à huit états particuliers qui se superposent dans le cas général. Afin de définir ces huit cas partiels, il importe de rappeler ici comment les coordonnées elliptiques changent de signes, pour représenter tous les points de l'espace.

§ XVI.

On peut prendre pour paramètres des surfaces conjuguées, les trois transcendantes elliptiques de première espèce, et de variétés différentes, données par les équations (7). Chacune de ces variables exprime, comme je l'ai démontré dans un autre Mémoire, la température qui existerait sur la surface coordonnée correspondante, en considérant son système, pris isolément, comme un système de surfaces isothermes. Les axes ρ, $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, sont alors des fonctions périodiques de la transcendante ε, que nous désignerons par $A(\varepsilon)$, $B(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)$. Les axes ρ_1, $\sqrt{\rho_1^2 - b^2}$, $\sqrt{c^2 - \rho^2}$, de l'hyperboloïde isotherme à une nappe, sont pareillement des fonctions périodiques $A_1(\varepsilon_1)$, $B_1(\varepsilon_1)$, $C_1(\varepsilon_1)$, de ε_1. Enfin les axes ρ_2, $\sqrt{b^2 - \rho_2^2}$, $\sqrt{c^2 - \rho_2^2}$, de l'hyperboloïde isotherme à deux nappes sont des fonctions, toujours périodiques, $A_2(\varepsilon_2)$, $B_2(\varepsilon_2)$, $C_2(\varepsilon_2)$, de ε_2.

Or il résulte des propriétés élémentaires, et des relations réciproques des neuf fonctions (A, B, C), (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2), que trois d'entre elles (A_2, B_1, C), changent de signe avec la variable, tout en

conservant la même valeur absolue, tandis que les six autres (A, B), (C_1, A_1), (B_2, C_2) conservent le même signe avec la même valeur. Les trois fonctions (A_2, B_1, C) sont d'ailleurs les seules qui s'évanouissent lorsque leurs variables sont nulles, ou pour les limites inférieures des coordonnées.

Ainsi, des neuf quantités, ρ, ρ_1, ρ_2, $\sqrt{\rho^2-b^2}$, $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, $\sqrt{b^2-\rho_2^2}$, $\sqrt{\rho^2-c^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_2^2}$, introduites par le système de coordonnées que nous avons dû choisir, les seules pour lesquelles il soit nécessaire d'admettre des valeurs négatives, sont ρ_2, $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, $\sqrt{\rho^2-c^2}$. Les formules (4) établissent une relation directe et très simple, entre les changements de signe de ces trois fonctions, et ceux des coordonnées rectilignes : x changeant de signe avec ρ_2, y avec $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, z avec $\sqrt{\rho^2-c^2}$. C'est-à-dire qu'en passant de la droite à la gauche du plan de la plus petite section faite dans l'ellipsoïde donné, ou de l'avant à l'arrière de la section moyenne, ou enfin du dessus au dessous du plan de la plus grande section, il faut changer le signe de ρ_2, ou de $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, ou de $\sqrt{\rho^2-c^2}$.

§ XVII.

Il sera facile de définir maintenant les huit états partiels, correspondant aux huit termes généraux du développement V(32). Car si V se réduit à un seul de ces termes, et que ce terme unique ne change pas de signe avec ρ_2, ou $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, ou $\sqrt{\rho^2-c^2}$, on en conclura que, dans l'état partiel considéré, les températures de la surface, et par suite celles de l'intérieur, sont distribuées symétriquement de part et d'autre de la section minimum, ou moyenne, ou maximum; tandis que s'il y a changement de signe, la symétrie n'existera que pour les valeurs absolues, ou sera en quelque sorte inverse, les températures étant positives d'un côté, négatives de l'autre côté du plan dont il s'agit, et nulles sur ce plan lui-même.

Quelle que soit la fonction donnée $\varphi(\rho_1, \rho_2)$, elle pourra toujours être décomposée en huit fonctions partielles, dont elle sera la somme, et qui satisferont respectivement aux conditions de symétrie, directe ou inverse, qui caractérisent les huit termes généraux de la série V(32), ou plutôt V_0(33). A chacune des fonctions partielles devra

correspondre un groupe de termes de la série (27), qui jouissent des mêmes conditions de symétrie; et les coefficients de ces termes pourront être déterminés, à l'aide de cette fonction partielle, par la méthode générale que nous allons exposer. Cette opération étant faite pour les huit parties de la fonction φ, et les groupes correspondants ayant leurs coefficients déterminés, la somme composera la valeur générale de V. Nous ne considérerons en détail que les opérations relatives à un seul de ces groupes, on reconnaîtra facilement par la suite qu'elles seraient absolument les mêmes pour chacun des autres.

§ XVIII.

L'état partiel défini par le seul terme général Q, du développement (32), est celui que nous allons traiter particulièrement. Dans cet état, les sources constantes de chaleur et de froid à la surface de l'ellipsoïde, et par suite les températures permanentes de l'intérieur sont à la fois distribuées symétriquement par rapport aux plans des trois sections principales. C'est-à-dire que V doit conserver la même valeur et le même signe, quand on change ρ_2 en $-\rho_2$, ou $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$ en $-\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, ou $\sqrt{\rho^2-c^2}$ en $-\sqrt{\rho^2-c^2}$.

Les seuls termes de la série (27) qu'il faille conserver dans ces circonstances, ou qui composent le groupe partiel que nous avons en vue, seront ceux où E, E_1, E_2, toujours formés de la même manière, seront complétement rationnels en ρ, ρ_1, ρ_2, et ne contiendront que des puissances paires de ces variables. Ainsi les termes où E_1 a l'une des formes $Q_1\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, $R_1\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, $S_1\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, définies au § VI, sont exclus; et l'on ne doit prendre aucun des termes correspondant à des valeurs impaires du nombre n.

Il suit de là que pour tous les termes conservés, on aura $\frac{dE_1}{d\rho_1}=0$, aux deux limites de ρ_1, et $\frac{dE_2}{d\rho_2}=0$, à celles de ρ_2. D'où l'on déduit comme conséquence, que E_1 et E_1', ou E_2 et E_2', représentant deux valeurs quelconques de la fonction E_1, ou E_2, prises dans deux termes différents du groupe actuel, ou qui correspondent à des valeurs

différentes de n ou de B, l'expression $\left(E_1 \frac{dE'_1}{d\varepsilon_1} - E'_1 \frac{dE_1}{d\varepsilon_1}\right)$, ou..... $\left(E_2 \frac{dE'_2}{d\varepsilon_2} - E'_2 \frac{dE_2}{d\varepsilon_2}\right)$ s'évanouit nécessairement aux deux limites de ρ_1, ou de ρ_2.

Ce théorème conduit très simplement à la détermination des coefficients M de la série (27) dans le cas actuel. Pour la surface de l'ellipsoïde, cette série (27) donne

$$V_0 = \sum_{i=0}^{i=\infty} S_{2i} . ME(\rho_0) E_1 E_2,$$

$E(\rho_0)$ représentant la constante à laquelle se réduit E pour $\rho = \rho_0$. V_0 étant donné en ρ_1 et ρ_2, par une fonction partielle $\psi(\rho_1, \rho_2)$ jouissant des conditions de symétrie supposées, on doit avoir

$$(34) \qquad \sum_{i=0}^{i=\infty} S_{2i} . NE_1 E_2 = \psi(\rho_1, \rho_2),$$

N représentant le produit $ME(\rho_0)$. Pour déterminer le coefficient général de la série (34), qui la rende identique à la fonction donnée ψ, on peut encore employer ici la méthode générale d'élimination, que l'on retrouve dans toutes les questions de la théorie analytique de la chaleur : c'est-à-dire, multiplier l'équation (34) par $\sigma d\rho_1 d\rho_2$, et intégrer les deux membres entre les limites de ρ_1 et ρ_2; le facteur σ étant tellement choisi que dans cette intégration tous les termes de la série disparaissent à l'exception d'un seul. Et c'est la nature de ce facteur σ qui est indiquée par le théorème précédent.

§ XIX.

Soient $E_1 E_2$, $E'_1 E'_2$, deux termes différents de la série (34), $2i$ et $2i'$ les valeurs de n, B et B' celles de la constante B qui leur correspondent; et désignons par A et A' les deux produits $2i(2i+1)$, $2i'(2i'+1)$. Les polynomes E_1, E_2, E'_1, E'_2, vérifieront les quatre équations dif-

férentielles suivantes

$$\frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2} = (B - A\rho_1^2)E_1, \quad \frac{d^2E'_1}{d\varepsilon_1^2} = (B' - A'\rho_1^2)E',$$
$$\frac{d^2E_2}{d\varepsilon_2^2} = (A\rho_2^2 - B)E_2, \quad \frac{d^2E'_2}{d\varepsilon_2^2} = (A'\rho_2^2 - B')E'_2;$$

d'où l'on conclut facilement

$$E_1\frac{d^2E'_1}{d\varepsilon_1^2} - E'_1\frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2} = (A - A')\rho_1^2E_1E'_1 - (B - B')E_1E'_1,$$
$$E_2\frac{d^2E'_2}{d\varepsilon_2^2} - E'_2\frac{d^2E_2}{d\varepsilon_2^2} = (B - B')E_2E'_2 - (A - A')\rho_2^2E_2E'_2.$$

Or, si l'on multiplie respectivement ces deux équations par $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$, et qu'on intègre leurs deux membres entre les limites b et c de ρ_1, zéro et b de ρ_2, ou bien zéro et ϖ_1 (44) de ε_1, zéro et ϖ_2 de ε_2, les premiers membres dont les intégrales indéfinies sont $\left(E_1\frac{dE'_1}{d\varepsilon_1} - E'_1\frac{dE_1}{d\varepsilon_1}\right)$, $\left(E_2\frac{dE'_2}{d\varepsilon_2} - E'_2\frac{dE_2}{d\varepsilon_2}\right)$ s'évanouissent aux deux limites de l'intégration, et l'on aura définitivement

$$(35)\quad \begin{cases} (A - A')\int_0^{\varpi_1}\rho_1^2E_1E'_1d\varepsilon_1 = (B - B')\int_0^{\varpi_1}E_1E'_1d\varepsilon_1, \\ (B - B')\int_0^{\varpi_2}E_2E'_2d\varepsilon_2 = (A - A')\int_0^{\varpi_2}\rho_2^2E_2E'_2d\varepsilon_2. \end{cases}$$

Si aucun des facteurs $(A - A')$, $(B - B')$ n'est nul, on aura, en multipliant l'une par l'autre les deux équations (35), faisant passer ensuite dans le premier membre l'intégrale double du second, et divisant par $(A - A')(B - B')$ qui n'est pas nulle par hypothèse,

$$(36)\qquad \int_0^{\varpi_2}\int_0^{\varpi_1}(\rho_1^2 - \rho_2^2)E_1E_2E'_1E'_2d\varepsilon_1d\varepsilon_2 = 0,$$

ou ce qui est la même chose,

$$(37)\qquad \int_0^b\int_b^c \frac{(\rho_1^2 - \rho_2^2)E_1E_2E'_1E'_2d\varepsilon_1d\varepsilon_2}{\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}\sqrt{b^2 - \rho_2^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2}} = 0.$$

Si $A = A'$, sans que $(B - B')$ soit nul, les équations (35) donneront

$$(38)\qquad \int_0^{\varpi_1} E_1 E_1' d\varepsilon_1 = 0, \quad \int_0^{\varpi_2} E_2 E_2' d\varepsilon_2 = 0,$$

d'où l'on conclut

$$(39)\quad \int_0^{\varpi_2} E_2 E_2' d\varepsilon_2 \int_0^{\varpi_1} \rho_1^2 E_1 E_1' d\varepsilon_1 - \int_0^{\varpi_1} E_1 E_1' d\varepsilon_1 \int_0^{\varpi_2} \rho_2^2 E_2 E_2' d\varepsilon_2 = 0,$$

ou encore la relation (36).

Enfin, s'il peut arriver que $B = B'$, sans que $(A - A')$ soit nul, les équations (35) donnent

$$\int_0^{\varpi_1} \rho_1^2 E_1 E_1' d\varepsilon_1 = 0, \quad \int_0^{\varpi_2} \rho_2^2 E_2 E_2' d\varepsilon_2 = 0.$$

d'où l'on conclut encore l'équation (39), ou celle (36).

Ainsi, excepté dans le cas où $(A - A')$ et $(B - B')$ sont nuls à la fois, on a toujours l'équation (36) ou (37). D'où il suit que le facteur σ, jouissant de la propriété définie plus haut (§ XVIII), est

$$(40)\qquad \sigma = \frac{(\varrho_1^2 - \varrho_2^2) E_1 E_2}{\sqrt{\varrho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}\sqrt{b^2 - \varrho_2^2}\sqrt{c^2 - \varrho_2^2}}.$$

§ XX.

L'emploi du facteur σ (40), fait de la manière indiquée au § XVIII, pour chaque terme de la série (34), donne pour valeur de son coefficient :

$$(41)\qquad N = \frac{\displaystyle\int_0^b\int_b^c \frac{(\varrho_1^2 - \varrho_2^2)\,\psi(\varrho_1, \varrho_2)\,E_1 E_2 d\varrho_1 d\varrho_2}{\sqrt{\varrho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}\sqrt{b^2 - \varrho_2^2}\sqrt{c^2 - \varrho_2^2}}}{\displaystyle\int_0^b\int_b^c \frac{(\varrho_1^2 - \varrho_2^2)\,E_1^2 E_2^2 d\varrho_1 d\varrho_2}{\sqrt{\varrho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}\sqrt{b^2 - \varrho_2^2}\sqrt{c^2 - \varrho_2^2}}};$$

la fonction ψ est alors introduite par son développement

$$(42)\quad \psi(\rho_1, \rho_2) = \sum_{i=0}^{i=\infty} S_{2i} \frac{\displaystyle\int_0^b\int_b^c \frac{(\varrho_1^2 - \varrho_2^2)\,\psi(\varrho_1, \varrho_2)\,E_1 E_2 d\varrho_1 d\varrho_2}{\sqrt{\varrho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}\sqrt{b^2 - \varrho_2^2}\sqrt{c^2 - \varrho_2^2}}}{\displaystyle\int_0^b\int_b^c \frac{(\varrho_1^2 - \varrho_2^2)\,E_1^2 E_2^2 d\varrho_1 d\varrho_2}{\sqrt{\varrho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}\sqrt{b^2 - \varrho_2^2}\sqrt{c^2 - \varrho_2^2}}} E_1 E_2;$$

et la série V(27) qui exprime la loi des températures stationnaires, dans l'ellipsoïde à axes inégaux, lorsque les températures données de la surface sont à la fois distribuées symétriquement par rapport aux plans des trois sections principales, est définitivement

$$(45)\quad V = \sum_{i=0}^{i=\infty} S_{2i} \frac{\displaystyle\int_0^b \int_b^c \frac{(\varrho_1^2 - \varrho_2^2)\psi(\varrho_1, \varrho_2) E_1 E_2 d\varrho_1 d\varrho_2}{\sqrt{\varrho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}\sqrt{b^2 - \varrho_2^2}\sqrt{c^2 - \varrho_2^2}}}{\displaystyle\int_0^b \int_b^c \frac{(\varrho_1^2 - \varrho_2^2) E_1^2 E_2^2 d\varrho_1 d\varrho_2}{\sqrt{\varrho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}\sqrt{b^2 - \varrho_2^2}\sqrt{c^2 - \varrho_2^2}}} \frac{E}{E(\varrho_0)} E_1 E_2.$$

Si l'on adopte, pour paramètres des surfaces conjuguées, les transcendantes ε, ε_1, ε_2, et si l'on désigne par ϖ_1 et ϖ_2 les intégrales complètes

$$(44)\quad \varpi_1 = \int_b^c \frac{d\varrho_1}{\sqrt{\varrho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}}, \quad \varpi_2 = \int_0^b \frac{d\varrho_2}{\sqrt{b^2 - \varrho_2^2}\sqrt{c^2 - \varrho_2^2}},$$

le développement de la fonction ψ, que l'on peut considérer comme une fonction de ε_1 et ε_2, peut s'écrire ainsi

$$(45)\quad \psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \sum_{i=0}^{i=\infty} S_{2i} \frac{\displaystyle\int_0^{\varpi_2}\int_0^{\varpi_1} (\varrho_1^2 - \varrho_2^2)\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) E_1 E_2 d\varepsilon_1 d\varepsilon_2}{\displaystyle\int_0^{\varpi_2}\int_0^{\varpi_1} (\varrho_1^2 - \varrho_2^2) E^2 E_2^2 d\varepsilon_1 d\varepsilon_2} E_1 E_2,$$

et la température V est donnée par la série

$$(46)\quad V = \sum_{i=0}^{i=\infty} S_{2i} \frac{\displaystyle\int_0^{\varpi_2}\int_0^{\varpi_1} (\varrho_1^2 - \varrho_2^2)\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) E_1 E_2 d\varepsilon_1 d\varepsilon_2}{\displaystyle\int_0^{\varpi_2}\int_0^{\varpi_1} (\varrho_1^2 - \varrho_2^2) E_1^2 E_2^2 d\varepsilon_1 d\varepsilon_2} \frac{E}{E(\varrho_0)} E_1 E_2;$$

ρ, ρ_1, ρ_2, sont alors les fonctions périodiques désignées par $A(\varepsilon)$, $B(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)$, au § XVI, et E, E_1, E_2, sont des polynomes du degré $2i$, ne contenant que des puissances paires de ces fonctions.

Il est facile de voir, d'après la propriété fondamentale des fonctions E_1 et E_2, définie au § X, que le théorème du § XVIII aura lieu séparément pour tout autre groupe de termes de la série (27) que celui qui vient d'être traité; ou lorsqu'il s'agira d'une autre des huit fonctions partielles dans lesquelles la valeur la plus générale

de $\varphi(\rho_1, \rho_2)$ peut toujours être décomposée. Ce théorème ayant lieu, la solution correspondante au nouveau groupe s'achèvera comme celle du premier; le développement de la nouvelle fonction partielle, et la série V correspondante, auront encore les formes (42) et (43), ou (45) et (46), en changeant convenablement les indices. Enfin la solution générale, ou la valeur totale de V, s'obtiendra en faisant la somme des huit valeurs partielles ainsi obtenues.

§ XXI.

Les intégrales définies qu'il sera nécessaire d'évaluer, pour que les températures puissent être calculées en nombre, à l'aide de la série (43) ou (46), ne seront pas nécessairement compliquées de transcendantes elliptiques, exigeant l'emploi de tables nouvelles, comme les formes (45) et (46) semblent l'indiquer.

Si l'on désigne pour simplifier $\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}$ et $\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{c^2-\rho^2}$, ou bien $\sqrt{-\rho_1^4+q\rho_1^2-p}$ et $\sqrt{\rho_2^4-q\rho_2^2+p}$, par η_1 et η_2, les intégrales définies à évaluer auront toutes les formes $\int_b^c \frac{P_1 d\rho_1}{\eta_1}$, $\int_0^b \frac{P_2 d\rho_2}{\eta_2}$, dans lesquelles P_1 et P_2 seront des fonctions entières et rationnelles de ρ_1^2 et ρ_2^2; elles seront donc respectivement les sommes d'un nombre fini d'intégrales de la forme $\int_b^c \frac{\rho_1^{2k} d\rho_1}{\eta_1}$, $\int_0^b \frac{\rho_2^{2k} d\rho_2}{\eta_2}$. Or, on démontre facilement, à l'aide de l'intégration par partie, les deux formules

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} \int_b^c \frac{\rho_1^{2k} d\rho_1}{\eta_1} &= \frac{2k-2}{2k-1} q \int_b^c \frac{\rho_1^{2k-2} d\rho_1}{\eta_1} - \frac{2k-3}{2k-1} p \int_b^c \frac{\rho_1^{2k-4} d\rho_1}{\eta_1}, \\ \int_0^b \frac{\rho_2^{2k} d\rho_2}{\eta_2} &= \frac{2k-2}{2k-1} q \int_0^b \frac{\rho_2^{2k-2} d\rho_2}{\eta_2} - \frac{2k-3}{2k-1} p \int_0^b \frac{\rho_2^{2k-4} d\rho_2}{\eta_2}, \end{aligned}\right.$$

et si, outre les intégrales complètes (44), on désigne par ω_1 et ω_2 celles-ci

$$(48)\quad \omega_1 = \int_b^c \frac{\rho_1^2 d\rho_1}{\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}}, \quad \omega_2 = \int_0^b \frac{\rho_2^2 d\rho_2}{\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}},$$

les formules (47) donneront aisément, par des réductions successives,

$$\int_b^c \frac{\rho_1^{2k} d\rho_1}{\eta_1} = m\omega_1 - n\varpi_1, \quad \int_0^b \frac{\rho_2^{2k} d\rho_2}{\eta_2} = m\omega_2 - n\varpi_2,$$

m et n étant des fonctions rationnelles et entières de p et q (21) ou de b^2 et c^2; lesquelles seront les mêmes pour l'intégrale en ρ_1, et pour celle en ρ_2, à cause de l'identité des coefficients dans les formules (47).

Il suit de là, que si P_1 et P_2 sont composés de la même manière et avec les mêmes coefficients, l'un en ρ_1^2, l'autre en ρ_2^2, on aura

$$\int \frac{P_1 d\rho_1}{\eta_1} = M\omega_1 - N\varpi_1, \quad \int \frac{P_2 d\rho_2}{\eta_2} = M\omega_2 - N\varpi_2,$$

M et N étant pour les deux intégrales les mêmes fonctions de b^2 et c^2; et pareillement

$$\int \frac{\rho_1^2 P_1 d\rho_1}{\eta_1} = P\omega_1 - Q\varpi_1, \quad \int \frac{\rho_2^2 P_2 d\rho_2}{\eta_2} = P\omega_2 - Q\varpi_2,$$

P et Q étant encore les mêmes pour les deux intégrales.

Une combinaison facile des quatre dernières équations donne

$$\int_0^b \int_b^c \frac{(\rho_1^2 - \rho_2^2) P_1 P_2 d\rho_1 d\rho_2}{\eta_1 \eta_2} = (QM - PN)(\omega_1 \varpi_2 - \omega_2 \varpi_1),$$

et comme on a, ainsi que je l'ai démontré dans mon Mémoire sur les surfaces isothermes,

$$(\omega_1 \varpi_2 - \omega_2 \varpi_1) = \int_0^b \int_b^c \frac{(\rho_1^2 - \rho_2^2) d\rho_1 d\rho_2}{\eta_1 \eta_2} = \frac{\pi}{2},$$

il s'ensuit que

$$(49) \quad \int_0^b \int_b^c \frac{(\rho_1^2 - \rho_2^2) P_1 P_2 d\rho_1 d\rho_2}{\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}\sqrt{b^2 - \rho_2^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2}} = \frac{\pi}{2}(QM - PN)$$

C'est-à-dire que P_1 et P_2 étant des fonctions rationnelles et entières, composées de la même manière et avec les mêmes coefficients, l'une en ρ_1^2, l'autre en ρ_2^2, l'intégrale définie double (49) est égale au rapport du diamètre à la circonférence du cercle, multiplié par une fonction rationnelle et entière de b^2 et c^2.

§ XXII.

Le théorème précédent démontre directement que dans les coefficients des différents termes de la série (43) ou (46), les dénominateurs ne contiendront d'autre nombre transcendant que π. D'un autre côté, si la fonction $\psi(\rho_1, \rho_2)$ est composée d'un certain nombre de termes de la forme $P_1 P_2$, symétriques en ρ_1 et ρ_2, ce qui devra avoir lieu dans le plus grand nombre de cas, les intégrales définies des numérateurs, dans les coefficients dont il s'agit, seront encore soumises à la loi exprimée par la formule (49), et le facteur $\frac{\pi}{2}$ disparaîtra comme facteur commun.

Ainsi la complication, qui résulte de ce que les intégrales définies des séries (45) et (46) sont réductibles en transcendantes elliptiques, n'est qu'apparente, et l'emploi de ces séries ne nécessitera aucune table nouvelle, lors des évaluations numériques, à moins que la loi des températures à la surface n'introduise elle-même des nombres transcendants.

Il reste à étudier en détail les propriétés des fonctions E, E_1, E_2, celles des équations donnant les valeurs de B; il faut aussi évaluer généralement le dénominateur constant du terme général des séries (43) ou (46), afin que la solution trouvée dans ce Mémoire devienne d'un usage commode, et pour qu'on puisse en déduire d'une manière simple les conséquences relatives à la question physique. Mais cette recherche exige de trop longs développements, et nous limiterons ici ce premier Mémoire déjà fort étendu.

Sur une nouvelle Méthode pour la détermination des Intégrales multiples ;

PAR M. LEJEUNE-DIRICHLET (*).

On sait que l'évaluation ou même la réduction des intégrales multiples présente généralement de très grandes difficultés, lorsque les inégalités de condition qui définissent l'étendue des intégrations, renferment à la fois plusieurs des variables. En m'occupant de quelques questions de Physique mathématique qui dépendent, en dernière analyse, de l'évaluation d'une classe d'intégrales multiples d'un ordre indéfini, j'ai été conduit à une méthode qui paraît diminuer, dans beaucoup de cas, les difficultés dont je viens de parler. Cette méthode consiste simplement à multiplier l'expression qu'il s'agit d'intégrer par un facteur dont la valeur est égale à l'unité dans l'étendue que les intégrations doivent embrasser, et qui s'évanouit en dehors de cette étendue. L'expression différentielle ainsi modifiée, pouvant être intégrée entre des limites constantes et très simples, telles que o et ∞, ou $-\infty$ et ∞, la question sera le plus souvent beaucoup plus facile à traiter. C'est ce procédé que je vais appliquer à quelques problèmes particuliers. Pour premier exemple, je choisirai la question si célèbre de l'attraction des ellipsoïdes homogènes. La méthode appliquée à ce problème présente cela de remarquable, que la solution pour les deux cas d'un point extérieur et d'un point intérieur, qu'on avait toujours ramenés du premier au second, ou traités par des moyens tout-à-fait différents, résulte d'une analyse uniforme, qui s'étend généralement à toute loi d'attraction proportionnelle à une puissance quelconque entière ou fractionnaire de la distance. La même

(*) Cet article est extrait des *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*. Voyez tome VIII, page 156. (J. L.)

analyse ramène ce problème aux quadratures, lorsque la densité, au lieu d'être constante, est une fonction quelconque rationnelle et entière des trois coordonnées rectangulaires; mais, pour plus de simplicité, je supposerai la densité constante et égale à l'unité.

Soient x, y, z, les coordonnées d'un point quelconque de la masse attirante, a, b, c celles du point attiré. Posons $\rho^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$ et soit $\frac{1}{\rho^p}$ la loi de l'attraction, la constante p étant supposée comprise entre 2 et 3, cas auquel il est facile de ramener tous les autres. Cela posé, la question se réduit à déterminer l'intégrale triple suivante, dont le coefficient différentiel pris par rapport à a, donne la composante de l'attraction parallèle à l'axe des x, que je désignerai par A :

$$-\frac{1}{p-1}\iiint\frac{dxdydz}{\rho^{p-1}} \quad (1), \qquad \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)+\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2<1.$$

Or, comme l'intégrale $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cos g\varphi d\varphi$ est égale à l'unité ou à zéro, suivant que la constante positive g est inférieure ou supérieure à l'unité, on conclut que l'intégrale (1) est la partie réelle de celle-ci :

$$-\frac{2}{\pi(p-1)}\int_0^\infty d\varphi.\frac{\sin\varphi}{\varphi}\iiint_e\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2+\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2\right]\varphi\sqrt{-1}\,\frac{dxdydz}{\rho^{p-1}};$$

les intégrations par rapport aux variables x, y, z pouvant maintenant s'étendre depuis $-\infty$ jusqu'à ∞. Pour obtenir l'intégrale triple relative à ces variables, on exprimera la fraction $\frac{1}{\rho^{p-1}}=\frac{1}{(\rho^2)^{\frac{p-1}{2}}}$, par une intégrale définie, au moyen de la formule connue d'Euler, que M. Poisson a démontrée et qui suppose les constantes q et r positives, et de plus $r<1$:

$$\int_0^\infty e^{q\psi\sqrt{-1}}\psi^{r-1}d\psi=\frac{\Gamma(q)\,e^{\frac{r\pi}{2}\sqrt{-1}}}{q^r} \qquad (2).$$

Il viendra ainsi, en remplaçant ρ^2 par sa valeur,

$$-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{e^{-(p-1)\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}}{(p-1)\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}\int_0^\infty d\varphi.\frac{\sin\varphi}{\varphi}\int_0^\infty d\Psi.\Psi^{\frac{p-1}{2}-1}e^{(a^2+b^2+c^2)\Psi}\,\mathrm{U},$$

U désignant, pour abréger, le produit de trois intégrales simples, dont celle relative à x est, en vertu d'une formule connue qui dérive de l'équation (2),

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[\left(\Psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}\right)x^2-2a\Psi x\right]\sqrt{-1}}\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{\Psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}}}\,e^{-\frac{a^2\Psi^2}{\Psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}}\sqrt{-1}}\cdot\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

En substituant cette valeur et celles des deux autres intégrales de forme analogue, remplaçant ensuite la variable Ψ par une autre s telle que $\Psi=\frac{\varphi}{s}$, différentiant par rapport à a, et observant qu'on a

$$\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^3=\sqrt{-1}\,e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}},$$

on trouvera

$$\frac{4a}{\alpha^2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}\,\frac{e^{-(p-2)\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}}{p-1}\int_0^\infty\frac{ds\,s^{1-\frac{p}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}\int_0^\infty e^{\varphi\left(\frac{a^2}{\alpha^2+s}+\frac{b^2}{\beta^2+s}+\frac{c^2}{\gamma^2+s}\right)\sqrt{-1}}\,\frac{\sin\varphi}{\varphi^{2-\frac{p}{2}}}\,dz.$$

Cette expression devant être réduite à sa partie réelle, tout revient à avoir celle de $e^{-(p-2)\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}\int^\infty e^{\sigma\varphi\sqrt{-1}}\,\frac{\sin\varphi}{\varphi^{2-\frac{p}{2}}}\,d\varphi$, en posant, pour abréger,

$$\sigma=\frac{a^2}{\alpha^2+s}+\frac{b^2}{\beta^2+s}+\frac{c^2}{\gamma^2+s}.$$

Or, cette intégrale, en y remplaçant $\sin\varphi$ par des exponentielles imaginaires, sera immédiatement donnée par l'équation (2), en ayant

soin d'observer que le second membre de cette équation doit être remplacé par $\frac{\Gamma(r)\, e^{-\frac{r}{2}\sqrt{-1}}}{(-q)^r}$, lorsque q a une valeur négative. On trouve ainsi que la partie réelle qu'il s'agit d'obtenir est zéro, ou

$$-\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)\sin\frac{p\pi}{2}}{2(1-\sigma)^{\frac{p}{2}-1}} = \frac{\pi}{2\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)}\,\frac{1}{(1-\sigma)^{\frac{p}{2}-1}},$$

suivant que $\sigma > 1$ ou $\sigma < 1$.

I. Si le point est intérieur, on aura $\frac{a^2}{\alpha} + \frac{b}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma} < 1$, et par conséquent aussi $\sigma < 1$, la variable s étant positive. Il viendra donc simplement

$$= \frac{2a\pi}{\alpha^2(p-1)}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)}\int_0^\infty \frac{ds\, s^{1-\frac{p}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}\left(1-\frac{a^2}{\alpha^2+s}-\frac{b^2}{\beta^2+s}-\frac{c^2}{\gamma^2+s}\right)^{1-\frac{p}{2}}$$

II. Si le point est extérieur, on déterminera la racine positive unique λ de l'équation $\sigma = 1$, et l'on aura évidemment $\sigma > 1$ ou $\sigma < 1$, suivant que $s < \lambda$ ou $s > \lambda$. L'expression de A sera donc, dans ce cas,

$$= \frac{2a\pi}{\alpha'^2(p-1)}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)}\int_0^\infty \frac{ds\, s^{1-\frac{p}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha'^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta'^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma'^2}\right)}}\left(1-\frac{a'^2}{\alpha'^2+s}-\frac{b'^2}{\beta'^2+s}-\frac{c'^2}{\gamma'^2+s}\right)^{1-\frac{p}{2}}$$

Si dans cette dernière expression on écrit $\lambda + s$ au lieu de s, et qu'on fasse

$$\alpha^2+\lambda = \alpha'^2,\quad a' = \frac{a\alpha}{\alpha'},\quad \beta^2+\lambda = \beta'^2,\ b' = \frac{b\beta}{\beta'},\quad \gamma^2+\lambda = \gamma'^2,\quad c' = \frac{c\gamma}{\gamma'},$$

elle prendra la même forme que celle qui se rapporte au point intérieur, comme cela doit être en vertu du théorème des points correspondants, dû à M. Ivory, et qui, comme M. Poisson en a déjà fait

la remarque, s'étend à toutes les lois d'attraction en fonction de la distance. Il est sans doute inutile d'ajouter que l'analyse que nous venons de développer, s'applique à toute intégrale dont la forme est semblable à celle de l'intégrale (1), et quel que soit le nombre des variables qu'elle puisse renfermer.

Comme second exemple, j'indiquerai l'intégrale

$$V = \int x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \ldots dx dy dz \ldots,$$

qui doit être étendue à toutes les valeurs positives de $x, y, z, \ldots$ telles qu'on ait

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r + \ldots < 1,$$

les constantes $a, b, c, \ldots p, q, r, \ldots \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ étant également positives. Par une analyse toute semblable, on parvient à cette expression très simple, qu'on peut aussi obtenir par d'autres moyens, et qui renferme un grand nombre de résultats relatifs aux volumes, aux centres de gravité, moments d'inertie, etc. :

$$V = \frac{\alpha^a \beta^b \gamma^c \ldots}{pqr} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right) \Gamma\left(\frac{b}{q}\right) \Gamma\left(\frac{c}{r}\right) \ldots}{\Gamma\left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \ldots\right)}.$$

En terminant, je ferai observer que l'intégrale transformée que l'on obtient au moyen du procédé indiqué, peut, dans beaucoup de cas, devenir indéterminée, à cause des limites infinies. Pour éviter les difficultés et même les inexactitudes que cette circonstance pourrait faire naître, on aura recours à l'artifice ingénieux dont MM. Poisson et Cauchy ont fait usage dans différentes recherches, et qui consiste à remplacer l'intégrale proposée par une autre, dont la première puisse être considérée comme la limite, et qui reste complétement déterminée, lorsqu'on lui applique la méthode dont nous venons de donner quelques exemples.

OBSERVATIONS

Sur un Mémoire de M. Ivory :

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

1. Dans les *Transactions philosophiques* (année 1838), on trouve un Mémoire de M. Ivory sur l'équilibre des ellipsoïdes homogènes et liquides dont les molécules s'attirent en raison inverse du carré des distances et tournent autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire constante. L'auteur rappelle d'abord le théorème remarquable de M. Jacobi, en vertu duquel les trois axes de ces ellipsoïdes peuvent être inégaux; il cite également la démonstration que j'en ai donnée dans le XXIIIe cahier du *Journal de l'École Polytechnique;* puis il discute les deux équations transcendantes dont la solution du problème dépend, équations qui lient entre elles les excentricités des sections principales et la force centrifuge.

La question intéressante dont s'est occupé M. Ivory m'avait été autrefois proposée par M. Poisson; mais d'autres travaux ne m'ayant pas permis de la traiter avec tout le soin qu'elle mérite, j'avais cru devoir l'abandonner. Cependant j'avais obtenu quelques résultats simples qui se trouvent en contradiction directe avec les conclusions précises de l'illustre géomètre anglais. J'espère qu'on me pardonnera de publier aujourd'hui ces résultats, tout incomplets qu'ils sont.

2. Conservons les notations dont j'ai fait usage dans le XXIIIe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. L'une des deux équations

transcendantes, dont nous venons de parler, sera

$$\text{(I)} \qquad \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)(1-\lambda^2\lambda'^2x^2)\,dx}{H^2} = 0,$$

H représentant le radical

$$\sqrt{(1+\lambda^2x^2)(1+\lambda'^2x^2)},$$

et les quantités λ^2, λ'^2 étant liées aux demi-axes k, k', k'', par les relations

$$\lambda^2 = \frac{k'^2-k^2}{k^2}, \quad \lambda'^2 = \frac{k''^2-k^2}{k^2}.$$

L'équation (I) exige que l'on ait

$$\lambda^2\lambda'^2 > 1, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{k^2} > \frac{1}{k'^2} + \frac{1}{k''^2};$$

car si le produit $\lambda^2\lambda'^2$ était < 1, les éléments de l'intégrale qui compose son premier membre seraient tous de même signe, et ne pourraient avoir zéro pour somme. Ainsi les axes $2k'$, $2k''$ de l'équateur sont plus grands que l'axe $2k$ autour duquel le mouvement s'effectue : par suite les quantités λ^2, λ'^2 sont positives.

Représentons par λ, λ' les valeurs absolues des racines carrées de λ^2, λ'^2, et soit, pour fixer les idées, $\lambda > \lambda'$. Posons ensuite

$$\lambda\lambda' = p, \quad \lambda - \lambda' = \tau:$$

on aura $p > 1$, $\tau > 0$, et l'équation (1) prendra la forme

$$(1) \qquad \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)(1-p^2x^2)\,dx}{[(1+px^2)^2+\tau^2x^2]^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Elle déterminera la valeur de p en fonction de τ^2. Lorsqu'on attribue à τ^2 une valeur positive quelconque, il existe toujours au moins une valeur de p correspondante, puisqu'en faisant $p = 1$ et $p = \infty$ dans le premier membre de l'équation (1), on trouve évidemment deux résultats de signes contraires.

3. Maintenant, comme p varie lorsque l'on fait varier τ^2, il est naturel de se demander, 1°. S'il existe pour p une limite supérieure; 2°. Si la plus petite valeur de p est égale à 1 ou > 1.

M. Ivory, dans son Mémoire, arrive à cette conclusion que la valeur de p reste toujours comprise entre l'unité et une certaine limite supérieure p_0, qui répond à $\tau = 0$, en sorte que pour des valeurs de τ^2 croissantes depuis 0 jusqu'à ∞, p va en décroissant depuis p_0 jusqu'à l'unité.

Mais je vais montrer au contraire, 1°. Que p_0 est la plus petite et non pas la plus grande valeur de p; 2°. Que p n'a pas de limite supérieure et peut croître jusqu'à l'infini.

4. Étudions en premier lieu l'équation qu'on obtient lorsqu'on fait $\tau = 0$ dans l'équation (1) : celle-ci devenant alors

$$(2) \qquad \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)(1-p^2x^2)\,dx}{(1+px^2)^3} = 0,$$

l'intégration dont son premier membre dépend peut être effectuée : on obtient ainsi

$$\text{arc tang}\,\sqrt{p} = \frac{3\sqrt{p} + 13p\sqrt{p}}{3 + 14p + 3p^2},$$

et l'on constate aisément l'existence d'une racine p, peu différente de 2 : c'est la quantité désignée ci-dessus par p_0.

L'équation (2) n'a pas de racine réelle autre que $p = p_0$. Pour le prouver, posons $\sqrt{p} = \text{tang}\,\gamma$: les limites de p étant 1 et ∞, celles de γ seront $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$; et nous aurons

$$\gamma = \frac{(3\cos^2\gamma + 13\sin^2\gamma)\sin\gamma\cos\gamma}{3(\sin^4\gamma + \cos^4\gamma) + 14\sin^2\gamma\cos^2\gamma}:$$

en observant que $\sin^4\gamma + \cos^4\gamma = 1 - 2\sin^2\gamma\cos^2\gamma$, et introduisant les lignes trigonométriques des angles 2γ, 4γ, il nous viendra

$$(3) \qquad \gamma(6 + 4\sin^2 2\gamma) - 8\sin 2\gamma + \frac{5\sin 4\gamma}{2} = 0.$$

Or la dérivée, par rapport à γ, du premier membre de cette équation peut se mettre sous la forme

$$8\gamma \sin 4\gamma + 6 + 4(1 - \cos^2 2\gamma) - 16 \cos 2\gamma + 10(2\cos^2 2\gamma - 1),$$

c'est-à-dire,

$$8\gamma \sin 4\gamma - 16 \cos 2\gamma (1 - \cos 2\gamma),$$

ou

$$8\gamma \sin 4\gamma - 32 \cos 2\gamma \,.\, \sin\gamma \cos\gamma \,.\, \operatorname{tang}\gamma,$$

ou enfin

$$8 \sin 4\gamma (\gamma - \operatorname{tang}\gamma):$$

entre les limites $\gamma = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, elle est évidemment positive comme résultant du produit de deux facteurs négatifs. Donc le premier membre de l'équation (3) est une fonction croissante de γ, qui ne peut s'annuler qu'une fois.

Par suite en nommant V_0 le premier membre de l'équation (2), V_0 sera une fonction de p qui ne pourra aussi s'annuler qu'une fois.

J'ajoute que la fonction V_0 en s'évanouissant passe du positif au négatif: pour toute valeur de $p < p_0$, on a $V_0 > 0$, mais dès que p surpasse p_0, on a $V_0 < 0$.

5. Soit $\tau^2 = \sigma$, et

$$V = \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)(1-p^2x^2)\,dx}{[(1+px^2)^2 + \sigma x^2]^{\frac{5}{2}}};$$

V sera précisément le premier membre de l'équation (1). La valeur de la dérivée partielle $\frac{dV}{d\sigma}$ est exprimée par

$$\frac{dV}{d\sigma} = -\frac{3}{2}\int_0^1 \frac{x^4(1-x^2)(1-p^2x^2)\,dx}{[(1+px^2)^2 + \sigma x^2]^{\frac{5}{2}}}.$$

Je la multiplie par $\sigma + (1+p)^2$, puis je l'ajoute à celle de V multipliée elle-même par $\frac{3}{2}$: après les réductions convenables, je trouve

$$(4) \qquad [\sigma + (1+p)^2]\frac{dV}{d\sigma} + \frac{3}{2}V = \frac{3}{2}L^2,$$

L^2 désignant l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)^2(1-p^2x^2)^2\,dx}{[(1+px^2)^2 + \sigma x^2]^{\frac{5}{2}}},$$

dont la valeur est essentiellement positive.

L'équation (4) peut être mise sous la forme

$$(5)\qquad \frac{d.[\sigma+(1+p)^2]^{\frac{3}{2}}V}{d\sigma} = \frac{3}{2}[\sigma+(1+p)^2]^{\frac{1}{2}}L^2.$$

En l'intégrant, désignant comme ci-dessus, par V_0 la valeur de V qui répond à $\sigma = 0$, et posant $\frac{3}{2}[\sigma+(1+p)^2]^{\frac{1}{2}}L^2 = S^2$, elle fournit

$$(6)\qquad [\sigma+(1+p)^2]^{\frac{3}{2}}V = (1+p)^3V_0 + \int_0^\sigma S^2 d\sigma.$$

L'équation (6) conduit à plusieurs conséquences utiles.

D'abord, on voit que les valeurs de p qui rendent $V_0 > 0$, rendent *à fortiori* $V > 0$. Ainsi les racines p de l'équation (1) ont pour limite inférieure p_0.

On voit ensuite que le produit

$$[\sigma+(1+p)^2]^{\frac{3}{2}}V$$

est une fonction croissante de σ, et que par conséquent pour une valeur donnée de p, il existe au plus une valeur de σ satisfaisant à l'équation (1).

6. Pour montrer qu'à toute valeur de $p > p_0$ répond une valeur de σ vérifiant l'équation (1), j'observe qu'en faisant $\sigma = 0$, V se réduit à V_0 et prend une valeur négative : il suffira donc de prouver que pour de très grandes valeurs de σ ou de τ, la fonction V est positive.

Le produit

$$x^2(1-x^2)(1-p^2x^2)$$

est égal à

$$x^2 - x^4[1+p^2(1-x^2)].$$

Ainsi en posant

$$M = \int_0^1 \frac{x^2dx}{[(1+px^2)^2+\tau^2x^2]},$$

$$N = \int_0^1 \frac{x^4[(1+p^2(1-x^2)]\,dx}{[(1+px^2)^2+\tau^2x^2]},$$

on a $V = M - N$. Les éléments des intégrales M, N sont tous positifs, et la variable x reste comprise entre 0 et 1 : d'après cela on trouve

aisément

$$M > \int_0^1 \frac{x^2 dx}{[(1+p)^2 + \tau^2 x^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$N < \int_0^1 \frac{x^4(1+p^2)\,dx}{\tau^3 x^3},$$

c'est-à-dire,

$$N < \frac{1+p^2}{2\tau^3}$$

et

$$M > \frac{1}{\tau^3} \log\left[\frac{\tau + \sqrt{(1+p)^2+\tau^2}}{1+p}\right] - \frac{1}{\tau^2\sqrt{(1+p)^2+\tau^2}} :$$

cette dernière inégalité entraîne *à fortiori* la suivante :

$$M > \frac{1}{\tau^3} \log\left[\frac{\tau + \sqrt{(1+p)^2+\tau^2}}{1+p}\right] - \frac{1}{\tau^3} ;$$

par suite on a

$$V > \frac{1}{\tau^3}\left[\log\left(\frac{\tau + \sqrt{(1+p)^2+\tau^2}}{1+p}\right) - \frac{p^2+3}{2}\right],$$

ce qui donne $V > 0$ pour des valeurs de τ suffisamment grandes.

Ainsi pour toute valeur de p supérieure à p_0, il existe une seule valeur de τ^2 satisfaisant à l'équation (1).

Cette conclusion est tout-à-fait contraire à celle de M. Ivory ; mais cela n'a rien d'étonnant, car M. Ivory admet que lorsqu'on a $V=0$, la dérivée $\frac{dV}{d\sigma}$ ou $\frac{dV}{d(\tau)^2}$ est négative; or l'équation (4) nous montre au contraire que cette dérivée est positive pour toutes les valeurs de p et de σ qui donnent $V=0$.

Sur le nombre de normales qu'on peut mener par un point donné à une surface algébrique;

PAR M. TERQUEM.

THÉORÈME. Le nombre de normales qu'on peut mener par un point donné à une surface algébrique de degré m est égal à $m^3 - m^2 + m$.

Démonstration. Soit

$$z^m + z^{m-1}\rho_1 + z^{m-2}\rho_2 + \ldots z^{m-n}\rho_n + \ldots + z\rho_{m-1} + \rho_m = 0, \quad (1)$$

l'équation d'une surface algébrique rapportée aux axes rectangulaires x, y, z; ρ_n est une fonction entière en x, y, du degré n; prenons pour origine le point donné. Les équations de la normale passant par l'origine, sont :

$$\left.\begin{aligned} x + z\frac{dz}{dx} &= 0, \\ y + z\frac{dz}{dy} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Ces équations, chacune du degré m, combinées avec l'équation (1) du même degré, donnent une équation finale qui ne peut dépasser m^3; ainsi le nombre des normales ne peut dépasser m^3; mais cette équation renferme en outre $m^2 - m$ racines étrangères à la question. En effet, différentiant l'équation (1), successivement par rapport à x et z, et par rapport à y et z, on obtient

$$\begin{aligned} Qdz + Rdx &= 0, \\ Qdz + Sdy &= 0; \end{aligned}$$

Q, R, S, sont des fonctions entières en x, y, z: par-là les équations (2) deviennent

$$\left.\begin{aligned} Qx &= zR, \\ Qy &= zS. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Il est aisé de voir qu'en faisant $z = 0$, la fonction Q se réduit à ρ_{m-1} et le premier membre de l'équation (1) à ρ_m: donc en posant les équations

$$\begin{aligned} z &= 0, \\ \rho_{m-1} &= 0, \\ \rho_m &= 0; \end{aligned}$$

on en déduit $m(m-1)$, valeurs de x et y qui satisfont aux trois équations (1) et (3), ces valeurs correspondent à des points de la surface situés dans le plan xy et les parallèles à l'axe des z qui passent par ces points sont tangentes à la surface. Mais ces points sont étrangers à la question : donc le nombre des normales est $m^3 - m^2 + m$.

Observation I. L'équation du degré m^3 résultant de l'élimination entre les trois équations (1) et (3), outre les racines étrangères, peut avoir des racines imaginaires; ce qui dans des positions particulières du point donné peut réduire encore le nombre de normales possibles. Lorsque le point donné est un centre de courbure, l'équation renferme des racines égales.

Observation II. Le nombre de tangentes qu'on peut mener par un point donné à une surface algébrique, augmenté du nombre de tangentes qu'on peut mener à une ligne algébrique de même degré, est toujours égal au cube de ce degré.

Observation III. Dans les lignes algébriques, l'équation finale n'est pas compliquée de racines étrangères. De sorte que le nombre de normales qu'on peut mener par un point donné à une courbe de degré m est m^2.

Sur un symbole combinatoire d'Euler et son utilité dans l'Analyse;

PAR M. TERQUEM.

1. PROBLÈME. Former les combinaisons m à m des p premiers nombres de la suite naturelle, d'après cette loi : en allant de gauche à droite, les nombres de chaque arrangement doivent procéder en augmentant : le premier à gauche doit être impair; le second pair; le troisième impair et ainsi de suite en alternant. On suppose de plus que p et m sont tous deux simultanément pairs ou impairs.

Solution. Le premier arrangement est évidemment $1, 2, 3, \ldots m-2.m-1.m$; on augmente successivement m de deux unités, sans rien changer aux autres nombres jusqu'à ce qu'on arrive à l'arrangement $1, 2, 3 \ldots m-1.p$, le suivant est $1, 2, 3 \ldots m+1.m+3$; on augmente successivement $m+3$ de deux unités, jusqu'à ce qu'on ait l'arrangement $1, 2, 3 \ldots m+1.p-1$, etc., etc.; enfin le dernier arrangement est $m.m+1.m+2 \ldots 2m-1$.

Exemple. $p=5$: on aura pour

$m=1$, les arrangements	1, 3, 5;
$m=3$	123,
	125,
	145,
	345,
$m=5$	12345.

2. D'après ce mode de formation, il est aisé de trouver que le nombre d'arrangements, pour les p nombres pris m à m est

$$\frac{(t-1)(t-2)(t-3)\ldots(t-m)}{1.2.3\ldots m}(1) \quad \text{où} \quad t=\frac{p-m}{2}. \qquad \text{(A)}$$

3. Remplaçant, dans cette expression, p et m, par $2p+1$ et $2m+1$ et faisant successivement $m=0, 1, 2, 3 \ldots p$, on aura la suite

$$p+1,\ \frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3},\ \frac{(p-1)p(p+1)(p+2)(p+3)}{1.2.3.4.5}.\text{etc.}\ldots : \text{(B)}$$

la somme de tous ces termes est le coefficient de α^p dans le développement de $\frac{1}{(1-\alpha)^2-\alpha}$; désignant par α', α'' les deux racines du dénominateur de cette fraction égalé à zéro, on aura pour le terme sommatoire de la série (B), l'expression $\frac{\alpha'^{p+1}-\alpha''^{p+1}}{\alpha'-\alpha''}$; $\alpha'-\alpha''=\sqrt{5}$.

4. Remplaçant dans (A), p et m, par $2p$ et $2m$; et faisant $m=0$, $1, 2, 3, \ldots p$, on trouve

$$1,\ \frac{p(p+1)}{1.2},\ \frac{p-1.p.p+1\ p+2}{1.2.3.4},\ \frac{p-2.p-1.p.p+1.p+2.p+3}{1.2.3.4.5.6}.\ \text{etc}, \text{(C)}$$

la somme de ces termes est le coefficient de α^p dans le développement de $\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)^2-\alpha}$; donc le terme sommatoire de la suite (C) est....

$$\frac{\alpha''^{p+1}-\alpha'^{p+1}-(\alpha''^p-\alpha'^p)}{\alpha''-\alpha}.$$

5. Soient B′ et C′ ce que deviennent B et C lorsque p est remplacé par $p+1$: on a l'identité $B+C'=B'$; on peut donc réunir les deux suites en une seule où chaque terme est égal à la somme des deux précédents, série récurrente résultant du développement de $\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\alpha^2}$; γ et δ étant les racines du dénominateur égalé à zéro, on a pour le terme général

$$(-1)^n\frac{[\gamma^n-\delta^n+\delta^{n-1}-\gamma^{n-1}]}{\delta-\gamma} \text{ où } \delta=2\sin 18^\circ,\ \gamma=-\frac{1}{2}\text{séc.}18^\circ,\ \delta-\gamma=\sqrt{5}.$$

6. Si l'on désigne par $(1.p)$, la somme de toutes les combinaisons, faites selon la loi énoncée ci-dessus, on a évidemment

$(1.p) = p(1.p-1) + (1.p-2)$ (D), et où $(0) = 1$; de là, on tire directement l'identité précédente.

7. Si dans $(1.p-1)$, on augmente chaque nombre d'une unité, on a l'expression combinatoire $(2.p)$; en général, si dans $(1.p-m)$, on ajoute m à chaque nombre, on a l'expression $(m+1.p)$.

8. L'équation (D) fournit cette suite d'équations

$$\begin{aligned}
(0) &= 1,\\
(1.1) &= 1,\\
(1.2) &= 2(1) + (0),\\
(3) &= 3(2) + (1),\\
(1.p) &= p(1.p-1) + (1.p-2),
\end{aligned}$$

l'on en tire par des substitutions successives

$$(1.p) = p(1.p-m)(p-m+1.p) + (1.p-m-1)(p-m+2.p). \quad \text{(E)}$$

et de là

$$(2.p) = (2.p-m)(p-m+1.p) + (2.p-m-1)(p-m+2.p). \quad \text{(F)}$$

Éliminant de ces deux équations $(p-m+1.p)$, il vient

$$\begin{aligned}
&(1.p)(2.p-m) - (2.p)(1.p-m)\\
&= (p-m+2.p)[(1.p-m-1)(2.p-m) - (2.p-m-1)(1.p-m)]. \quad \text{(G)}
\end{aligned}$$

9. Faisant dans cette dernière équation $m = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
&(1.p)(2.p-1) - (2.p)(1.p-1) = (1.p-2)(2.p-1) - (2.p-2)(1.p-1)\\
&= (1.p-2)(2.p-3) - (2.p-2)(1.p-3) = \ldots = (-1)^p, \quad \text{(H)}
\end{aligned}$$

donc l'équation G équivaut à celle-ci

$$(1.p)(2.p-m) - (2.p)(1.p-m) = (-1)^p.(p-m+2.p). \quad \text{(I)}$$

10. Soit la fraction continue, $q_1 + 1 : q_2 + 1 : q_3 + 1 : q_4 + \ldots + 1 : q_p$, la valeur de cette fraction est $\frac{(1.p)}{(2.p)}$.

Mais, dans cette expression il faut remplacer les nombres, par les quantités correspondantes; savoir 1 par q_1, 2 par $q_2, \ldots$ p par q_p.

Euler s'est servi de cet algorithme pour développer les propriétés des fractions continues. (Mémoires de Pétersbourg, 1760—61); dans les traités élémentaires, on ne trouve que l'équation (H), et l'on s'en sert pour démontrer que la fraction $\frac{(1.p)}{(2.p)}$ est irréductible, et que le numérateur $(1.p)$ est premier avec le numérateur voisin $(1.p-1)$; mais l'équation générale (I) montre que les numérateurs $(1.p)$ et $(1.p-m)$ sont premiers entre eux, lorsque $(p-m+2.p)$ est un nombre premier.

11. La recherche du plus grand commun diviseur, en arithmétique, mène à une suite d'équations de cette forme :

$$\begin{aligned} a &= a_1 q_1 + a_2, \\ a_1 &= a_2 q_2 + a_3, \\ a_2 &= a_3 q_3 + a_4, \\ &\vdots \\ a_p &= a_{p+1} q_{p+1} + a_{p+2}, \end{aligned}$$

la méthode des substitutions successives donne

$$a = a_p(1.p) + a_{p+1}(1.p-1),$$

équation qui renferme toutes les propriétés relatives au plus grand commun diviseur de deux nombres a et a_1, ou de deux fonctions algébriques entières à une variable; les deux facteurs $(1.p)$ et $(1.p-1)$ sont premiers entre eux (10).

12. Soit maintenant donné ce système d'équations

$$\left.\begin{aligned} la &= a_1 q_1 + r_2 a_2, \\ l_1 a_1 &= a_2 q_2 + r_3 a_3, \\ l_2 a_2 &= a_3 q_3 + r_4 a_4, \\ &\vdots \\ l_n a_n &= a_{n+1} q_{n+1} + r_{n+1} a_{n+1}. \end{aligned}\right\} \quad (L)$$

On a encore l'équation de relation

$$ll_1l_2l_3\ldots l_{p-1}a = a_p(1.p\ldots l,\ r) + r_{p+1}a_{p+1}(1.p-1\ldots l.r) \quad (M)$$

Voici comment on obtient la fonction combinatoire $(1.p\ldots\ l,\ r)$; on forme l'expression $(1.p)$ d'après la règle indiquée ci-dessus (1); on remplace les nombres par les quantités correspondantes $q_1, q_2, \ldots q_p$; dans chaque arrangement de m de ces quantités, on a m indices, et par conséquent un nombre pair $p-m$ de ces indices qui manquent dans cet arrangement; on forme le produit de $p-m$ facteurs, lr, $lr, \ldots lr$; on écrit dessous les indices manquants, dans un ordre ascendant; de sorte que le premier facteur l a le plus petit de ces indices et le dernier facteur r le plus grand de ces indices; on écrit ce produit à la droite de l'arrangement, opérant de même pour chaque arrangement, la somme résultante est désignée par $(1.p\ldots l.r)$.

Exemple. Soit $p=7$, on a

$$\begin{array}{lllll}
(1,7\ldots l.r) = & q_1q_2q_3q_4q_5q_6q_7 + & q_1q_2q_3q_4q_5l_6r_7 + & q_1q_2q_3l_4r_5l_6r_7 + & q_1l_2r_3l_4r_5l_6r_7 \\
 & & q_1q_2q_3q_4q_7l_5r_6 & & \\
 & & q_1q_2q_3q_6q_7l_4r_5 & q_1q_2q_5l_3r_4l_6r_7 & q_3l_1r_2l_4r_5l_6r_7\ , \\
 & & q_1q_2q_5q_6q_7l_3r_4 & q_1q_2q_7l_3r_4l_5r_6 & q_5l_1r_2l_3r_4l_6r_7\ , \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & q_3q_4q_5q_6q_7l_1r_2 & q_5q_6q_7l_1r_2l_3r_4 & q_7l_1r_2l_3r_4l_5r_6\ , \\
(1,8\ldots l,r) = & q_1q_2q_3q_4q_5q_6q_7q_8 + & q_1q_2q_3q_4q_5q_6l_7r_8 + & q_1q_2q_3q_4l_5r_6l_7r_8 + & q_1q_2l_3r_4l_5r_6l_7r_8 \\
+ & l_1r_2l_3r_4l_5r_6l_7r_8 & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & q_3q_4q_5q_6q_7q_8l_1r_2 & q_5q_6q_7q_8l_1r_2l_3r_4 & q_7q_8l_1r_2l_3r_4l_5r_6\ ,
\end{array}$$

et l'on a

$$ll_1l_2l_3l_4l_5l_6a = a_8(1.8\ldots l.r) + r_9a_9(1.7\ldots l.r).$$

13. Les équations (L) et (M) renferment : 1. La théorie du plus grand commun diviseur arithmétique et celle des fractions continues, en y faisant égales à l'unité, les quantités $l, l_1, l_2, \ldots r_2, r_3, \ldots r_n$; 2°. la théorie du plus grand commun diviseur algébrique, en y faisant égales à l'unité, les quantités $r_2, r_3, \ldots r_n$, et prenant pour $l, l_1, l_2, \ldots l_n$ les quantités par lesquelles il faut multiplier les dividendes,

pour obtenir des quotients entiers; 3°. la théorie de l'élimination entre deux équations algébriques $a = 0$, $a_1 = 0$, à deux inconnues; d'après le procédé de M. Bret (*Journal de l'École Polytechnique*, cahier 3, et *Annales de Mathématiques* de Gergonne, tome XV); procédé qui a été perfectionné récemment par MM. Labbatie et Sarrus: l'équation M étant identique, a l'avantage de faire voir comment l'équation primitive $a = 0$, se forme à l'aide de deux équations consécutives $a_p = 0$, $a_{p+1} = 0$, et des quotients q_1, q_2,... et des multiplicateurs l, l_1, l_2,... etc., qu'on a trouvés avant de parvenir à ces équations (*); 4°. la théorie des équations indéterminées à deux inconnues a et a_1 du premier degré, 5°. la théorie des suites où chaque terme est déterminé au moyen d'une échelle de relation à deux termes quelconques, et lorsque ces deux termes sont constants, la suite devient récurrente. 6°. Enfin la théorie des fonctions dont on fait usage dans le théorème de M. Sturm, lorsque $a' = 0$ est l'équation dérivée de $a = 0$; il suffit de prendre positivement toutes les quantités l à l'exception de l_1 et de prendre négativement toutes les quantités r, à l'exception de r_2.

14. Les équations (L) fournissent les deux suivantes

$$(1.p\ldots lr) = p(1.p-1\ldots lr) + l_{p-1}r_p(1.p-2\ldots lr),$$
$$(2.p\ldots lr) = p(2.p-2\ldots lr) + l_{p-1}r_p(2.p-2\ldots lr);$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}&(1.p\ldots lr)(2.p-1\ldots lr)-(1.p-1\ldots lr)(2.p\ldots lr)\\ &= l_{p-1}r_p[(1.p-2\ldots lr)(2.p-1\ldots lr)-(1.p-1\ldots lr)(2.p-2\ldots lr)]\\ &= l_1r_2l_2r_3l_3\ldots l_{p-1}r_p(-1)^p,\end{aligned}$$

or, en réduisant en fraction continue, à l'aide des équations M, la quantité $\frac{al}{a'}$, on trouve pour l'expression d'une réduite $\frac{(1.p\ldots lr)}{(2.p\ldots lr)}$.

(*) Elle peut même servir à l'ingénieuse méthode d'élimination de Kramp. (Gergonne, t. II).

Ainsi, quoiqu'on puisse développer une expression fractionnaire d'une infinité de manières, en fraction continue, il n'y a que celle où les quantités désignées par l et r, sont égales à l'unité, positive ou négative, qui fournisse des fractions convergentes irréductibles, et telles qu'entre deux de ces fractions, on ne peut en insérer aucune autre, de plus petite dénomination.

15. On ne croit pas inutile d'indiquer ici les principaux ouvrages qu'on peut consulter sur les fractions continues

Wallis, *Arith. infinit.*, prop. 191.16...; origine de cette théorie.
id. Algèb., cap. 10, Oxon. 1683, anglice; éd. 1685; outre les fractions convergentes principales, on y donne les fractions accessoires; mais déjà auparavant Huygens avait indiqué les fractions principales comme moyen d'approximation des fractions à grands termes; voir de *Automato Planetario.*

Euler. *Opusc. Analy.*, t. II, p. 138, et t. I, p. 85, 1783—85.
id. Introduct. in Analy. infinit., cap. 13, 1748.
id. Nov. Comm. Petr., tom. IX et XI. (Anc. et nouv. Mémoires).
Bernouilli, *ibid.* tom. XX, de *Fract. conti.*, p. 10.
Lambert. *Hist. de l'Ac. de Berlin*, 1761, p. 265, voir Leg. *Él. de Géom.* Note 4.

Worselman de Heer. *Specimen inaugurale de fractionibus continuis; trajecti. ad. Rhenum*, 1833.
Gauss. *Comm. soc. Gotting.*, t. II, 1812.
Nouv. Mémoires de l'Acad. de Berlin, 1776, p. 236.
Trembley. *ibid.* 1794, p. 126.
Nova acta Acad. Petr., 1784, p. 36.
Bret. *Annales de Mathém.*, par Gergonne, t. IX, 1818 et 1819.
Gergonne. *ibid.* t. IX.
Galois. *ibid.* t. XIX, 1828 et 1829.
M***. *ibid.* t. XIV, 1823.
Laplace. *Méc. Cél.*, t. IV, p. 254.
Legendre. *Théorie des fonct. ellipt.*, t. II, p. 508.
id. *Exercices du Cal. intégr.*, t. II.

Lagrange. *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1767 et 1768; il y développe la théorie des fractions accessoires.

id. *Addition à l'Algèbre d'Euler*, t. II, p. 379.

id. *Résol. des équat. num.*, ch. 4.

Gauss. *Disquis. Arith.*, p. 17, not., 1re édition.

Clausen. *Journal de Crell*, t. III, p. 88.

Moebius. *ibid.* t. VI, p. 226.

Jacobi. *ibid.* t. VII, p. 41.

Hill. *ibid.* t. VII, p. 48 — 50.

Stern. *ibid.* t. X et XI. Imprimé à part chez Reimer, à Berlin, en 1834, in-4°.

Stern. *ibid.*, t. XVIII, p. 69.

L'ouvrage de M. Stern cité ci-dessus, est le plus exact et le plus complet que l'on ait publié sur la matière; il contient des développements nouveaux fort intéressants: nous en avons extrait la notice bibliographique précédente.

Extrait d'une Lettre de M. Wantzel *à* M. Liouville.

« Je me suis occupé de nouveau de la question d'Analyse qui a pour but de déterminer la figure d'équilibre d'une masse fluide soumise aux attractions de ses particules et animée d'une vitesse constante de rotation, lorsqu'on suppose cette figure peu différente de la sphère. Je crois avoir levé l'objection que vous avez faite à la seconde méthode de Laplace dans le tome II du *Journal de Mathématiques* (juin 1837), ou plutôt avoir rendu cette méthode rigoureuse par une légère modification.

» L'équation à laquelle il faut satisfaire peut se mettre sous la forme

$$\text{(A)} \qquad \frac{4}{3}\pi\alpha Y - \alpha\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y' dp dq' \sin p - \frac{1}{2}g(1-\mu^2) + C = 0,$$

en conservant les notations du Mémoire précité.

On peut la différentier trois fois par rapport à μ et écrire

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} dp dq' \sin p \cos^6 p \left(\frac{7}{3}\frac{d^3Y}{d\mu^3} - \frac{d^3Y'}{d^3\mu'}\right) = 0,$$

toutes les fois que $\frac{d^3Y}{d\mu^3}$ ne devient infini pour aucune valeur de μ; l'on conclut alors rigoureusement que $\frac{d^3Y}{d\mu^3} = 0$, et, par suite, $Y = l + m\mu + n\mu^2$.

» Supposons que $\frac{d^3Y}{d\mu^3}$ puisse devenir infini pour une valeur h attribuée à μ, le produit $e^{-\frac{k}{(\mu-h)^2}}\frac{d^3Y}{d\mu^3}$ sera toujours infiniment petit pour des valeurs de μ très voisines de h, quelle que soit la quantité positive k. Le premier membre de l'équation (A) peut être considéré comme la limite de l'expression

$$\alpha\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} dp dq' \sin p\, e^{-\frac{k}{(\mu'-h)^2}}\left(\frac{7}{3} Y \cos^6 p - Y'\right) - \frac{1}{2}g(1-\mu^2) + C,$$

lorsque k tend vers zéro.

En effet, la différence entre ces deux expressions est égale à l'intégrale

$$\alpha \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} dp dq' \sin p \left(\frac{7}{3} Y \cos^6 p - Y'\right)\left[1 - e^{-\frac{k}{(\mu'-h)^2}}\right],$$

qui peut être rendue aussi petite que l'on voudra en prenant h suffisamment petit, puisque $1 - e^{-\frac{k}{(\mu'-h)^2}}$ est toujours infiniment petit, excepté pour les éléments où $(\mu'-h)^2$ n'est pas plus grand que k dont la somme est proportionnelle à une puissance fractionnaire de k. Ainsi la fonction de μ et k représentée par (B) est infiniment petite en même temps que k, quelle que soit la valeur de μ. Si on la différentie trois fois par rapport à μ, on obtient une expression qu'on peut mettre sous la forme

$$\text{(C)} \qquad \alpha \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} dp dq' \sin p \cos^6 p \left(\frac{7}{3}\frac{d^3Y}{d\mu^3} - \frac{d^3Y'}{d\mu'^3}\right) e^{\frac{k}{(\mu'-h)^2}},$$

et qui jouit de la même propriété, puisque d'ailleurs c'est une fonction finie et continue de μ. Substituons $h-k$ et $h+k$ à la place de μ dans $\frac{d^3Y}{d\mu}$ et soit H la plus grande valeur que prend alors cette quantité: en attribuant à μ la valeur correspondante, l'expression C deviendra

$$\text{(D)} \qquad \alpha \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} dp dq' \sin p \cos^6 p \left(\frac{7}{3} H - \frac{d^3Y'}{d\mu'^3}\right) e^{-\frac{k}{(\mu'-h)^2}}.$$

Tous les éléments de cette intégrale qui correspondent à des valeurs de μ' comprises entre $h-k$ et $h+k$ seront insensibles puisque le produit $e^{-\frac{k}{(\mu'-h)^2}} \frac{d^3Y'}{d\mu'^3}$ est infiniment petit entre ces limites. Les autres éléments sont tous de même signe que H et leur somme est nécessairement finie, puisque μ' passe par toutes les valeurs comprises entre -1 et $+1$, quelle que soit la valeur de μ en vertu de la relation $\mu' = \mu \cos^2 p - \sin^2 p \cos q'$. Ainsi l'expression (D) a toujours une valeur finie, si petit que soit k, et ne peut par conséquent devenir infiniment petit en même temps que k, à moins que H ne le devienne lui-même, en sorte que $\frac{d^3Y}{d\mu^3}$ ne saurait être infini pour $\mu = h$.

» La démonstration se ferait de la même manière si l'on supposait que $\frac{d^3Y}{d\mu^3}$ pût devenir infini pour un nombre quelconque de valeurs de μ.

» Dans l'exemple que vous avez présenté pour rendre palpable l'inexactitude du raisonnement de Laplace, on ne pourrait appliquer la méthode précédente. En effet, le premier membre de l'équation

$$\int_0^1 \alpha^3\left[\frac{12}{10}\varphi'''(x) - \varphi'''(\alpha x)\right]d\alpha = 0$$

à laquelle on est conduit, peut être considéré comme la limite de l'expression

$$\int_0^1 e^{-\frac{k}{x}}\alpha^3\left[\frac{12}{10}\varphi'''(x) - \varphi'''(\alpha x)\right]d\alpha.$$

Or, dans cette intégrale αx ne peut prendre que des valeurs inférieures à x, en sorte que l'intégrale est infiniment petite quand on attribue à x une valeur très petite, lors même que $\varphi'''(0)$ est infini.

» Mais on ne pourrait trouver d'intégrale de la forme

$$\int_a^b [m\varphi(x) - \varphi(x')]\psi(x')dx',$$

qui pût être nulle, quel que soit x, sans que $\varphi(x) = 0$, si la différence $a - b$ des limites ne devient nulle pour aucune valeur de x. Nous supposons naturellement que m est > 1 et que $\psi(x')$ est constamment positif.

On pourrait encore démontrer d'une autre manière que l'équation (A) ne peut être satisfaite que par une valeur de la forme $l + m\mu + n\mu^2$. Si l'on pose $Y = -\frac{15g}{16\alpha}\alpha^2 + Z$, ce qui ramène l'équation (A) à celle-ci :

$$\text{(E)} \qquad \frac{4}{3}\pi Z - \int_0^\pi\int_0^{2\pi} Z'dpdq'\sin p + C = 0;$$

il suffit de différentier une fois par rapport à μ pour obtenir l'équation

$$\int_0^\pi\int^{2\pi} dpdq'\cos^2 p\sin p\left(\frac{dZ}{d\mu} - \frac{dZ'}{d\mu}\right) = 0,$$

qui ne peut être satisfaite à moins que $\frac{dZ'}{d\mu'}$, ne soit constamment égal à sa plus grande valeur, en sorte que $Z = l + m\mu$.

» Si l'on suppose que $\frac{dZ}{d\mu}$ devienne infini pour $\mu = h$, on peut introduire alors le facteur $\frac{(\mu' - h)^2}{k + (\mu' - h)^2}$ et raisonner comme précédemment. En effet, ce facteur tend vers l'unité en même temps que k converge vers zéro; et de plus, $(\mu' - h)\frac{dZ'}{d\mu'}$ est plus petit que la différence entre les valeurs de Z correspondantes à μ' et à h, quand μ' est très voisin de h, en sorte que le produit $\frac{(\mu' - h)^2}{k + (\mu' - h)^2}\frac{dZ'}{d\mu'}$ est infiniment petit en même temps que $\mu' - h$, lors même que la fonction Z n'est pas continue. On démontre donc, à l'aide de ce facteur, qu'il est impossible de supposer $\frac{dZ}{d\mu}$ infini, comme on l'a fait pour $\frac{d^2Y}{d\mu^3}$ en employant le facteur $e^{-\frac{k}{(\mu' - h)^2}}$. »

18 février 1839.

MÉMOIRE DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Théorie de l'osculation des sections coniques et construction du cercle osculateur en un point d'une section conique ;

PAR M. THÉODORE OLIVIER.

(Communiqué à la Société Philomatique, le 5 mai 1838.)

I.

Étant donnés deux cônes ayant l'un pour sommet un point S et pour base sur le plan horizontal une courbe B, l'autre pour sommet un point S′ et pour base sur le plan horizontal une courbe B′; si l'on veut connaître la nature de la courbe intersection de ces deux surfaces, on fait mouvoir le cône (S′, B′) parallèlement à lui-même, son sommet S′ glissant le long de la droite D qui unit les sommets S et S′, jusqu'à ce que le sommet S′ se superpose sur le sommet S ; en cette position le cône mobile se trouve coupé par le plan horizontal, suivant une courbe B″ semblable et semblablement placée par rapport à la base primitive B′, le *pôle* de similitude étant le point en lequel la droite D perce le plan horizontal. Cela posé :

Autant il y a de points communs entre les courbes B et B″, autant il doit y avoir de branches infinies, dans la courbe intersection des deux cônes donnés (S, B) et (S′, B′).

Et ces branches infinies se divisent en deux classes, les unes ayant une asymptote, les autres n'ayant pas d'asymptote; on reconnaît l'existence des unes et des autres aux caractères suivants :

Chaque point *de contact* existant entre les deux courbes B et B″ indique une branche infinie sans asymptote, une courbe *parabolique;*

Chaque point *d'intersection* existant entre les deux courbes B et B″, indique une branche infinie ayant une asymptote, une courbe *hyperbolique*.

Ces résultats sont rigoureusement démontrés par la *Géométrie descriptive*, sans avoir besoin de recourir à l'*analyse*.

II.

Étant donnés deux cônes ayant pour sommet l'un un point S et l'autre un point S′, et pour base commune sur le plan horizontal une section conique C (ellipse, parabole ou hyperbole); ces deux cônes se coupent suivant une seconde section conique C′.

Ce résultat peut encore être démontré par la *Géométrie descriptive* sans avoir besoin de recourir à l'*analyse*.

Si l'on veut reconnaître la nature de la courbe C′, il faudra faire mouvoir le cône (S′, C) parallèlement à lui-même, son sommet glissant le long de la droite D, qui unit les sommets S et S′ jusqu'à ce que le sommet S′ se superpose sur le sommet S; en cette position le cône mobile sera coupé par le plan horizontal suivant une section conique C″, qui sera semblable et semblablement placée par rapport à la courbe C, le *pôle* de similitude étant la trace horizontale de la droite D.

En vertu des propriétés de l'hexagone inscrit, propriétés que l'on peut établir et démontrer rigoureusement par la *Géométrie descriptive* sans avoir besoin de recourir à l'*analyse*, on sait : Que, par cinq points on ne peut faire passer qu'une section conique; et que dès-lors deux sections coniques ne peuvent, en général, se couper qu'en quatre points. Cela posé :

1°. Deux de ces quatre points peuvent être juxtaposés, auquel cas les deux courbes sont tangentes l'une à l'autre, puisqu'elles ont un élément rectiligne commun, en d'autres termes, deux points successifs et infiniment voisins, communs.

Si C et C″ ont un point de contact m et deux points d'intersection p et q, la courbe intersection des deux cônes (S, C) et (S′, C) sera composée de une *parabole* indiquée par le point de contact m, et de une *hyperbole* indiquée par les deux points d'intersection p et q.

2°. Trois de ces quatre points peuvent être juxtaposés, auquel cas les deux courbes ont un contact du second ordre, puisqu'elles ont deux éléments rectilignes communs, en d'autres termes trois points successifs et infiniment voisins, communs.

Si C et C″ ont un contact du second ordre en un point m, elles se couperont nécessairement suivant un point p situé à distance finie du point m.

Car puisque l'intersection des deux cônes (S, C) et (S′, C) est nécessairement composée de deux sections coniques, le point m étant composé de trois points successifs et infiniment voisins, indique que cette intersection sera composée de deux branches infinies dont l'une sera une *parabole* courbe sans asymptote, et l'autre une branche d'*hyperbole*, courbe ayant une asymptote : et comme l'*hyperbole* est composée de deux branches infinies, il faudra nécessairement que les deux courbes C et C″ se coupent encore en un point p, situé à distance finie par rapport au point m.

3°. Les quatre points peuvent être juxtaposés, auquel cas les deux courbes ont un contact du troisième ordre, puisqu'elles ont trois éléments rectilignes communs, en d'autres termes, quatre points successifs et infiniment voisins, communs.

Si C et C″, ont un contact du troisième ordre en un point m, elles n'auront aucun autre point d'intersection ; car le contact du troisième ordre indique que les deux cônes (S, C) et (S, C″) ont quatre génératrices successives et infiniment voisines, communes, lesquelles indiquent que les deux cônes donnés (S, C) et S′, C) se coupent suivant deux *paraboles*.

III.

Supposons, maintenant, deux cônes ayant pour leur base commune C une *parabole*. Les deux courbes C et C″ seront deux paraboles égales et parallèles; car un cône ne peut être coupé par un plan P suivant une *parabole* C, qu'autant que ce plan P est parallèle à un plan T tangent au cône suivant une génératrice G et l'on sait que cette génératrice G est parallèle à l'axe infini de la parabole de section.

Ainsi, les deux cônes ayant pour base commune une parabole auront *nécessairement* leurs sommets S et S′ situés sur une droite G parallèle à l'axe infini de la courbe base C, et ces deux cônes auront, *nécessairement*, cette droite G pour génératrice de contact.

Et il est évident que la courbe intersection des deux cônes donnés (S, C) et (S′, C) se composera seulement de la *parabole* C et de la *génératrice* G.

Rappelons-nous qu'une parabole peut dégénérer en une droite, et que la génératrice de contact de deux cônes, doit être *rigoureusement* considérée comme une parabole d'intersection, puisque le plan tangent commun remplace dans ce cas le plan sécant contenant une courbe d'intersection.

Cela posé :

Les deux cônes (S, C) et (S, C″) devant indiquer la nature de l'intersection, doivent indiquer que cette courbe est composée de deux *paraboles*. Or, il est évident que les deux cônes (S, C) et (S, C″) n'ont en commun que la génératrice G; par conséquent, si on les coupe par un plan Q, ce plan coupera la droite G en un point m et les deux cônes (S, C) et (S, C″) suivant deux sections coniques E et E′ qui n'auront qu'un point commun m; il faudra donc que ces deux courbes E et E′ aient en m un contact du troisième ordre, pour indiquer que la courbe intersection des deux cônes primitifs (S, C) et (S′, C) est composée de deux *paraboles*.

Ce qui précède nous permet de résoudre *graphiquement* le problème suivant :

Étant donnée une section conique E, *construire toutes les sections coniques qui auront avec la courbe* E *et en un point m de cette courbe un contact du troisième ordre.*

En effet :

Supposons que l'on donne une section conique E (ellipse, parabole ou hyperbole) et un point m de cette courbe et que l'on veuille construire une section conique E′ telle que E et E′ aient en m un contact du troisième ordre.

Ayant mené, 1°. la tangente T en m à la courbe E;

2°. Le diamètre D conjugué de la tangente T, et coupant E en les points m et m';

3°. Ayant mené une corde B parallèle à T et coupant E en les points b et b' et le diamètre D au point o;

4°. Ayant pris une parabole P, d'un paramètre arbitraire, et ayant pour axe infini une droite A; on mènera une perpendiculaire à A telle que la corde interceptée B′ par la parabole P soit égale à la corde B.

On supposera ensuite que le plan Q de la courbe E passe par la droite B′ et que ce plan a par rapport au plan de la parabole P (regardé comme plan horizontal) une inclinaison arbitraire, et de plus que le point o soit placé sur l'axe A, la tangente T étant parallèle à la corde B′.

Les courbes E et P étant en cette position, on mènera par le point m, une droite G parallèle à la droite A; on unira le sommet p de la parabole P avec le point m' par une droite H, laquelle coupera G en un point S; ce point S sera le sommet du cône enveloppant les deux courbes P et E.

Cela posé :

On prendra sur la droite G un point arbitraire S′ comme sommet d'un second cône ayant la parabole P pour base; on fera glisser le cône (S′, P) parallèlement à lui-même jusqu'à ce que son sommet S′ se superpose sur le sommet S du cône fixe, et en cette position (que je désigne par S″) le cône mobile sera coupé par le plan de la courbe E suivant une section conique E′ ayant en m un contact du troisième ordre avec la courbe donnée E.

Il sera toujours facile de construire par *points* la courbe E′, au moyen d'une épure; mais pour faciliter les constructions, on pourra toujours supposer que le plan Q est perpendiculaire au plan de la parabole P.

Dès-lors le plan Q devra être pris pour plan vertical de projection et le plan de la parabole P pour plan horizontal de projection.

Cela posé :

Supposons, 1°. que la courbe donnée E est une *ellipse*.

La droite pm' sera toujours oblique par rapport au plan horizontal; le point S sera toujours situé, par rapport au plan Q, au-delà du point x, intersection de la droite G et de la verticale menée par le sommet p de la parabole P.

Dès-lors :

1°. Tant que le point S′ sera au-delà du point S par rapport au plan vertical Q, le cône S″ sera coupé par le plan Q, suivant une *ellipse* E′ enveloppée par l'ellipse E.

2°. Si le point S′ est situé entre les points x et S, le cône S″ sera

encore coupé par le plan Q, suivant une *ellipse* E′ mais cette courbe E′ dans ce cas, enveloppera l'ellipse E.

3°. Lorsque le point S′ ne sera autre que le point x, la courbe E′ sera une *parabole* enveloppant l'ellipse donnée E.

4°. Si le point S′ est placé entre le point x et le plan Q, la courbe E′ sera une *hyperbole*.

Nous pouvons donc conclure ce qui suit :

Il existe 1°. une infinité d'*ellipses* ayant un contact du troisième ordre en un point d'une ellipse donnée : et ces ellipses osculatrices sont divisées en deux groupes, les unes étant enveloppées par la courbe donnée, les autres enveloppant au contraire cette courbe.

2°. Une seule *parabole* ayant un contact du troisième ordre en un point d'une ellipse donnée, et cette parabole enveloppe la courbe donnée.

3°. Une infinité d'*hyperboles* ayant un contact du troisième ordre en un point d'une ellipse donnée, et la branche osculatrice enveloppant toujours la courbe donnée.

Supposons 2°. que la courbe donnée E est une *parabole*.

Le point m' sera situé à l'infini sur le diamètre D conjugué de la tangente T ; dès lors le point S sera le point x.

Par conséquent, nous pouvons conclure ce qui suit :

Il existe : une infinité d'*ellipses* et d'*hyperboles* ayant un contact du troisième ordre en un point d'une parabole donnée et toutes les ellipses osculatrices sont enveloppées par la courbe donnée et toutes les branches d'hyperboles osculatrices enveloppent la courbe donnée.

Supposons 3°. que la courbe donnée E est une *hyperbole*.

Alors la droite pm' coupera la droite G en un point S situé entre le plan vertical Q et le point x.

On peut conclure ce qui suit :

Il existe 1°. une infinité d'*ellipses* ayant un contact du troisième ordre en un point d'une hyperbole et toutes ces ellipses sont enveloppées par la branche de l'hyperbole donnée.

2°. Une seule *parabole* enveloppée par la branche d'hyperbole,

3°. Une infinité d'*hyperboles*, divisées en deux groupes, l'un com-

posé d'hyperboles dont la branche osculatrice est enveloppée par la branche de la courbe donnée, l'autre composé d'hyperboles dont la branche osculatrice enveloppe, au contraire, la branche de la courbe donnée.

Lorsque deux sections coniques E et E′ ont en un point m une osculation du troisième ordre, leurs centres et le point m sont en ligne droite; en d'autres termes, les diamètres correspondants au point de contact m se superposent en direction.

En effet,

Étant donné un cône du deuxième ordre (S, C) dont le sommet est en un point S et qui a pour base une section conique C; si nous supposons que la base C est une parabole, alors il existe une génératrice G parallèle à l'axe infini de la parabole C et le plan tangent T au cône suivant la génératrice G est parallèle au plan de la courbe C.

Si donc nous désignons par d le sommet de la parabole C, la tangente θ en d de cette courbe C sera perpendiculaire, en direction, à la droite G et si nous désignons par G_1 la génératrice du cône passant pas le point d, le plan (S, θ) coupera le plan T suivant une droite θ_1 passant par le sommet S et parallèle à la tangente θ.

Si donc on suppose deux cônes ayant même sommet S et pour base l'un une parabole C et l'autre une parabole C′ (les deux courbes C et C′ étant égales et parallèles, ayant dès-lors même axe infini et même paramètre, les sommets de ces paraboles étant le point d pour C et d' pour C′); les deux cônes auront une génératrice de contact G; cela posé: désignons par θ la tangente en d à C, par θ' la tangente en d' à C′ et par G_1 la génératrice correspondant au point d et par G_1' la génératrice correspondant au point d'.

Il est évident 1°. que les trois plans tangents menés respectivement le long de G, G_1, G_1', se couperont suivant la droite θ_1. 2°. Que les trois génératrices G, G_1, G_1' seront dans un même plan X.

Si donc on coupe les deux cônes par un plan Y parallèle à la droite θ_1 (ce plan sera perpendiculaire à la droite G), on obtiendra deux sections coniques E et E′ qui auront un contact du troisième ordre

au point m (intersection de la génératrice G et du plan Y). De plus, le plan Y coupera le plan X suivant une droite qui passera par le centre de chacune des courbes E et E′, car ce plan Y coupera les trois génératrices G, G_1 et G'_1 aux points respectifs m, m_1, m'_1, lesquels seront en ligne droite, et ces points seront situés sur la droite intersection des deux plans X et Y et aussi ce plan Y coupera les plans tangents menés le long de G, G_1 et G'_1 suivant des droites parallèles à θ_1.

Ainsi, la droite qui unit les points m et m_1 sera un diamètre de la courbe E; ainsi, la droite qui unit les points m et m'_1 sera un diamètre de la courbe E′.

Or, si l'on se donne deux courbes E et E′ ayant en un point m un contact du troisième ordre, on pourra par le point m mener une droite G perpendiculaire au plan des deux courbes, prendre sur G un point S arbitraire et regarder ce point S comme le sommet commun de deux cônes ayant pour base respective les courbes E et E′.

Et tout plan parallèle au plan tangent commun aux deux cônes suivant G devra couper les cônes suivant deux paraboles ayant même axe infini et même paramètre.

Ainsi deux courbes du deuxième degré qui ont un contact du troisième ordre, ont *nécessairement* leurs centres et le point d'osculation en ligne droite. De ce qui précède, on conclut,

1°. Qu'un *cercle* ne peut avoir une osculation du troisième ordre en un point quelconque d'une section conique;

2°. Qu'un *cercle* ne peut avoir une osculation du troisième ordre qu'en un point *sommet* d'une section conique.

En effet :

Pour un point quelconque m d'une section conique E, la normale ne passe par le centre de la courbe E, qu'autant que le point m est un sommet de cette courbe; donc, etc.

Par ce qui précède, on peut découvrir une propriété *remarquable* qui n'existe *toujours* que pour deux sections coniques ayant en un point une osculation du troisième ordre. Cette propriété est la suivante :

Concevons deux courbes E et E′ ayant en un point m une oscula-

tion du troisième ; menons en m la tangente t commune aux deux courbes ; prenons sur t un point arbitraire x.

Menons par le point x deux tangentes, l'une t_1 à E et l'autre t'_1 à E′ ; désignons par n_1 et n'_1 les points de contact respectifs, les trois points m, n_1 et n'_1 seront toujours en ligne droite quelle que soit la position du point x sur la tangente t.

En effet :

Imaginons les deux cônes (S, C), (S, C′) précédents, si on les coupe par un plan Y′ oblique à leur génératrice de contact G, on aura deux sections coniques E et E′ ayant au point m une osculation du troisième ordre (m désignant le point intersection de la droite G et du plan Y′).

Or, les droites xn_1 et xn'_1 seront : la première, tangente au point n_1 de E et la deuxième, tangente au point n'_1 de E′, et les trois points m, n_1 et n'_1 sont évidemment en ligne droite, car ils sont sur la droite intersection des plans Y′ et X. Donc, etc.

Remarquons en terminant que : deux sections coniques qui ont en un point m un contact du premier ordre, peuvent bien (en certains cas) avoir leurs centres et ce point de contact en ligne droite et qu'alors elles jouissent de la propriété *remarquable* qui existe *toujours*, ainsi que nous l'avons démontré pour deux sections coniques ayant un contact du troisième ordre.

En effet :

Concevons deux sections coniques B et B′ ayant en un point m un contact du premier ordre ; nous pourrons toujours considérer la courbe B comme la base d'un cône S qui serait coupé par un plan P (ayant pour trace sur le plan de la courbe B, la tangente t au point m) suivant une courbe B″ dont la projection sur le plan de la courbe B ne serait autre que la courbe B′ ; et cela a lieu, parce que deux sections coniques situées dans des plans différents et lesquels se coupent suivant une tangente commune aux deux courbes, sont toujours enveloppées par un cône et que dans ce cas il n'existe qu'un seul cône enveloppant (*Voir* le Mémoire que j'ai publié dans la *Correspondance mathé-*

matique et physique des Pays-Bas, de M. Quetelet, tome IIIe, page 126).

Cela posé :

Le sommet S du cône sera situé sur une droite G passant par le point *m*. Cette droite G pourra être 1°. *perpendiculaire* au plan de la courbe B, ou 2°. *oblique* à ce plan.

Dans le premier cas, les deux courbes B et B′ jouiront de la propriété qui existe *toujours* entre deux sections coniques ayant un contact du troisième ordre.

Dans le deuxième cas, les deux courbes B et B′ ne jouiront pas de cette propriété, mais d'une propriété analogue et qui est la suivante :

Puisque les courbes B et B″ sont sur un cône S, tout plan tangent à ce cône suivant une génératrice G_t coupera le plan de B″ suivant une droite θ'', et le plan de B suivant une droite θ, ces droites seront les tangentes respectives à ces courbes et iront se couper en un point *p* situé sur la droite *t*.

La droite θ'' se projettera sur le plan de la courbe B suivant une droite θ' tangente à B′.

Et comme il en sera de même, quel que soit le plan tangent au cône S et quelle que soit, dès lors, la génératrice de contact G_t, on voit que les droites qui uniront les points de contact des tangentes menées aux courbes B et B′ des divers points *p* de leur tangente commune *t*, iront se couper en un point qui sera la projection sur le plan B du sommet du cône S.

Et dans ce deuxième cas, il est évident que les deux courbes B et B′ ne peuvent avoir leurs centres et leur point de contact en ligne droite.

Il serait facile de démontrer en s'appuyant sur les résultats précédents :

1°. Que lorsque deux surfaces du deuxième ordre ont, en un point, un contact du premier ordre, ce point et les centres des surfaces peuvent être ou non en ligne droite;

2°. Que lorsque deux surfaces du deuxième ordre ont en un point, un contact du deuxième ordre, le point d'osculation et les centres de ces surfaces ne sont *jamais* en ligne droite ;

3°. Que lorsque deux surfaces du deuxième ordre ont en un point un contact du troisième ordre, le point d'osculation et les centres de ces surfaces sont *toujours* en ligne droite.

IV.

Supposons sur un plan P deux paraboles C et C′ égales (ayant même paramètre) dont les axes infinis A et A′ soient parallèles; ces deux paraboles étant d'ailleurs tournées dans le même sens et se coupant, dès lors, en un seul point p.

Supposons dans l'espace une droite G parallèle au plan P et aux axes A et A′ et prenons sur cette droite G deux points arbitraires S et S′.

Le point S étant le sommet d'un cône ayant pour base la courbe C et le point S′ étant le sommet d'un cône ayant pour base la courbe C′.

Cela posé :

Supposons que le cône (S, C) reste fixe et que le cône (S′, C′) se meuve parallèlement à lui-même, son sommet S′ parcourant la droite G et désignons par S″ la nouvelle position du cône mobile lorsque son sommet S′ se sera placé sur le sommet S du cône fixe; désignons aussi par C″ la base qui située sur le plan P appartiendra au cône S″.

Il est évident que la courbe C″ sera une parabole ayant même paramètre que la courbe C′ et même axe infini A′ que cette courbe ; dès-lors C et C″ ne se couperont qu'en un seul point et toujours en un seul point que je désigne par p'.

Les deux cônes (S, C) et (S″, C″) ayant même sommet, auront donc la génératrice G pour génératrice de contact et la droite Sp' pour génératrice d'intersection.

Cela posé :

Coupons ces deux cônes par un plan Q, on obtiendra deux sections coniques E et E′ ayant un contact en un point m intersection du plan Q et de la génératrice G et qui se couperont en un point q intersection du plan Q et de la génératrice Sp'.

Les deux courbes E et E′ ayant un contact en m et un point d'inter-

section en q; le point de contact m indique que les deux cônes (S, C) et (S′, C′) se coupent suivant une courbe ayant une branche infinie sans asymptote; or cette branche infinie n'est autre que la droite G qui étant une génératrice de contact, représente *rigoureusement* une parabole; les deux cônes (S, C) et (S′, C′) doivent donc se couper suivant une seconde courbe du second degré;

Mais le point d'intersection q indique que la seconde courbe a une branche infinie ayant une asymptote; la seconde courbe étant du deuxième degré doit donc être une hyperbole, et comme une hyperbole est composée de deux branches infinies ayant chacune une asymptote, il faut, *impérieusement*, qu'au point de contact m, se trouvent juxtaposés trois points successifs et infiniment voisins et communs entre les deux courbes E et E′.

Les deux courbes E et E′ ont donc au point m un contact du deuxième ordre, et ce qui précède montre bien que les deux courbes E et E′ se touchent et se coupent au point d'osculation du deuxième ordre.

Ce qui précède nous permettra de résoudre *graphiquement* le problème suivant :

Étant donnée une section conique E, *construire toutes les sections coniques qui auront, avec la courbe* E *et en un point m de cette courbe, un contact du deuxième ordre.*

En effet :

Supposons que l'on donne une section conique E (ellipse, parabole, ou hyperbole) et un point m de cette courbe, et que l'on veuille construire une section conique E′ telle que E et E′ aient en m un contact du deuxième ordre.

Ayant mené, 1°. la tangente T en m à la courbe E;

2°. Le diamètre D conjugué de T et coupant E en les points m et m'.

3°. Ayant mené une corde B parallèle à T et coupant E en les points b et b' et le diamètre D au point o;

4°. Ayant pris une parabole P d'un paramètre arbitraire et ayant pour axe infini une droite A.

On construira pour la parabole P une corde B′ perpendiculaire à A et égale à B.

On fera passer le plan Q de la courbe E par B′, les cordes B et B′ se superposant.

En cette position les courbes E et P seront enveloppées par un cône dont le sommet sera facilement déterminé.

En effet :

Par le point m de E on mènera la droite G parallèle à l'axe A.

On unira le sommet p de la parabole P avec le point m' de la courbe E et la droite $m'p$ coupera G en un point S qui sera le sommet demandé.

Cela posé :

On tracera sur le plan de la parabole P une seconde parabole P′ ayant même paramètre que P et dont l'axe infini A′ sera parallèle à l'axe A.

Ces deux paraboles P et P′ se coupant d'ailleurs en un point p'.

On regardera le point S comme le sommet d'un cône ayant P′ pour base, et ce cône (S, P′) sera coupé par le plan Q suivant une section conique E′ qui aura un contact du deuxième ordre en m avec E et qui coupera E au point q, intersection du plan Q et de la droite Sp'.

Si donc étant donnée une section conique E et deux points m et q situés sur cette courbe, ou voulait construire une section conique E′ coupant E au point q et ayant avec E et au point m un contact du deuxième ordre, on devrait exécuter la construction suivante :

Après avoir déterminé, comme précédemment, le cône (S, P), on joindrait les points S et q par une droite qui couperait la parabole P au point p' et l'on ferait glisser parallèlement à elle-même la courbe P, et dans son plan, jusqu'à ce qu'elle passât par le point p', et cette nouvelle position P′ de P serait regardée comme la base d'un second cône (S, P′) qui serait coupé par le plan Q suivant la courbe osculatrice E′ demandée.

On voit de suite, en se rappelant ce qui a été dit lorsqu'on s'est occupé du contact du troisième ordre, que l'on pourra toujours construire une infinité d'ellipses et d'hyperboles et une seule parabole

ayant un contact du deuxième ordre en un point m d'une *ellipse* ou d'une *hyperbole* donnée E et coupant cette courbe E en un point q.

Et que l'on ne pourra construire que des ellipses ou des hyperboles osculatrices du deuxième ordre à une *parabole* donnée E, et coupant cette courbe E en un point situé à distance finie du point d'osculation.

V.

Au lieu d'employer des paraboles pour résoudre le problème qui fait le sujet du § IV, on pourrait se servir de deux hyperboles.

En effet :

Concevons deux hyperboles H et H′ égales, tournées dans le même sens, et ayant pour asymptote commune une droite A, les deux autres asymptotes étant deux droites B et B′ parallèles entre elles.

Ces deux courbes se couperont en un seul point p'.

Si l'on prend un point S dans l'espace, pour le sommet commun de deux cônes ayant pour bases respectives les courbes H et H′, ces deux cônes (S, H) et (S, H′) se couperont suivant une génératrice Sp' et seront tangents l'un à l'autre suivant une génératrice G parallèle à l'asymptote A.

Et il faudra, en vertu de ce que nous avons dit § IV, que les deux cônes aient un contact du deuxième ordre, tout le long de G ou en d'autres termes, que les deux cônes aient en commun trois génératrices successives et infiniment voisines et juxtaposées, en la position G.

Donc, etc., etc.

VI.

Puisque l'on peut toujours construire une infinité d'ellipses ayant en un point m d'une section conique E (ellipse, parabole ou hyperbole) un contact du deuxième ordre avec cette courbe E, on conçoit que l'on pourra toujours trouver un cercle parmi ces ellipses, et dès-lors la solution du problème suivant :

Construire en un point d'une section conique, le cercle osculateur du deuxième ordre à cette courbe ?

Doit être possible par la *Géométrie descriptive.*

En effet :

Il suffira que le cône (S, P′), § IV, soit coupé par le plan Q, suivant un cercle.

Or, on peut toujours s'arranger de manière à ce que le cône (S, P′) soit de révolution, car l'on sait que tous les cônes de révolution qui ont pour *base* une *parabole*, ont leurs sommets situés sur la *focale* de la parabole-base ; et l'on sait que cette *focale* n'est autre qu'une parabole P_1 égale à la parabole-base P, et ayant pour sommet le foyer de P ; les plans des deux courbes étant perpendiculaires entre eux et se coupant suivant l'axe infini et commun de P et P_1, ces courbes étant d'ailleurs tournées en sens contraires.

La solution du problème précédent sera donnée par la construction suivante :

Planche Ire, fig. 1 et fig. 1 *bis*. Étant donnée une *ellipse* E et un point m de cette courbe, pour lequel on veut construire le cercle osculateur ;

1°. On prendra une parabole P d'un paramètre arbitraire dont on connaîtra le sommet S et le foyer f, et par suite, l'axe infini AS.

2°. On tracera la focale P_1 (qui ne sera autre que la parabole P renversée).

3°. On construira la normale ng à la parabole P_1.

4°. On prendra sur la normale en m à la courbe E, $mx = ng$, et par le point x on mènera la corde dd' conjuguée de la tangente t en m.

5°. On construira pour la parabole P, la demi-corde $d_1y_1 =$ la demi-corde dy.

6°. On mènera y_1M parallèle à ng et l'on prendra M$y_1 = mx$ et MM′ $= mq$.

7°. On joindra les points M′ et S et la droite M′S viendra couper en S′ la droite Mn parallèle à AS.

8°. Par le point S′ on mènera une perpendiculaire à ng, laquelle viendra couper en L la droite MM′, et ML sera la longueur du rayon du cercle osculateur demandé.

Pour l'*hyperbole*, les figures 3 et 3 *bis*, et pour la *parabole*, les

figures 2 et 2 *bis* indiquent très nettement la construction à exécuter. (Il suffit de remarquer que lorsque la section conique est une *parabole*, MM′ ou *mq* est infini et que dès-lors la droite SS′ est parallèle à *ng* ou à sa parallèle My_1).

Pour obtenir le rayon de cercle osculateur, au sommet d'une section conique, la construction sera identiquement la même.

Remarque. Il pourrait arriver que l'on fût conduit, dans certains cas, à placer sur la parabole P_1 une normale telle que sa partie comprise entre le point de la courbe et l'axe infini fût égale à une longueur prise sur la normale de la courbe E; et qu'ainsi on fût conduit à construire une normale telle que *ng* (fig. 1 *bis*) fût égale à *mx* (fig. 1).

Ce problème est d'une construction facile en s'appuyant sur la propriété des focales, savoir : que la *focale* est le lieu des sommets des cônes de révolution ayant pour base la section conique donnée.

Ainsi (fig. 1 *quater*), étant donnée la parabole P et la focale P_1, pour déterminer le point *n* de P_1 pour lequel la normale $ng = D$ on fera la construction suivante :

On prendra l'ordonnée $ab = D$ de la parabole P; on construira la tangente *bn* à la courbe P_1, ce qui est facile, puisque la sous-tangente est double de l'abscisse; donc on prendra $fk' = bf$, et l'ordonnée $k'n$ coupera la courbe P_1 en *n*, point pour lequel la droite *ng* perpendiculaire à *nb* satisfera à la condition posée;

Et en effet :

Si du point *b* on mène la tangente *bn* à la courbe P_1, le plan passant par *ab* et perpendiculaire à *bn* coupera le cône ayant son sommet en *n* et pour base la parabole P suivant un cercle ayant le point *b* pour centre et *ab* pour rayon, puisque ce cône est de révolution et que son axe n'est autre que la tangente *bn*.

Si donc je mène $bp = ab$ et perpendiculairement à *bn*, la droite *pn* sera parallèle à l'axe infini KS de la parabole P.

Si donc en *n*, je mène *ng* perpendiculaire à *bn*, on aura $ng = bp = ab$.

Car les deux triangles rectangles *pbn* et *bng* sont égaux, puisque *pn* et *bg* sont parallèles.

Ainsi, l'on peut dire :

Le point d'une parabole pour lequel la normale est égale à une droite D a pour demi-sous-tangente la différence existant entre la distance du foyer au sommet de la courbe et l'abscisse du point pour lequel l'ordonnée est égale à la droite D.

VII.

La construction précédente peut être simplifiée si l'on remarque que le lieu des sommets des cônes ayant pour base une parabole P, n'est autre que la parabole focale, transportée parallèlement à elle-même, jusqu'à ce que son sommet se superpose sur le sommet de la courbe P, lorsque ces cônes satisfont à la condition d'être coupés chacun suivant un cercle par un plan perpendiculaire à l'axe infini de la base P.

En effet :

Fig. 4, soit donnée la parabole P, ayant son sommet en S et pour axe infini la droite SA ; supposons que le point x soit son foyer, et menons la corde mxm' perpendiculaire à SA.

Supposons ensuite que l'on mène par le point x une droite nxn' perpendiculaire au plan de la courbe P, et construisons dans le plan nxm un cercle C ayant mm' pour corde et nn' pour diamètre.

Unissons les points n' et S par une droite, venant couper en S′ la droite nS′ parallèle à SA. Le point S′ sera le sommet d'un cône enveloppant les deux courbes C et P, et ce cône sera coupé par tout plan parallèle au plan nxm suivant un cercle.

Cela posé :

Les deux triangles semblables SpS′ et Sxn' donnent :

$$\overline{Sp} : \overline{S'p} :: \overline{Sx} : \overline{n'x}, \qquad (1)$$

et désignant

$$\overline{Sp} \text{ par } y, \quad \overline{S'p} = nx \text{ par } z, \quad \overline{Sx} \text{ par } p,$$

(p étant le paramètre de la courbe P),

Et remarquant, 1°. que $\overline{mx} = \overline{2xS}$ (puisque le point x est le foyer

de la courbe P), et 2°. que dans le cercle C on a

$$\overline{mx}^2 = \overline{nx} \,.\, \overline{n'x}; \text{ d'où } \overline{n'x} = \frac{4p^2}{z},$$

la proportion (1) deviendra

$$y : z :: 2p : \frac{4p^2}{z},$$

d'où

$$\frac{4p^2}{z} . y = 2p . z,$$

ou

$$2p \,.\, y = z^2.$$

Donc, etc.

En vertu de ce qui précède, la construction du cercle osculateur en un point d'une section conique devient assez simple.

En effet :

Étant donnée une ellipse E, fig. 1.

1°. On tracera, fig. 1 *ter*, deux paraboles P et P_1 égales et opposées par le sommet et ayant même axe infini SA.

2°. On prendra dans la parabole P la demi-corde d_1y_1 = la moitié de la corde dd' ;

3°. On prendra $My_1 = mx$ et $MM' = mq$;

4°. On mènera MS′ parallèle à SA ;

5°. On élèvera la droite Sv perpendiculaire à SA ; et coupant au point v la droite MS′ ;

6°. On unira le point S′ de la parabole P_1 avec le point K milieu de Sv ;

7°. On unira les points M′ et S et l'on aura le point Q ;

8°. Par le point Q, on mènera QL parallèle à KS′ et coupant la droite MM′ au point L et LM sera la longueur du rayon du cercle osculateur demandé.

Les fig. 3 et 3 *ter* pour l'*hyperbole*, et 2 et 2 *ter* pour la *parabole*, indiquent très nettement les constructions à exécuter pour obtenir le rayon de courbure de ces courbes.

Il faut cependant remarquer que pour la *parabole*, les points v et Q se confondent.

Les constructions seront identiquement les mêmes, lorsque l'on

voudra construire le cercle osculateur au sommet d'une section conique.

VIII.

Remarquons que les constructions précédentes s'appliqueront, lorsque l'on ne donnera qu'un arc de section conique et sans qu'il soit nécessaire de savoir à quelle espèce de courbe cet arc appartient; ainsi sans savoir si l'arc donné est un arc d'ellipse ou de parabole ou d'hyperbole.

Mais pour pouvoir employer les constructions précédentes, il faut que l'on connaisse la tangente en un point de l'arc donné, connaissant d'ailleurs la tangente au point pour lequel on veut construire le rayon de courbure.

En effet :

Fig. 5. Soit donné un arc $\alpha\beta$ et nous savons que cet arc est une portion de section conique.

En un point K, nous avons la tangente Kr et au point m, point pour lequel on veut construire le rayon du cercle osculateur, on connaît la tangente mt. Cela posé :

Nous mènerons la corde KK′ parallèle à la tangente mt; nous joindrons le milieu o de cette corde avec le point m et le diamètre mo viendra couper la tangente en K au point r, en sorte que la droite rK sera tangente au point K′ de l'arc donné.

Cela posé :

Nous pourrons, ayant mené la normale mq au point m donné, laquelle coupera la corde KK′ au point q et ayant abaissé du point r une perpendiculaire sur KK′, et coupant cette corde au point p, achever la construction ainsi que nous l'avons donné précédemment, ainsi :

Fig. 5 *bis*. Ayant tracé les deux paraboles égales P et P, et opposées par le sommet, nous placerons dans la parabole P, la corde K_1K_1' = la corde KK′.

Puis, par le point o' milieu de K_1K_1', nous élèverons la droite $o'r'$ perpendiculaire à l'axe infini AS de la parabole P, prenant $o'm'=qm$ et $o'r'=pr$.

Nous mènerons $m'S'$ parallèle à l'axe AS et coupant la parabole P_1 en S'; en K_1, nous mènerons une tangente à la parabole P et coupant l'axe infini AS au point x (*).

Nous joindrons r' et x par une droite coupant la ligne $m'S'$ en Q.

Ce point Q sera le sommet du cône oblique enveloppant la parabole P et la section conique dont l'arc nous est donné.

Il suffira donc de mener la tangente $S'v$ en S' à la parabole P_1 et du point Q une parallèle à cette tangente, laquelle coupera $m'o'$ en u et $m'u$ sera la longueur du rayon de courbure demandé.

Et remarquons qu'au moyen de cette construction, on peut reconnaître la nature de l'arc donné $\alpha\beta$.

En effet :

Fig. 5 *bis*. Ayant au sommet S de la parabole P, élevé la perpendiculaire Sv à l'axe infini AS, et coupant la droite $m'S'$ au point v;

Si 1°. le point Q est au-delà du point v, l'arc appartiendra à une hyperbole;

Si 2°. le point Q n'est autre que le point v, l'arc appartiendra à une parabole;

Si 3°. le point Q est situé entre les points v et S', l'arc appartiendra à une ellipse.

IX.

Les constructions géométriques précédentes nous permettent de parvenir, d'une manière fort simple, aux expressions *analytiques* connues du rayon de courbure, pour un point quelconque d'une section conique.

En effet :

Fig. 6. 1°. Pour l'*hyperbole* : le diamètre réel ou transverse pour le point m' étant mm'; le centre de la courbe étant en o; α étant l'angle que les deux diamètres conjugués font entre eux; $m'p$ étant la normale au point m' de la courbe pour lequel on veut calculer le rayon de courbure; on voit de suite qu'il faut comparer entre eux

(*) Et le point x est facile à construire, puisque pour la parabole, la sous-tangente est double de l'abscisse; ainsi $Sx = o'S'$.

les deux triangles semblables $m't\mathrm{S}$ et $\mathrm{L}v\mathrm{K}$; lesquels donnent :

$$m't : m'\mathrm{S} :: \mathrm{L}v : \mathrm{LK}.$$

Et d'abord écrivons $m't = \rho =$ le rayon de courbure cherché $m'\mathrm{S}$.

Pour calculer $m'\mathrm{S}$, remarquons que les deux triangles semblables $mm'\mathrm{S}$ et mga donnent

$$m'\mathrm{S} : mm' :: ga : mg.$$

Écrivons $mm' = 2d$, d étant le demi-diamètre transverse correspondant au point m' de la courbe :

$$mg = m\mathrm{O} + \mathrm{O}g = d + x, \quad gq' = y.$$

Les deux paraboles P et P′ qui servent à la construction étant égales, leur équation sera la même pour l'une et l'autre ; ainsi $h^2 = 2p \,.\, k$ (h et k représentant les coordonnées d'un point quelconque de ces courbes).

Cela posé, nous aurons

$$\overline{gq'}^2 = 2p.\overline{ga}, \quad \text{d'où} \quad \overline{ga} = \frac{\overline{gq'}^2}{2.p} :$$

il vient donc

$$\overline{m'\mathrm{S}} = \frac{\overline{mm'} \times \overline{ga}}{mg} = \frac{d.y^2}{p(d+x)}.$$

Pour calculer $\mathrm{L}v$, nous savons que

$$\overline{\mathrm{L}v} = \frac{\overline{\mathrm{L}b}}{2} = \frac{\overline{m'p}}{2} \text{ et que } \overline{m'p} = \frac{m'g}{\sin\alpha} = \frac{x-d}{\sin\alpha}; \text{ donc } \mathrm{L}v = \frac{x-d}{2.\sin\alpha}.$$

Pour calculer LK, on remarque que $\mathrm{LK} = bu$, et que $\mathrm{K}u = m'p$: en vertu de l'équation de la parabole P′, on a

$$\overline{\mathrm{K}u}^2 = 2p \,.\, \overline{bu}; \quad \text{donc} \quad \overline{\mathrm{LK}} = \frac{(x-d)^2}{2p.\sin^2\alpha}.$$

Ainsi, comme

$$m't = \frac{m'S \times L\nu}{LK},$$

on a

$$t = \frac{\dfrac{d.y^2}{p\,(x+d)} \cdot \dfrac{x-d}{2\,.\,\sin\alpha}}{\dfrac{(x-d)^2}{2p\,.\,\sin^2\alpha}} = \frac{d.y^2.\sin\alpha}{(x+d)\,(x-d)} = \frac{d.y^2\sin\alpha}{x^2-d^2},$$

et comme en vertu de l'équation de l'hyperbole $\frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2}{d'^2} = 1$ (*),

on a

$$y^2 = \frac{d'^2}{d^2}\,(x^2 - d^2),$$

on trouve

$$\rho = \frac{d'^2}{d}\,.\,\sin\alpha.$$

Si l'angle α est droit, les diamètres conjugués d et d' deviennent les axes a et b de la courbe.

Et puisque dans ce cas $\sin\alpha = 1$, on obtient

$$\rho = \frac{b^2}{a}.$$

2°. Pour l'*ellipse*.

Le diamètre étant $m'm''$, le sommet du cône enveloppant l'ellipse donnée et la parabole P sera en S''.

Il faudra donc calculer M'S'' au lieu de $m'S$, le rayon de courbure étant d'ailleurs $m't''$ au lieu de $m't$; or, pour ce calcul, il suffit de remarquer qu'en désignant $m'm''$ par $2d$, on aura $m''g = d - x$, en sorte que les calculs précédents seront les mêmes, et il suffira de changer $x - d$ en $d - x$ pour avoir le résultat; on aura donc

(*) Et rappelons-nous que x et y, coordonnées obliques, sont liées entre elles par l'équation $\frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2}{d'^2} = 1$ qui est celle de l'hyperbole donnée; l'origine des coordonnées étant au point o, centre de la courbe; d et d' étant les diamètres conjugués, qui prolongés sont pris pour axes des coordonnées obliques; l'angle de ces axes coordonnés étant α.

$$\rho = \frac{d.y^2 \sin\alpha}{d^2 - x^2}$$

et comme l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses diamètres conjuguées est $\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{d'^2} = 1$. On aura encore

$$\rho = \frac{d'^2}{d}.\sin\alpha.$$

3°. Pour la *parabole*.

Le sommet du cône enveloppant la parabole donnée et la parabole P sera en S', et l'on voit de suite que $\overline{m'S'} = \overline{ga}$.

Cela posé :

L'équation de la parabole donnée étant $y^2 = 2p'.x$, et les axes des coordonnées obliques faisant entre eux un angle α, on trouvera

$$\rho = \frac{p'}{\sin\alpha}.$$

Rappelons-nous que $p' = \frac{p}{\sin^3\alpha}$, dès lors pour un point m' de la parabole, le rayon de courbure aura pour expression $\rho = \frac{p}{\sin^3\alpha}$.

Et si le point m' est le sommet de la parabole dont le paramètre est $2p$, on aura $\rho = p$, puisque, dans ce cas, $\sin\alpha = 1$.

Remarque. Considérons deux diamètres conjugués d'une ellipse. Désignons par d et d' ces demi-diamètres; par α l'angle qu'ils font entre eux; par ρ le rayon de courbure au point m extrémité du demi-diamètre d, et par ρ' le rayon de courbure au point m' extrémité du demi-diamètre d'.

Les rayons de courbure ρ et ρ' feront aussi entre eux un angle égal à α et l'on aura

$$\rho = \frac{d'^2}{d}\sin\alpha \quad \text{et} \quad \rho' = \frac{d}{d'}\sin\alpha,$$

d'où

$$\rho\rho' = dd'.\sin^2\alpha, \quad \text{d'où} \quad \frac{\rho\rho'}{\sin\alpha} = dd'.\sin\alpha.$$

Or, désignant par a et b les demi-axes de l'ellipse, on a

$$ab = dd' . \sin \alpha ;$$

donc

$$\frac{\varrho\varrho'}{\sin \alpha} = ab ,$$

pour deux autres diamètres conjugués, on aura encore

$$\frac{\varrho_1\varrho'_1}{\sin \alpha'} = ab ,$$

donc

$$\frac{\varrho_1\varrho'_1}{\sin \alpha'} = \frac{\varrho\varrho'}{\sin \alpha} = \text{constante}.$$

X.

Il est à remarquer que les constructions indiquées § VII, pour trouver la longueur du rayon de courbure pour un point quelconque d'une section conique, n'exigent pas à la rigueur l'emploi de deux paraboles égales et d'un paramètre arbitraire.

En effet :

Fig. 1 *ter*. L'équation de la parabole P ou P_1 étant $y^2 = 2px$ et $2p$ étant arbitraire, il suffira de trouver $\overline{y_1S}$ au moyen d'une droite d'une longueur arbitraire L et de la droite $\overline{ym}$ (*voir* fig. 1), et l'on aura $y_1S = \frac{\overline{ym}^2}{L}$, ainsi $\overline{y_1S}$ se construira comme troisième-proportionnelle.

De même, pour placer le point S′ sur la parabole P_1, il suffira de construire l'abscisse $\overline{Sg}$; sachant que l'ordonnée $\overline{S'g} = \overline{y_1M}$, et que $\overline{y_1M}$ (fig. 1, *ter*) $= \overline{xm}$, on aura donc $\overline{S'g} = \frac{\overline{xm}^2}{L}$. Ainsi, $\overline{S'g}$ se construira comme troisième-proportionnelle.

Toutes nos constructions n'exigeront donc à la rigueur que l'emploi de la règle et du compas ; mais si l'on avait à construire une suite de rayons de courbure, ainsi si l'on voulait déterminer les divers points de la développée d'une section conique donnée, l'emploi d'une règle découpée en demi-parabole, telle qu'elle est indiquée fig. 7, serait préférable, parce que les constructions seraient plus promptes

qu'en cherchant, pour chaque point, les deux troisièmes-proportionnelles.

Jusqu'à présent on n'avait établi la théorie de l'osculation des sections coniques entre elles, qu'au moyen de l'*analyse*, et les constructions géométriques données pour le rayon de courbure, étaient le résultat de recherches spéciales sur le cercle osculateur ; il me semble que les constructions que je donne pour le rayon de courbure, offrent au moins cet avantage, lors même qu'elles seraient un peu plus longues que celles connues et employées, d'être une *déduction* ou *corollaire* de la théorie *géométrique* exposée dans ce Mémoire, touchant l'osculation des courbes du second degré.

Nouvelle règle sur la Convergence des Séries ;

PAR M. DUHAMEL.

1. On sait qu'une série

$$U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n + U_{n+1} + \text{etc.}$$

dont tous les termes sont positifs, est convergente lorsque le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ tend vers une limite plus petite que l'unité, à mesure que n augmente indéfiniment; et qu'elle est divergente, lorsque cette limite est plus grande que l'unité. Il y a incertitude quand la limite dont nous parlons est égale à 1 : on observera toutefois que si $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est toujours au-dessus de la limite 1, la série est divergente, parce que ses termes vont toujours en croissant. Il existe pour les cas douteux des règles qui conduisent quelquefois à reconnaître la convergence ou la divergence des séries. Je me propose ici d'en faire connaître une nouvelle qui pourra s'appliquer dans des circonstances où les autres ne réussiraient pas.

2. Je remarquerai d'abord que si l'on a une série convergente

$$U_0 + U_1 + \ldots + U_n + U_{n+1} + \text{etc.}$$

et qu'une autre série

$$V_0 + V_1 + \ldots + V_n + V_{n+1} + \text{etc.}$$

soit telle que depuis un certain terme jusqu'à l'infini, l'on ait $\frac{V_{n+1}}{V_n} < \frac{U_{n+1}}{U_n}$, cette seconde série sera convergente. Car si l'on mul-

tiplie la première par $\frac{V_n}{U_n}$, n ayant une valeur déterminée telle que la condition supposée soit remplie, la série ainsi obtenue sera encore convergente. Or tous les termes de la seconde, depuis V_n, se trouveront inférieurs aux termes correspondants de cette dernière: donc la seconde série sera elle-même convergente.

3. Cela posé, considérons une série

$$U_0 + U_1 + \ldots + U_n + U_{n+1} + \text{etc.},$$

telle que l'on ait

$$\lim. \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1,$$

le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ étant toujours plus petit que l'unité, depuis une certaine valeur de n jusqu'à l'infini.

On pourra mettre ce rapport sous la forme

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{1+\alpha},$$

α étant positif et tendant vers zéro.

Or je vais démontrer que si l'on a

$$\lim. n\alpha > 1,$$

la série sera convergente; et qu'elle sera divergente, si l'on a

$$\lim. n\alpha < 1.$$

1°. Soit $\lim. n\alpha = k$, et $k > 1$.

Désignons par m une quantité déterminée quelconque, comprise entre 1 et k, et par conséquent plus grande que l'unité. Il est facile de voir que, depuis une certaine valeur de n jusqu'à l'infini, on aura

$$1 + \alpha > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m.$$

En effet,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m = 1 + \frac{m}{n} + \frac{m(m-1)}{1.2n^2} + \text{etc.},$$

et pour que l'inégalité précédente ait lieu, il suffira que l'on ait

$$\alpha > \frac{m}{n} + \frac{m(m-1)}{1.2.n^2} + \text{etc.},$$

ou

$$n\alpha > m + \frac{m(m-1)}{1.2.n} + \text{etc.}$$

Or le second membre tend vers m et le premier vers k, à mesure que n augmente; donc, depuis une valeur déterminée de n jusqu'à l'infini, l'inégalité aura lieu, puisque la limite de son premier membre est plus grande que que la limite du second. Donc depuis cette valeur de n jusqu'à l'infini, on aura

$$1 + \alpha > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m,$$

et par suite,

$$\frac{1}{1+\alpha} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m},$$

ou

$$\frac{U_n}{U_{n+1}} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m};$$

mais si l'on considère la série

$$(1) \qquad \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots + \frac{1}{n^m} + \frac{1}{(n+1)^m} + \text{etc.},$$

le rapport du terme général au précédent sera

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m},$$

et par conséquent plus grand que dans la série proposée. De plus la série (1) est convergente puisque l'on a $m > 1$; donc aussi la série proposée est convergente : ce que nous nous proposions de démontrer.

2°. Soit maintenant

$$\lim . n\alpha = k \quad \text{et} \quad k < 1.$$

Prenons une quantité quelconque m comprise entre 1 et k, et par suite plus petite que l'unité; je dis que l'on finira par avoir constamment

$$1 + \alpha < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m,$$

ou

$$\alpha < \frac{m}{n} + \frac{m(m-1)}{1.2.n^2} + \text{etc.},$$

ou encore

$$n\alpha < m + \frac{m(n-1)}{1.2.n} + \text{etc.}$$

Car lorsque n croît indéfiniment, le premier membre tend vers k et le second vers m qui est $> k$. Donc depuis une certaine valeur de n jusqu'à l'infini, les inégalités précédentes auront lieu; d'où il résultera

$$\frac{1}{1+\alpha} > \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m};$$

et par conséquent $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ finit par être constamment supérieur au rapport des termes correspondants de la série dont le terme général est $\frac{1}{n^m}$. Mais m étant plus petit que l'unité, cette dernière série est infinie; donc la proposée l'est aussi.

Donc enfin, comme nous l'avions annoncé, la série proposée sera convergente, si l'on a $\lim.n\alpha > 1$; et divergente, si l'on a $\lim.n\alpha < 1$.

4. On ne peut en général prononcer sur la nature de la série, lorsque l'on a

$$\lim.n\alpha = 1.$$

Néanmoins, si $n\alpha$ est toujours plus petit que la limite 1, on peut affirmer que la série est divergente. Car alors on a

$$\frac{1}{1+\alpha} > \frac{1}{1+\frac{1}{n}},$$

et le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est supérieur au rapport $\frac{n}{n+1}$ relatif à la série divergente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \text{etc.},$$

d'ou il résulte que la série proposée est infinie.

Le seul cas qui reste douteux est donc celui où l'on a

$$\lim . n\alpha = 1;$$

$n\alpha$ n'étant pas constamment plus petit que 1.

5. Appliquons cette règle à la série

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots\ldots 2n} \frac{1}{2n+1} + \text{etc.}$$

On aura dans ce cas

$$\lim \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$$

et

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{1}{1 + \frac{6n+5}{(2n+1)^2}},$$

d'où

$$\alpha = \frac{6n+5}{(2n+1)^2}, \quad n\alpha = \frac{6n^2+5n}{4n^2+4n+1},$$

et par suite,

$$\lim . n\alpha = \frac{6}{4} = 1 + \frac{1}{2};$$

d'où il résulte que la série proposée est convergente.

Considérons maintenant cette autre série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} + \text{etc.},$$

pour laquelle on a encore $\lim . \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$. Le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ aura pour valeur

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2n+1}}.$$

On aura donc

$$n\alpha = \frac{n}{2n+1}$$

et

$$\lim.\ n\alpha = \frac{1}{2},$$

d'où il résulte que la série est divergente, et que la somme est infinie.

6. Rapprochons maintenant de la règle précédente celle que l'on a déduite de la considération des intégrales définies, et, pour plus de clarté, rappelons d'abord en peu de mots les principes sur lesquels celle-ci est fondée.

Soit la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \text{etc.}$$

dont tous les termes, depuis une certaine valeur de n jusqu'à l'infini, sont positifs et décroissent constamment en tendant vers la limite zéro. Elle sera convergente ou divergente suivant que la somme des termes à partir de cette valeur de n tendra ou non vers une limite finie.

Supposons que l'expression du terme général soit une fonction de forme finie de n, et désignons par u_x une fonction de la variable x, obtenue en changeant n en x dans u_n. Cette fonction u_x reproduirait tous les termes de la série proposée, en y donnant à x toutes les valeurs entières et positives. Sa valeur allant constamment en décroissant quand on fait croître x par degrés égaux à l'unité, à partir d'une certaine valeur entière, il arrivera généralement que la fonction u_x ira constamment en décroissant lorsque x croîtra d'une manière continue depuis une certaine valeur jusqu'à l'infini.

Admettant qu'il en soit ainsi depuis la valeur entière m, on aura

$$u_m > \int_m^{m+1} u_x dx,\quad u_{m+1} > \int_{m+1}^{m+2} u_x dx,\quad u_{m+2} > \int_{m+2}^{m+3} u_x dx,\ \text{etc.}\ldots$$

et

$$u_{m+1} < \int_m^{m+1} u_x dx, \quad u_{m+2} < \int_{m+1}^{m+2} u_x dx, \quad \text{etc....}$$

D'où il résulte

$$\int_m^\infty u_x dx < u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \text{etc....}$$

et

$$\int_m^\infty u_x dx > u_{m+1} + u_{m+2} + \text{etc.....}$$

Or si cette intégrale $\int_m^\infty u_x dx$ est finie, il s'ensuivra que la série à partir de u_{m+1} le sera de même. Et si elle est infinie, la série commençant à u_m le sera aussi. D'où il résulte que la série proposée sera convergente ou divergente, suivant que l'intégrale

$$\int_m^\infty u_x dx$$

sera finie ou infinie.

7. Appliquons cette règle à la série

$$\frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \ldots + \frac{1}{n^a} + \text{etc.....}$$

La fonction u_x est dans ce cas $\frac{1}{x^a}$, et va constamment en décroissant quand x augmente, a étant supposé positif.

Or, $\int \frac{dx}{x^a} = \frac{x^{1-a}}{1-a} + C$ et par suite $\int_m^\infty \frac{dx}{x^a}$ est infinie, si l'on a $a < 1$, et finie si $a > 1$;

Si $a = 1$, on a $\int \frac{dx}{x^a} = \int \frac{dx}{x} = \log x + C$, quantité infinie en même temps que x.

Donc la série proposée est convergente si $a > 1$, et divergente si $a < 1$ ou $a = 1$.

8. Appliquons cette même règle à la série

$$\frac{\log.2}{2} + \frac{\log.3}{3} + \ldots + \frac{\log n}{n} + \text{etc....}$$

On a alors $u_x = \frac{\log x}{x}$, expression qui décroît constamment depuis la valeur de x pour laquelle $\log x = 1$. Or,

$$\int \frac{dx \log x}{x} = \frac{\log^2 x}{2 \log e} + C.$$

Donc $\int_m^\infty u_x dx$ est infinie, et la série en question est divergente. Ce qui montre que le produit $\sqrt[2]{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{4}\ldots\sqrt[n]{n}\ldots$ est infini. Notre première règle conduirait au même résultat, parce que l'on aurait

$$n\alpha = \frac{\log n - n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)},$$

ce qui donne $\lim . n\alpha = 1$. Mais comme on a évidemment $n\alpha < 1$, la série est divergente, d'après ce que nous avons dit dans le n° 4.

L'une et l'autre règle feraient voir que la série dont le terme général est $\left(\frac{\log n}{n}\right)^2$ est convergente.

9. M. Cauchy a démontré dans son *Analyse algébrique* que dans le cas où $\lim . \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, on peut affirmer que la série est convergente, lorsque $\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n}$ a une limite plus grande que 1; et qu'elle est divergente, lorsque cette limite est plus petite que 1. Nous ajouterons à cette règle une remarque qui paraît avoir échappé à ce savant géomètre, et qui est analogue à celle que nous avons faite dans le n° 4. C'est que dans le cas où $\frac{\log\left(\frac{1}{u_n}\right)}{\log n}$ a pour limite 1, la série est divergente, si ce rapport finit par être constamment au-dessous de la limite 1 vers laquelle il converge; de sorte qu'il n'y a d'incertitude que dans le cas où le rapport ne croît pas constamment, en s'approchant de sa limite 1.

Intégration d'une Équation aux Différences;

PAR M. J.-M.-C. DUHAMEL.

Dans l'un des derniers numéros de ce Journal, M. Binet a donné, par la considération des fonctions génératrices, une intégrale de l'équation

$$(1) \qquad T_n = T_{n-1} + T_{n-2}T_1 + T_{n-3}T_2 + \ldots + T_{n-1},$$

mais dans le cas seulement où l'on a $T_1 = 1$, circonstance qui avait lieu dans le problème de Géométrie qui conduisait à cette équation.

Lorsque M. Binet exposa sa solution à la Société Philomatique, je fis remarquer qu'il pourrait être utile de ne pas s'astreindre à la condition $T_1 = 1$; et l'auteur ne s'étant pas occupé de cette généralisation, je donnai, à la séance suivante, la formule que je vais faire connaître, et à laquelle j'avais été conduit en suivant la même marche que M. Binet.

Posons

$$(2) \qquad Z = 1 + T_1x + T_2x^2 + \ldots + T_mx^m + \text{etc} \ldots$$

et supposons x assez petit pour que cette série soit convergente.

En la multipliant par elle-même et ordonnant par rapport à x, on aura une série convergente, dont la somme sera égale à Z^2; ce qui donne

$$Z^2 = 1 + (T_1 + T_1)x + (T_2 + T_1T_1 + T_2)x^2 + \ldots + (T_m + T_mT_1 + \ldots + T_m)x^m + \text{etc.}, \ldots$$

ou, d'après l'équation (1),

$$Z^2 = 1 + T_2x + T_3x^2 + \ldots + T_{m+1}x^m + \ldots$$

d'où l'on tire

$$Z^2 x = x + Z - 1 - T_1 x,$$

ou

$$Z^2 - \frac{1}{x} Z - 1 + T_1 + \frac{1}{x} = 0.$$

ce qui donne pour la valeur de la série Z, l'une de celles qui sont renfermées dans la formule

$$Z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x - 4(T_1 - 1)x}}{2x}.$$

Or, le signe supérieur du radical donnerait $Z = \infty$ pour $x = 0$, tandis que l'on doit trouver dans ce cas $Z = 1$. Donc la valeur de Z qui exprime la série (2), est

$$Z = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x - 4(T_1 - 1)x}}{2x}.$$

Développons le radical de la manière suivante

$$\sqrt{1 - 4x - 4x^2(T_1 - 1)} = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + A_{n+1} x^{n+1} + \text{etc}\ldots$$

et substituons ce développement dans la valeur de Z: le coefficient de x^n sera $-\frac{A_{n+1}}{2}$, et l'on aura par conséquent

$$(3) \qquad T_n = -\frac{A_{n+1}}{2}.$$

Or on a en général,

$$(1 + ax + bx^2)^{\frac{1}{2}} = [1 + x(a + bx)]^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x(a + bx) + \ldots$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\ldots\left(\frac{1}{2} - p + 1\right)}{1.2\ldots\ldots p} x^p (a + bx)^p + \text{etc}\ldots.$$

Les termes du second membre qui concourront à former le coefficient total de x^n, commenceront à la valeur de p, telle que l'on ait $2p = n$, ou $2p > n$, et se termineront à $p = n$. En réunissant les coefficients

de x^n provenant de ces différents termes, et faisant $a = -4$, $b = -4(T_1 - 1)$, on connaîtra A_n, et par suite T_{n-1}, en vertu de l'équation (3). Remplaçant $n - 1$ par m, on aura la formule suivante, dans laquelle on a représenté $T_1 - 1$ par C,

$$(4)\quad T_m = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} \frac{1.1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6.8\ldots(2m+2)}.4^{m+1} + \frac{1.1.3\ldots(2m-3)}{2.4.6\ldots.2m}.4^m.\frac{m}{1}C + \frac{1.1.3\ldots(2m-5)}{2.4.6\ldots2m-2}4^{m-1}.\frac{(m-1)(m-2)}{1\ .\ 2}C^2 + \text{etc}\ldots \\ \qquad + \frac{1.1.3\ldots(m-2)}{2.4.6\ldots.(m+1)}.4^{\frac{m+1}{2}}\ C^{\frac{m+1}{2}}, \text{ si } m \text{ est impair,} \\ \text{et} \quad + \frac{1.1.3\ldots.(m-1)}{2.4.6\ldots.(m+2)}\ 4^{\frac{m+2}{2}}.\frac{m+2}{2}\ C^{\frac{m}{2}}, \text{ si } m \text{ est pair.} \end{array}\right.$$

Telle est la valeur générale de T_m qui se déduit de l'équation (1), sans aucune hypothèse particulière. La constante C est tout-à-fait indéterminée ; et si l'on fait $m = 1$ dans l'équation (4), on retrouve

$$T_1 = C + 1.$$

T_1 peut donc être choisi arbitrairement; mais c'est la seule indéterminée qui entre dans la valeur générale de T_m.

Si l'on suppose

$$T_1 = 1, \quad \text{ou a} \quad C = 0,$$

et, en supprimant les facteurs communs égaux à 2 :

$$T_m = \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{1.2.3\ldots(m+1)}.2^m;$$

c'est la valeur trouvée par M. Binet.

NOTE

Sur quelques intégrales définies ;

PAR J. LIOUVILLE.

(Présentée à l'Académie, le 22 avril 1839.)

1. Dans une note très intéressante qui fait partie d'un des derniers cahiers de ce Journal, M. Lejeune-Dirichlet considère l'intégrale

$$(1)\qquad V = \int\int \ldots \int x^{a-1}y^{b-1}\ldots z^{c-1}dxdy\ldots dz,$$

dans laquelle les variables $x, y, \ldots z$ doivent prendre toutes les valeurs positives qui satisfont à l'inégalité

$$(2)\qquad \left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \ldots + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r < 1 :$$

$a, b, \ldots c, \alpha, \beta, \ldots \gamma, p, q, \ldots r$ sont des constantes positives. La méthode de M. Dirichlet l'a conduit à une valeur remarquable de V, savoir

$$(3)\qquad V = \frac{\alpha^a\beta^b\ldots\gamma^c}{pq\ldots r}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right)\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{c}{r}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\ldots+\frac{c}{r}\right)},$$

que l'on peut, dit-il, obtenir par différents moyens, et qui renferme un grand nombre de résultats relatifs aux volumes, centres de gravité, moments d'inertie, etc. L'importance de cette formule m'a engagé à en chercher une démonstration que je vais exposer.

2. D'abord en remplaçant $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p$ par x, $\left(\frac{y}{\beta}\right)^q$ par y, ... $\left(\frac{z}{\gamma}\right)^r$ par z,

et $dx, dy, \ldots dz$ par $\frac{\alpha}{p} x^{\frac{1}{p}-1} dx$, $\frac{\beta}{q} y^{\frac{1}{q}-1} dy, \ldots \frac{\gamma}{r} z^{\frac{1}{r}-1} dz$, on a

$$V = \frac{\alpha^a \beta^b \ldots \gamma^c}{pq \ldots r} . U,$$

U étant une intégrale

$$(4) \qquad \iint \ldots \int x^{\frac{a}{p}-1} . y^{\frac{b}{q}-1} \ldots z^{\frac{c}{r}-1} . dx dy \ldots dz,$$

de même forme que V, mais dans laquelle $x, y, \ldots z$ doivent prendre toutes les valeurs positives qui satisfont à l'inégalité

$$x + y + \ldots + z < 1.$$

En posant $\frac{a}{p} = k$, $\frac{b}{q} = l, \ldots \frac{c}{r} = m$, il viendra

$$U = \iint \ldots \int x^{k-1} . y^{l-1} \ldots z^{m-1} . dx dy \ldots dz,$$

et il s'agira de prouver que

$$(5) \qquad U = \frac{\Gamma(k)\Gamma(l)\ldots\Gamma(m)}{\Gamma(1 + k + l + \ldots + m)}.$$

3. Quand le nombre des variables x, y, etc., se réduit à l'unité, on a

$$U = \int_0^1 x^{k-1} dx = \frac{1}{k} = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(1 + k)}:$$

la formule (5) est donc exacte alors.

Elle l'est également, d'après un théorème connu, lorsque le nombre des variables x, y, etc., se réduit à 2 : il vient dans ce cas

$$U = \int_0^1 x^{k-1} dx \int_0^{1-x} y^{l-1} dy = \frac{1}{l} \int_0^1 x^{k-1} . (1 - x)^l . dx.$$

Or, par une formule d'Euler, on a

$$(6) \qquad \int_0^1 x^{k-1} (1 - x)^l . dx = \frac{\Gamma(k)\Gamma(1 + l)}{\Gamma(1 + k + l)},$$

et il en résulte

$$U = \frac{\Gamma(k)\Gamma(1+l)}{l\Gamma(1+k+l)} = \frac{\Gamma(k)\Gamma(l)}{\Gamma(1+k+l)},$$

ce qui s'accorde avec la formule (5).

4. M. Poisson a démontré la formule (6) par la considération des intégrales doubles, dans le XIXe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. En s'appuyant sur le même artifice, M. Jacobi a donné ensuite de cette formule une démonstration qui rentre au fond dans celle de M. Poisson, mais dont le calcul est peut-être un peu plus simple. Rappelons ici en peu de mots cette démonstration.

En multipliant membre à membre les deux équations

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty e^{-x}.x^{k-1}.dx, \quad \Gamma(l) = \int_0^\infty e^{-y}.y^{l-1}.dy,$$

on a

$$\Gamma(k)\Gamma(l) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y)}.x^{k-1}.y^{l-1}.dxdy.$$

Remplaçons les variables x et y par deux autres variables u et v liées aux premières par les relations

$$x = uv, \quad y = u(1-v), \quad \text{d'où} \quad x + y = u.$$

Les limites relatives à u et v seront 0 et ∞, 0 et 1; par le principe fondamental de la transformation des intégrales doubles, on obtiendra $dxdy = ududv$: il vient donc

$$\Gamma(k)\Gamma(l) = \int_0^\infty\int_0^1 e^{-u}.u^{k+l-1}.v^{k-1}(1-v)^{l-1}.dudv,$$

d'où

$$\Gamma(k)\Gamma(l) = \Gamma(k+l)\int_0^1 v^{k-1}.(1-v)^{l-1}.dv,$$

et par conséquent

$$\int_0^1 v^{k-1}.(1-v)^{l-1}.dv = \frac{\Gamma(k)\Gamma(l)}{\Gamma(k+l)}.$$

Or en remplaçant v par x et l par $1+l$, cette dernière équation coïncide avec la formule (6).

5. Supposons maintenant que U soit une intégrale triple : on pourra l'écrire ainsi

$$U = \int_0^1 x^{k-1}dx \int_0^{y_1} y^{l-1}dy \int_0^{z_1} z^{m-1}dz,$$

y_1 et z_1 représentant respectivement les différences $1-x$, $1-x-y$, en sorte que l'on a $1-x=y_1$, $y_1-y=z_1$.

Désignons par u et v de nouvelles variables, et posons

$$z = vz_1, \quad y = uy_1;$$

les limites communes de u et v seront 0 et 1 : l'intégrale U prendra ainsi la forme

$$U = \int_0^1 x^{k-1}dx \int_0^1 u^{l-1}y_1^l du \int_0^1 v^{m-1}z_1^m dv;$$

puis, à cause de $y_1 = 1-x$, $z_1 = y_1 - uy_1 = (1-x)(1-u)$, elle deviendra

$$U = \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{l+m}dx \,.\, \int_0^1 u^{l-1}(1-u)^m du \,.\, \int_0^1 v^{m-1}dv.$$

Les intégrations relatives aux diverses variables peuvent maintenant s'effectuer indépendamment l'une de l'autre, et comme on a

$$\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{l+m}\,dx = \frac{\Gamma(k)\,\Gamma(1+l+m)}{\Gamma(1+k+l+m)},$$

$$\int_0^1 u^{l-1}(1-u)^m du = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+l+m)}, \quad \int_0^1 v^{m-1}dv = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(1+m)},$$

la valeur de U sera finalement

$$U = \frac{\Gamma(k)\,\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(1+k+l+m)},$$

conformément à la formule (5).

S'il y a quatre variables indépendantes x, y, z, t, dans l'intégrale U, la valeur de cette intégrale s'obtiendra encore par le même procédé. On supposera les intégrations effectuées successivement sur t, z, y et x, et l'on posera $1-x=y_1$, $y_1-y=z_1$, $z_1-z=t_1$.

les limites relatives à t, z, y et x seront respectivement o et t_1, o et z_1, o et y_1, o et 1 : si donc on remplace t, z et y par de nouvelles variables liées aux premières par les relations

$$t = wt_1, \quad z = vz_1, \quad y = uy_1,$$

les limites communes à ces nouvelles variables seront o et 1; de plus on aura

$$y_1 = 1 - x, \; z_1 = (1 - x)(1 - u), \; t_1 = (1 - x)(1 - u)(1 - v);$$

par conséquent les variables x, u, v, w pourront être séparées : en d'autres termes l'intégrale multiple U se décomposera dans un produit de quatre intégrales qui toutes s'exprimeront par des fonctions Γ à l'aide de la formule (6). Cette méthode est générale, et quel que soit le nombre des variables x, y, etc., elle conduit à la formule (5 qui se trouve ainsi démontrée.

6. On peut présenter cette démonstration sous une autre forme, en suivant une marche semblable à celle indiquée au n° 4, d'après M. Jacobi. Pour plus de généralité, considérons l'intégrale

$$W = \iint \ldots \int f(x + y + \ldots + z) x^{k-1} y^{l-1} \ldots z^{m-1} dx dy \ldots dz,$$

dans laquelle $f(x + y + \ldots + z)$ désigne une fonction quelconque de $x + y + \ldots + z$, et supposons que $x, y, \ldots z$ prennent dans cette intégrale toutes les valeurs positives qui satisfont à l'inégalité

$$x + y + \ldots + z < h,$$

h étant une constante positive.

Admettons d'abord qu'il y ait deux variables seulement x et y. On pourra écrire

$$W = \int_0^h x^{k-1} dx \int_0^{h-x} f(x + y) y^{l-1} dy.$$

Effectuons le changement de variables indiqué n° 4, c'est-à-dire faisons

$$x = uv, \quad y = u(1 - v):$$

les limites relatives aux nouvelles variables u et v seront 0 et h, 0 et 1, de sorte qu'on aura

$$W = \int_0^h \int_0^1 f(u) u^{k+l-1} . v^{k-1} (1-v)^{l-1} . du dv,$$

d'où

$$W = \frac{\Gamma(k)\Gamma(l)}{\Gamma(k+l)} \int_0^h f(u) u^{k+l-1} . du.$$

Ainsi la valeur de W dépend à la fois des fonctions Γ et d'une certaine intégrale simple.

7. Admettons maintenant que W contienne trois variables x, y, z. En posant $h - x = y_1$, on pourra écrire

$$W = \int_0^h x^{k-1} dx \int_0^{y_1} y^{l-1} dy \int_0^{y_1 - y} f(x+y+z) z^{m-1} dz.$$

Mais l'intégrale

$$\int_0^{y_1} y^{l-1} dy \int_0^{y_1 - y} f(x+y+z) z^{m-1} dz$$

est du genre de celle que nous venons de traiter, et d'après les calculs du n° 6, elle est égale à

$$\frac{\Gamma(l)\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)} \int_0^{y_1} f(x+u) u^{l+m-1} . du :$$

à cause de $y_1 = h - x$, la valeur de W devient donc

$$W = \frac{\Gamma(l)\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)} \int_0^h x^{k-1} dx \int_0^{h-x} f(x+u) u^{l+m-1} . du,$$

de sorte qu'en appliquant une seconde fois les résultats du n° 6, on obtient

$$W = \frac{\Gamma(l)\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)} \frac{\Gamma(k)\Gamma(l+m)}{\Gamma(k+l+m)} \cdot \int_0^h f(\theta) \theta^{k+l+m-1} . d\theta.$$

8. Cette méthode de réduction successive étant évidemment générale, nous voyons que l'intégrale

$$(7) \quad W = \iint \ldots \int f(x+y+\ldots+z) x^{k-1} . y^{l-1} \ldots z^{m-1} dx dy \ldots dz$$

s'exprime dans tous les cas par la formule

$$(8) \qquad W = \frac{\Gamma(k)\,\Gamma(l)\ldots\Gamma(m)}{\Gamma(k+l+\ldots+m)}\int_0^h f(\theta)\,\theta^{k+l+\ldots+m-1}\,d\theta,$$

dont le second membre contient plusieurs fonctions Γ et une certaine intégrale simple.

Lorsqu'on prend $f(\theta) = 1$, et de plus $h = 1$, l'intégrale W coïncide avec l'intégrale U du n° 2, et l'équation (8) fournit

$$W = \frac{\Gamma(k)\,\Gamma(l)\ldots\Gamma(m)}{\Gamma(k+l+\ldots+m)}\cdot\frac{1}{k+l+\ldots+m},$$

c'est-à-dire

$$W = \frac{\Gamma(k)\,\Gamma(l)\ldots\Gamma(m)}{\Gamma(1+k+l+\ldots+m)},$$

conformément à la formule (5).

Réciproquement la formule (5) étant admise, il serait aisé d'en conclure la formule (8), en suivant une marche semblable à celle que l'on emploie lorsque de l'expression connue du moment d'inertie d'un ellipsoïde homogène quelconque, on veut déduire celle du moment d'inertie d'un ellipsoïde formé de couches hétérogènes.

Au lieu de l'intégrale W, on pourrait évidemment considérer l'intégrale d'une fonction de la forme

$$f\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \ldots + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r\right] x^{a-1}y^{b-1}\ldots z^{c-1}\,dx\,dy\ldots dz,$$

en étendant l'intégration à toutes les valeurs positives de $x, y, \ldots z$ qui satisfont à l'inégalité

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \ldots + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r < h.$$

On serait conduit à une formule semblable à la formule (8) : seulement, dans le second membre, il y aurait un nouveau facteur

$$\frac{\alpha^a\beta^b\ldots\gamma^c}{pq\ldots r},$$

et $k, l, \ldots m$ se trouveraient remplacés par $\frac{a}{p}, \frac{b}{q}, \ldots \frac{c}{r}$.

J'ajouterai que la constante h, qui figure dans la formule (8), peut être supposée aussi grande qu'on veut, et par conséquent infinie.

9. Conservons toutes les notations du n° précédent, mais supposons de plus que la somme $k+l+\ldots+m$ soit égale à l'unité, et que $f(\theta)$ soit la dérivée $\frac{dF(\theta)}{d\theta}$ ou $F'(\theta)$ d'une certaine fonction $F(\theta)$. L'intégrale

$$\int_0^h f(\theta)\,\theta^{k+l+\ldots+m-1}.d\theta$$

sera égale à $F(h)-F(o)$, et puisque

$$\Gamma(1+k+l+\ldots+m)=\Gamma(2)=1,$$

l'on aura

$$W=\Gamma(k)\Gamma(l)\ldots\Gamma(m)[F(h)-F(o)].$$

Ainsi en particulier, dans le cas d'une intégrale double, on trouvera

$$\int_0^h x^{k-1}dx\int_0^{h-x} F'(x+y)\,y^{l-1}dy=\Gamma(k)\Gamma(l)\,[F(h)-F(o)].$$

Cette dernière formule se simplifiera encore, si l'on remplace l par sa valeur $1-k$, et si l'on a égard à l'équation connue

$$\Gamma(k)\Gamma(1-k)=\frac{\pi}{\sin k\pi}.$$

On obtient de cette manière

$$(9)\qquad \int_0^h x^{k-1}dx\int_0^{h-x} F'(x+y)\,y^{-k}dy=\frac{\pi\,[F(h)-F(o)]}{\sin k\pi}.$$

10. Soit μ un paramètre plus petit que ρ : faisons $h=\rho-\mu$, et de plus supposons que le paramètre μ entre dans la fonction F de telle manière que l'on ait $F(x)=\varphi(x+\mu)$. L'équation (9) deviendra

$$(10)\qquad \int_0^{\rho-\mu} x^{k-1}dx\int_0^{\rho-x-\mu}\varphi'(x+\mu+y)\,y^{-k}dy=\frac{\pi\,[\varphi(\rho)-\varphi(\mu)]}{\sin k\pi},$$

et si l'on suppose la limite $\rho=\infty$, et la fonction $\varphi(\rho)$ assujétie à la

condition de s'évanouir pour une valeur infinie de ρ, elle donnera

$$(11)\qquad \int_0^\infty x^{k-1}dx\int_0^\infty \phi'(x+\mu+y)y^{-k}dy = -\frac{\pi\phi(\mu)}{\sin k\mu}.$$

Ce dernier résultat s'accorde avec ceux que j'ai obtenus, dans mon *Mémoire sur une formule d'Analyse*, par la considération des différentielles à indices fractionnaires, et que j'ai vérifiés ensuite par un moyen particulier. Le moyen que j'ai employé pour cette vérification diffère peu de celui du n° 6, qui sert à démontrer la formule (8). C'est ce que l'on reconnaîtra en lisant avec un peu d'attention les n°s 4 et 5 du Mémoire cité (*voyez* le tome XII du *Journal de M. Crelle*, page 276). L'usage des coordonnées polaires auquel j'ai eu recours alors, équivaut évidemment à la transformation des variables imaginée par M. Jacobi.

11. Posons

$$\phi(\rho) - \phi(\mu) = f(\mu):$$

$f(\mu)$ sera une fonction quelconque de μ assujétie à la condition de s'évanouir pour $\mu = \rho$. L'équation (10) deviendra

$$(12)\qquad \int_0^{\rho-\mu} x^{k-1}dx\int_0^{\rho-x-\mu} f'(x+\mu+y)y^{-k}dy = -\frac{\pi f(\mu)}{\sin k\pi}.$$

Cette nouvelle formule (12) pourra servir à résoudre le problème suivant :

« Soit $f(\mu)$ une fonction de μ assujétie à s'évanouir pour $\mu = \rho$: » on propose de trouver une fonction $\psi(u)$ qui satisfasse à l'équation

$$(13)\qquad \int_0^{\rho-\mu} x^{k-1}\psi(\mu+x)\,dx = f(\mu),$$

» la valeur de μ restant toujours plus petite que ρ, et la constante k » étant positive et < 1. »

En comparant l'équation (13) à la formule (12), on voit de suite qu'il suffira de prendre

$$\psi(u) = -\frac{\sin k\pi}{\pi}\int_0^{\rho-\mu} f'(u+y)y^{-k}dy.$$

Mais cela ne démontrerait pas que le problème proposé n'est suscep-

tible que d'une solution; il est donc plus convenable de procéder comme on va le voir.

Changeons, dans l'équation (13), μ en $\mu+y$, puis multiplions par $y^{-k}dy$, et intégrons entre les limites $y=0$, $y=\rho-\mu$: son premier membre deviendra

$$\int_0^{\rho-\mu} y^{-k}dy \int_0^{\rho-\mu-y} \psi(x+\mu+y)\, x^{k-1}dx,$$

ou bien, en changeant l'ordre des intégrations,

$$\int_0^{\rho-\mu} x^{k-1}dx \int_0^{\rho-x-\mu} \psi(x+\mu+y)\, y^{-k}dy,$$

ce qui, d'après la formule (12), équivaut à

$$-\frac{\pi}{\sin k\pi}\int_\rho^\mu \psi(\mu)\,d\mu.$$

D'après cela, on aura

$$-\frac{\pi}{\sin k\pi}\int_\rho^\mu \psi(\mu)d\mu = \int_0^{\rho-\mu} f(\mu+y)y^{-k}dy,$$

d'où l'on tire, en différentiant et observant que $f(\rho)=0$,

$$\psi(\mu) = -\frac{\sin k\pi}{\pi}\int_0^{\rho-\mu} f'(\mu+y)y^{-k}dy,$$

ce qu'il fallait démontrer.

12. On peut encore se proposer de trouver la valeur de $\psi(\mu)$ satisfaisant à l'équation (13) lorsque k est >1. Supposons par exemple la constante k comprise entre 1 et 2. En différenciant l'équation (13) par rapport à μ, nous aurons

$$-(\rho-\mu)^{k-1}\psi(\rho)+\int_0^{\rho-\mu} x^{k-1}\psi'(\mu+x)\,dx = f'(\mu),$$

et comme l'intégration par parties donne

$$\int_0^{\rho-\mu} x^{k-1}\psi'(\mu+x)dx = (\rho-\mu)^{k-1}\psi(\rho)-(k-1)\int_0^{\rho-\mu} x^{k-2}\psi(\mu+x)dx,$$

il en résultera

$$\int_0^{\rho-\mu} x^{k-2}\psi(\mu+x)\,dx = -\frac{f'(\mu)}{k-1}.$$

Le premier membre de cette dernière équation se réduit à zéro pour $\mu=\rho$, et nous admettrons que le second jouit de la même propriété. Cela étant il viendra (puisque $k-1$ est <1)

$$\psi(\mu) = \frac{\sin(k-1)\pi}{(k-1)\pi}\int_0^{\rho-\mu} f''(\mu+y)\,y^{-(k-1)}dy.$$

On trouvera d'une manière semblable la valeur de $\psi(\mu)$ lorsque la constante k est comprise entre 2 et 3, ou plus généralement entre deux nombres entiers consécutifs quelconques.

Note sur les Inversions, ou dérangements produits dans les permutations;

PAR M. OLINDE RODRIGUES.

1. Je désigne par $Z_{n,i}$, le nombre de manières de permuter n lettres entre elles, et de telle sorte que dans chaque permutation, il se trouve un nombre d'inversions égal à i : i peut varier de 0 à $\frac{n.n-1}{2}$ ou de 0 à n_2 suivant une notation plus commode.

Chaque lettre considérée par rapport au rang qu'elle occupe, dans l'ordre primitif supposé, ne peut évidemment produire au plus qu'un nombre d'inversions égal à l'indice de son rang diminué d'une unité : $Z_{n,i}$ est donc égal au nombre de solutions de l'équation

$$x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = i,$$

où chacune des variables x_0, x_1, x_2, etc., peut varier depuis 0 jusqu'au nombre marqué par son indice, et où la valeur de chacune de ces variables indique, pour chaque permutation, le nombre d'inversions produites par la lettre dont le rang est marqué par l'indice de cette variable augmenté d'une unité. On voit bien que chaque permutation doit satisfaire à cette équation, et réciproquement pour chacune des solutions de cette équation, il est facile de former la permutation qui lui correspond. En effet, on déplacera, dans l'ordre primitif donné, l'une des lettres, d'autant de rangs qu'il est nécessaire pour produire le nombre d'inversions qui lui est attribué dans la solution considérée, puis on opérera le même déplacement pour une autre lettre dans les $n-1$ rangs restants disponibles, et ainsi de suite jusqu'à l'épuisement du nombre i d'inversions, qui diminue à chaque déplacement d'autant d'unités qu'il y a de rangs franchis par la lettre qu'on déplace.

$Z_{n,i}$ est donc le coefficient de t^i dans le produit,

$$(1+t)(1+t+t^2)(1+t+t^2+t^3)\ldots(1+t+t^2+\ldots+t^{n-1}). \quad (*)$$

2. En désignant ce produit par U, on aura

$$U = Z_{n,0} + Z_{n,1}t + Z_{n,2}t^2 + \ldots + Z_{n,n_1}t^{n_1}.$$

Pour $t=1$, il vient $U=1.2.3\ldots n = S_0^n . Z_{n,1}$, comme on devait bien s'y attendre.

Si $t=-1$, on trouve $U=0 = Z_{n,0} - Z_{n,1} + Z_{n,2} - Z_{n,3} +$ etc. C'est-à-dire qu'il y a autant de permutations *paires* qu'*impaires* quant au nombre d'inversions qu'elles contiennent. Ce qui est encore évident *à priori* : car on sait que chaque *transposition* de deux lettres, change une permutation de paire en impaire *et vice versâ* : or on peut considérer toutes les permutations comme partagées en deux moitiés, dont l'une contienne ces deux lettres en ordre direct, et l'autre les contienne transposées; les permutations paires de la première moitié correspondront aux impaires de la seconde et réciproquement. La totalité des paires dans les deux moitiés réunies, sera donc égale à la totalité des impaires.

On a de plus

$$\frac{dU}{dt} = U.\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1+2t}{1+t+t^2} + \frac{1+2t+3t^2}{1+t+t^2+t^3} + \text{etc.}\right)$$

Quand $t=1$,

$$\frac{dU}{dt} = (1.2.3\ldots n).\frac{n.n-1}{4} = \frac{[n]}{2}\,\frac{n.n-1}{2}$$

$$= Z_{n,1} + 2Z_{n,2} + 3Z_{n,3} + \ldots + (n_1 - 1)Z_{n,n_1}.$$

C'est la solution trouvée d'une autre manière par M. Terquem pour le problème de M. Stern, relatif à la somme de toutes les inversions contenues dans les permutations de n lettres (**).

(*) On voit de suite que $Z_{n,n_1-i} = Z_{n,i}$, ce qui s'explique d'abord en attribuant aux n lettres un ordre inverse de l'ordre primitif adopté : les inversions i deviennent $n_1 - i$.

(**) *Voir* le tome III de ce Journal, page 559.

Mais on peut aussi arriver à ce résultat plus simplement. En effet, il y a autant de permutations dans lesquelles un couple de lettres données est en inversion, qu'il y en a dans lesquelles il a conservé son ordre direct. C'est-à-dire que pour chaque couple, il y a $\frac{[n]}{2}$ permutations dans lesquelles il est en inversion, ce qui fait $\frac{[n]}{2}$ inversions provenant de chaque couple : or il y a $\frac{n.n-1}{2}$ couples dans n lettres; la somme totale des inversions provenant de tous les couples est donc $\frac{n.n-1}{4}[n]$.

Enfin soit $t=-1$: il est aisé de voir que $\frac{dU}{dt}$ sera nul, si n est >3, parce que dans la dérivation, l'un des deux facteurs $1+t$, $1+t+t^2+t^3$, rendra toujours nuls tous les termes de $\frac{du}{dt}$.

Ainsi la somme des inversions comprises dans les permutations paires, est égale à celle des inversions comprises dans les permutations impaires, pourvu que n soit >3.

On peut vérifier directement cette proposition en remarquant ce qui arrive, lorsque après avoir formé toutes les permutations de n lettres, et les avoir séparées en paires et impaires, on intercale une $n+1^{ième}$ lettre, successivement de rang en rang, dans chaque permutation paire et impaire. On voit d'abord que si la somme des inversions paires est égale à celle des inversions impaires, les intercalations de la $n+1^{ième}$ lettre n'altéreront pas cette égalité, et qu'ainsi l'égalité ayant lieu pour $n=4$, comme il est aisé de s'en assurer, elle subsiste pour toutes les valeurs supérieures de n. L'égalité peut même se déduire de l'inégalité, comme effectivement cela arrive en passant des permutations 3 à 3 aux permutations 4 à 4, parce que les échanges de permutations paires ou impaires, *et vice versâ*, s'opérant en nombre pair, il s'établit une balance parfaite entre la somme des inversions des permutations paires, et celles des inversions des permutations impaires, produites par les quatre intercalations successives de la quatrième lettre, introduite dans les permutations des trois premières.

3. Dans ce qui précède, nous ne considérons que les inversions produites par n lettres dans leurs permutations; mais on peut rechercher les inversions de m lettres permutées n à n. Ce problème se ramène aisément au premier : $(m, n) Z_{n,i}$ exprimera le nombre de permutations de m lettres n à n, ayant chacune un nombre i d'inversions, (m, n) désignant le nombre de combinaisons de m lettres n à n.

Car chacune de ces combinaisons peut être écrite d'abord sans inversion aucune des lettres qui la composent; et permutée $[n]$ fois elle engendrera $Z_{n,i}$ arrangements à i inversions. Il y a donc en tout $(m, n) Z_{n,i}$ arrangements de m lettres n à n à i inversions.

La somme totale des inversions qui pour n lettres permutées n à n est $\frac{n.(n-1)}{4}[n]$, sera pour m lettres permutées n à n, $\frac{(m,n)n.(n-1)[n]}{4}$.

4. Après ces généralités, occupons-nous maintenant de déterminer $Z_{n,i}$.

La fonction U peut s'écrire ainsi $(1-t^{-n})(1-t)(1-t^2)(1-t^n)$. Désignons par $E_{n,i}$ le coefficient de t^i dans le produit $(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^n)$, et par $[n, p]$ l'expression $\frac{n.n+1\ldots n+p-1}{1.2.3\ldots p}$: nous aurons

$$Z_{n,i} = E_{n,i} + [n, i] E_{n,i-1} + \ldots + [n, 2] E_{n,i-2} + \ldots + [n, i] E_{n,0},$$

et pour déterminer $E_{n,i}$, l'équation aux différences d'ordre indéterminé, mais la plus simple de toutes

$$E_{n,i} = E_{n-1,i} - E_{n-1,i-n},$$

$E_{n-1,i}$ étant nul pour $i < 0$: de là il résulte pour $n > i - 1$,

$$E_{n,i} = E_{i,i},$$

et

$$Z_{n,i} = E_{i,i} + [n, 1] E_{i-1,i-1} + [n, 2] E_{i-2,i-2} + \text{etc.}.$$

ou

$$Z_{n,i} = [n, i] + [n, i-1] E_{1,1} + [n, i-2] E_{2,2} + \ldots + E_{i,i}.$$

Telle est l'expression générale de $Z_{n,i}$, la plus simple que j'aie trouvée.

Quant à la détermination de $E_{n,i}$, je ne vois après la multiplication même des facteurs $(1-t)(1-t^2)(1-t^3)\ldots(1-t^n)$, aucun procédé plus simple que le calcul des valeurs successives, déduites de la loi exprimée par l'équation aux différences ci-dessus. Si la question numérique avait quelque importance, on formerait rapidement une table très étendue des valeurs de $E_{n,i}$. Voici les premières valeurs de cette fonction. En supposant $n=i$ à partir de $i=0$, on a pour $E_{0,0}$, $E_{1,1}$, $E_{2,2}$, $E_{3,3}$, etc., les nombres

$$1,\ -1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 0,\ -1,$$

d'où résulte

$$Z_{n,0}=1,\ Z_{n,1}=n-1,\ Z_{n,2}=[n-1,\ 2]-1,\ Z_{n,3}=[n-1,\ 3]-n,$$
$$Z_{n,4}=[n-1,\ 4]-[n,\ 2],\ Z_{n,5}=[n-1,\ 5]-[n,\ 3]+1,$$
$$Z_{n,6}=[n-1,\ 6]-[n,\ 4]+n,\ \text{etc.},$$

n étant supposé toujours au moins égal à i, etc.

Je ne m'arrêterai pas à ce détail, et je ferai remarquer seulement en finissant cette note, l'analogie de ces recherches avec celles dont s'est occupé Euler, sous la dénomination de *partition des nombres*. $E_{n,i}$ est l'excédent du nombre de manières de partager i en un nombre *pair* de nombres inégaux moindres que $n+1$, sur le nombre de manières de le partager en un nombre *impair* de nombres inégaux aussi moindres que $n+1$; le nombre des parties étant lui-même moindre que $n+1$.

Sur une propriété des surfaces du second degré;

PAR M. TERQUEM.

THÉORÈME. Dans une surface du second degré, le lieu géométrique des points pour lesquels la somme des carrés des normales à la surface est une quantité constante, est une surface du second degré concentrique à la surface donnée, et ayant les mêmes axes principaux, en direction.

Démonstration. Soit, pour abréger le calcul, l'équation de la surface donnée, rapportée au centre

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + E = 0: \qquad (1)$$

supposons les axes rectangulaires, et soient a, b, c les coordonnées d'un point, et x', y', z', les coordonnées du point de rencontre de la surface avec la normale passant par le point a, b, c; on a les relations connues

$$\left.\begin{aligned} x'z'(A'' - A) - aA''z' + cAx' &= 0, \\ y'z'(A'' - A) - bA''z' + cA'y' &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

les trois équations (1) et (2) donnent

$$\begin{aligned} z'^6 + 2p''cz'^5 + z'^4(n''b^2 + m''a^2 + q'') + \text{etc.} &= 0, \\ y'^6 + 2p'by'^5 + y'^4(n'c^2 + m'a^2 + q') + \text{etc.} &= 0, \\ x'^6 + 2pbx'^5 + x'^4(nc^2 + mb^2 + q) + \text{etc.} &= 0, \end{aligned}$$

$$p'' = \frac{A}{A''-A} + \frac{A'}{A''-A'},\ p' = \frac{A}{A'-A} + \frac{A''}{A'-A''};\ p = \frac{A}{A-A'} + \frac{A''}{A-A};$$

$$m'' = \frac{AA''}{(A-A'')^2};\ m = m' = \frac{AA'}{(A-A')^2};\ n = \frac{AA''}{(A-A')^2};\ n' = n'' = \frac{A'A''}{(A'-A'')};$$

$$q'' = \frac{E}{A''},\quad q' = \frac{E}{A'},\quad q = \frac{E}{A}.$$

La somme des six valeurs de $z'^2 = 4p''^2c^2 - 2n''b^2 - 2m''a^2 - 2q''$,

id. $y'^2 = 4p'^2b^2 - 2n'c^2 - 2m'a^2 - 2q'$,

id. $z'^2 = 4p^2a^2 - 2nc^2 - 2mb^2 - 2q$;

la somme des six valeurs de $-2ax - 2by - 2cz = 4c^2p'' + 4b^2p' + 4a^2p$.

Le carré de la normale est $(x'-a)^2 + (y'-b)^2 + (z'-c)^2$; désignant par $2R^2$ la somme des six valeurs de ce carré, on obtient, toute réduction faite

$$\begin{aligned} a^2[2p^2 + 2p - (m'-m'') + 3] - q - q' - q'' &= R^2, \\ + b^2[2p'^2 + 2p' - (m' + n'') + 3], & \\ + c^2[2p^2 + 2p - (m'' + n'') + 3]; & \qquad (3) \end{aligned}$$

R étant une quantité constante, etc. C. Q. F. D.

Exemple. Soit l'ellipsoïde

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = a^2b^2c^2,$$

l'équation (3) devient

$$\left.\begin{aligned} & b^4c^4x^2[a^4 + b^4 + c^4 - a^2(b^2 + c^2)] \\ & a^4c^4y^2[a^4 + b^4 + c^4 - b^2(a^2 + c^2)] \\ + \; & a^4b^4z^2[a^4 + b^4 + c^4 - c^2(a^2 + b^2)] \end{aligned}\right\} = a^4b^4c^4(R^2 - a^2 - b^2 - c^2):$$

la marche du calcul est la même, pour les surfaces privées de centre.

Observation. Dans les lignes du second degré, le lieu géométrique est une ligne semblable et semblablement placée.

Rapport fait à la Société Philomathique sur une Machine à flotteur oscillant

DE M. ANATOLE DE CALIGNY.

(Commissaires, MM. CAGNIARD DE LATOUR, et COMBES *rapporteur*).

La machine dont M. de Caligny a entretenu la Société (*) a pour but d'obtenir un mouvement rectiligne alternatif, par le moyen d'un simple flotteur, qui s'élève et s'abaisse périodiquement, avec le niveau de l'eau qui le supporte. M. de Caligny obtient ce niveau périodiquement variable par les dispositions suivantes :

Un large siphon, à branches inégales en hauteur, debouche d'un côté, par la plus haute branche, dans le réservoir des eaux motrices, tandis que l'autre s'ouvre au bas de la chute. Une espèce de couronne ou soupape annulaire, posée autour de la première branche du siphon, et dont le bord supérieur s'élève au-dessus du niveau des eaux, dans le bassin, quand elle repose sur son siége, ne permet à l'eau motrice de s'introduire dans cette branche, que lorsqu'elle est soulevée, ce qui a lieu, à des intervalles périodiques, par l'intermédiaire d'un flotteur particulier. Cette soupape ou vanne annulaire, et le flotteur principal, sont les seules pièces solides de la machine, qui fonctionne d'ailleurs, sans avoir besoin d'aucun autre robinet ou soupape, le mouvement alternatif et périodique d'oscillation de l'eau, dans le siphon, se produisant par la seule influence de la gravité.

Dans le siphon de M. de Caligny, la portion de la première branche qui correspond à la hauteur de chute est rétrécie. Dans la partie inférieure à la chute, le siphon prend une section plus considérable, et la deuxième branche qui débouche au niveau inférieur de la chute se termine par un évasement d'une fort grande section.

(*) Le 26 janvier 1839.

Pour concevoir le jeu de cette machine, il suffira de se représenter d'abord le siphon entièrement rempli d'eau, dans toutes ses parties, la soupape d'admission des eaux motrices fermée, et le flotteur supprimé. L'eau descendrait alors dans la première branche, et son niveau baisserait au-dessous du bas de la chute, d'une hauteur qui dépendrait du rapport entre les sections des deux parties du siphon, supérieure et inférieure au niveau de la décharge. A cette oscillation descendante de l'eau, dans le siphon, succéderait une oscillation en sens inverse, dans laquelle l'eau remonterait, abstraction faite des frottements, à la hauteur de la source.

Ce mouvement oscillatoire se continuerait indéfiniment, s'il n'était pas éteint par les frottements des filets liquides entre eux, et contre les parois du tube. Par suite de ces résistances, l'amplitude des oscillations diminuerait et bientôt deviendrait nulle. Mais il suffira, pour les entretenir, de laisser couler, chaque fois que l'oscillation en retour vers la source sera terminée, une petite quantité d'eau de la source, dans la première branche du siphon. Cette quantité d'eau se versera, à la fin de l'oscillation descendante, au bas de la chute, et les oscillations conserveront leur amplitude, pourvu que le travail moteur dû à la chute d'eau, versée à chaque oscillation, soit égal au travail résistant absorbé par les frottements.

Si maintenant on conçoit qu'un simple flotteur soit placé dans la branche supérieure du siphon, celui-ci oscillera, avec le niveau de l'eau dans cette branche, et la continuité des oscillations sera encore entretenue par une dépense d'eau motrice renouvelée, à la fin de chaque oscillation du flotteur, suffisante pour vaincre les résistances passives.

Si le flotteur est lié à un contre-poids, par l'intermédiaire d'un balancier, ou de tout autre système analogue, de façon que le contre-poids soit élevé à chaque oscillation descendante du flotteur, l'immersion du flotteur dans l'eau diminuera par suite de l'action du contre-poids, et il sera facile de déterminer, par les principes les plus simples de la Mécanique, la hauteur verticale dont le flotteur chargé du contre-poids s'abaissera, dans la première partie de l'oscillation de l'eau, ou ce qui est la même chose, la hauteur à laquelle le flotteur sera soulevé. Dans la seconde partie de l'oscillation, si le contre-poids

cesse d'agir sur le flotteur; et si l'on emploie sa chute à l'exécution d'un certain travail, le flotteur, abstraction faite des frottements, ne remontera pas à la hauteur du point de départ; pour l'y ramener, il faudra verser dans le siphon, à la fin de l'ascension, une quantité d'eau motrice, dont le poids multiplié par la hauteur de chute, soit égal au contre-poids que le flotteur a à soulever, multiplié par la hauteur à laquelle celui-ci a été élevé. Cette eau se versera à chaque oscillation, au bas de la chute. Il faudra y joindre une certaine quantité d'eau pour surmonter les frottements, et la somme de ces deux quantités formera la dépense totale d'eau motrice. On voit donc que pour assurer la continuité du jeu de la machine, il suffit de soulever la soupape annulaire, vers la fin de chaque course ascendante du flotteur, et de la tenir ouverte, pendant un temps suffisant, pour qu'elle verse la quantité d'eau nécessaire, pour conserver l'amplitude des oscillations. Il est facile de soulever cette soupape, dans le moment convenable, au moyen d'un flotteur particulier qui la lève, dès que l'eau a atteint un certain niveau, et la laisse retomber, quelque temps après le commencement de l'oscillation descendante.

Tel est le principe de la machine projetée par M. de Caligny. Elle donne lieu à un mouvement rectiligne alternatif, qui peut être transmis à des tiges de pompes, ou à d'autres outils qui doivent recevoir un mouvement du même genre, et présente ainsi de l'analogie, avec les machines à colonne d'eau, et les machines à vapeur à simple effet.

C'est une condition essentielle du bon établissement des appareils de ce genre, que les parties qui ont un mouvement alternatif diminuent de vitesse, par degrés insensibles, à la fin de chaque période de mouvement, pour prendre ensuite une vitesse en sens contraire. Si cette condition n'est point remplie, la machine est bientôt détruite par les chocs, qui se reproduisent périodiquement, à des intervalles rapprochés. Ainsi dans les machines à vapeur à simple effet, l'on obtient une vitesse du piston graduellement décroissante jusqu'à o, dans la course descendante, en réglant convenablement la partie de la course, pendant laquelle la vapeur de la chaudière est admise dans le cylindre; l'on détruit graduellement la vitesse, dans la course ascendante, en fermant la soupape d'équilibre, avant que cette course soit entièrement accomplie, de sorte que la pression de la vapeur

croissant, à mesure que son volume diminue, ralentit insensiblement, et éteint la vitesse. Dans les machines à colonne d'eau, ces moyens ne sont plus applicables, à cause de la faible compressibilité de l'eau. On y supplée d'une part en diminuant beaucoup la vitesse moyenne des pistons, et d'autre part, par l'ouverture et la fermeture très lente des passages, par lesquels les eaux motrices entrent dans le cylindre, et en sortent. Il est évident que l'on n'obtient ici ce résultat, qu'aux dépens de la force motrice. Car le rétrécissement des ouvertures, que le liquide doit traverser, donne lieu à des résistances passives, que l'on peut comparer à celle d'un frein, que l'on appliquerait extérieurement à une machine, dont on voudrait ralentir la vitesse. Dans le bélier hydraulique, les variations de vitesse ont lieu, dans un temps très court, surtout lorsqu'on supprime le réservoir d'air, et c'est sans contredit à cette cause, qu'il faut attribuer la prompte détérioration de ce genre de machine, et la diminution d'effet utile observée, à mesure qu'on élève l'eau à une hauteur plus grande, par rapport à la chute d'eau. La machine à flotteur oscillant de M. de Caligny, n'est pas sujette aux inconvénients de cette espèce. La vitesse du flotteur, aux extrémités de la course s'éteindra en effet, par degrés insensibles, sans aucun choc ni perte de forces, comme la vitesse de la colonne d'eau oscillante, et de plus il est tout-à-fait impossible qu'il survienne, à cette époque un choc entre corps solides, comme cela arrive souvent, par la maladresse des machinistes, dans les machines à vapeur à simple effet et les machines à colonne d'eau.

Quant aux résistances passives, elles consistent; 1° dans les frottements que la colonne d'eau éprouvera, pendant les oscillations; 2° dans la force vive que l'eau conservera, en se déversant au bas du siphon; 3° dans le choc de l'eau motrice qui est versée, dans la branche supérieure du siphon, à la fin de chaque oscillation; 4° enfin dans l'effort nécessaire, pour soulever périodiquement la soupape ou la vanne annulaire.

Les frottements peuvent être diminués, en augmentant la section, et le développement du siphon, dans la partie qui se trouve inférieure à la hauteur de chute. On est le maître d'allonger ainsi la durée des oscillations, autant qu'on le veut, il suffit de voir que la diminution de vitesse qui en résulte, compense l'allongement des surfaces

frottantes, au moins jusqu'à un certain point. La force vive que l'eau conserve, en se déversant au bas de la chute, est rendue très petite, dans le dispositif de M. de Caligny, par l'élargissement de l'orifice. Le soulèvement de la soupape annulaire n'exige qu'une dépense de force excessivement médiocre, puisqu'elle peut être équilibrée au besoin par des contre-poids, et qu'il suffit d'une faible pression sur le siége, pour prévenir l'écoulement de l'eau, sous une faible charge. Il ne reste plus que le choc de l'eau motrice, au moment où elle arrive sur l'eau contenue dans le siphon, choc dont M. de Caligny prévient le mauvais effet, en évasant convenablement la première branche du siphon, ce qui fait que l'eau motrice ne vient frapper l'eau remontante, qu'avec une très petite vitesse.

La machine à flotteur oscillant de M. de Caligny est surtout propre à utiliser de petites chutes, avec un grand volume d'eau.

Placée dans de pareilles circonstances, il ne nous paraît pas douteux qu'elle fonctionne avec un avantage au moins égal à celui des meilleures machines connues, et employées à produire des mouvements alternatifs. L'auteur a fait, dans sa composition, une application rationnelle des vrais principes de la mécanique appliquée. Elle se recommande par sa simplicité, qui est telle qu'on n'a point à craindre de rencontrer dans la mise à exécution, des résistances que l'on n'aurait pas prévues d'abord.

En conséquence votre Commission est d'avis que le Mémoire de M. de Caligny, sur une nouvelle machine à flotteur oscillant, est digne de l'approbation de la société.

Sur la diffraction de la Lumière ;

PAR M. ABRIA.

Dans son beau Mémoire sur la diffraction (*), Fresnel a vérifié les formules d'intensité auxquelles l'a conduit la théorie qu'il en a donnée dans l'hypothèse des ondulations, en calculant la position des points de plus grande ou de moindre intensité et la comparant avec celle déterminée directement dans un grand nombre d'expériences faites avec une lumière rouge homogène sur les franges produites soit par le bord d'un écran, soit par une ouverture étroite ou un corps étroit.

J'ai pensé qu'à défaut de moyens photométriques directement applicables à ce genre de phénomènes, il ne serait pas inutile de vérifier les formules de Fresnel par un autre procédé fondé, il est vrai, sur une règle empirique, mais dont l'emploi peut être regardé comme légitime, puisqu'il a réussi dans d'autres circonstances. En voici le principe : lorsque la lumière employée est blanche, au lieu d'être homogène, les franges ne sont plus alternativement obscures et brillantes mais diversement colorées, et la teinte en chaque point dépend des intensités relatives en ce même point des rayons de diverses couleurs qui composent la lumière blanche. Cela posé, si l'on mesure par des moyens micrométriques la position d'une frange de teinte connue, et si l'on calcule pour le lieu de cette frange, à l'aide des formules de Fresnel, l'intensité de la lumière pour chacune des sept couleurs du spectre, et par la règle de Newton, la nature et l'intensité de la teinte résultant du mélange de ces divers rayons colorés, on devra retrouver celle donnée par l'observation, si les formules représentent les intensités

(*) *Annales de Chimie et de Physique*, tome XI et tome V des *Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences.*

absolues, ou du moins relatives, des différents rayons. J'ai fait dans ce but un petit nombre d'expériences que je rapporterai après avoir rappelé, en peu de mots la théorie de la diffraction telle que Fresnel l'a donnée, mais en présentant d'une manière différente sa solution du problème des interférences.

L'impression d'une lumière sur l'organe pour être sensible doit durer un temps très court, il est vrai, mais pendant lequel néanmoins les molécules éthérées exécutent un grand nombre d'oscillations. Or, on doit prendre pour mesure de l'intensité de la lumière la force vive possédée par les molécules du fluide pendant le temps nécessaire pour l'impression sensible : mais si, comme cela a toujours lieu, on veut seulement connaître le rapport de ces intensités en deux points différents, il suffit de calculer celui qui existe entre les sommes des carrés des vitesses que prennent en ces deux points les molécules éthérées pendant la durée d'une vibration : car, à cause du très grand nombre de vibrations qui ont lieu avant la sensation, on peut supposer ce nombre entier et le même pour les deux points.

Cela posé, je conçois, pour plus de simplicité, une couche d'éther terminée par deux plans parallèles, indéfiniment prolongés et situés à une distance très petite l'un de l'autre; je suppose pour corps lumineux une ligne lumineuse perpendiculaire aux deux plans. Les mouvements se propageront circulairement autour de cette ligne, et les points ébranlés au même instant se trouveront sur une même surface cylindrique droite à base circulaire ayant pour axe la ligne lumineuse : cette surface est l'onde lumineuse. S'il se trouve quelque part un écran dans le fluide, les molécules éthérées en contact avec le plan auront une vitesse dont la composante normale au plan sera constamment nulle, et celle des molécules situées au-delà ne sera pas la même que si l'obstacle n'existait pas. Il s'agit de calculer cette vitesse et par suite l'intensité de la lumière en un point quelconque de l'espace situé au-delà du corps par rapport au point lumineux, mais seulement près de la limite de l'ombre géométrique.

Soient (pl. II, *fig.* 1) L la projection de la ligne lumineuse, AB la trace de l'écran, LAC la limite de l'ombre géométrique, ADMM'X la portion non interrompue de l'onde lumineuse, P le point pour lequel on veut calculer l'intensité de la lumière.

Je décompose l'arc AX en parties de grandeur insensible, et je regarde, d'après le principe de la superposition des petits mouvements, la vitesse de P comme égale à la résultante statique des vitesses qu'il prendrait en vertu de l'action de chacun des éléments de l'onde. Il suffira, pour calculer cette résultante, de faire la somme de ces vitesses élémentaires, parce qu'en décomposant l'arc AX en parties dont les différences de distances à P soient successivement d'une demi-longueur d'ondulation, on peut regarder comme se neutralisant mutuellement les vitesses envoyées par les éléments tels que MM′ dont les directions sont inclinées sensiblement sur PM.

En prenant pour unité de vitesse la vitesse maximum des molécules éthérées, pour unité de temps la durée d'une oscillation, on a pour l'expression de la vitesse u d'une molécule quelconque M de l'onde à l'époque t, en la supposant nulle à l'origine,

$$u = \sin 2\pi t,$$

π étant le rapport de la circonférence au diamètre.

La vitesse que P recevra, à l'époque t, de l'élément $MM' = dz$, sera exprimée, en appelant λ la longueur d'une ondulation, par

$$(1) \qquad \sin 2\pi \left(t - \frac{PM}{\lambda}\right).dz.$$

Si l'on pose $LA = a$, $Ac = b$, $MD = z$, on a

$$PM = PD + MN = PD + mn = b + \frac{z^2}{2a} + \frac{z^2}{2b} = b + \frac{(a+b)z^2}{2ab};$$

l'expression (1) devient

$$\sin 2\pi \left(t - \frac{b}{\lambda} - \frac{(a+b)z^2}{2ab\lambda}\right) dz = \sin 2\pi (T - Z)\, dz,$$

en posant

$$T = t - \frac{b}{\lambda}, \qquad Z = \frac{(a+b)z^2}{2ab\lambda}.$$

La vitesse V que prend P en vertu des actions d'une portion de l'onde, pour les deux extrémités de laquelle les valeurs de DM sont z' et z'', z' et z'' pouvant être positifs ou négatifs, sera donnée par

l'intégrale

$$V = \int_{z'}^{z''} \sin 2\pi (T - Z) \,.\, dz, \qquad (2)$$

et l'intensité I de la lumière en P aura pour expression

$$I = \int_0^1 V^2 dt. \qquad (3)$$

Développant les calculs et remarquant que

$$\int_0^1 \sin^2 2\pi T dt = \int_0^1 \cos^2 2\pi T dt = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 \sin 2\pi T \cos 2\pi T \,.\, dt = 0,$$

$$I = \frac{1}{2}\left(\int_{z'}^{z''} dz \sin 2\pi Z\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\int_{z'}^{z''} dz \cos 2\pi Z\right)^2,$$

remplaçant Z par sa valeur

$$I = \frac{1}{2}\left(\int_{z'}^{z''} dz \sin \frac{2\pi (a+b) z^2}{2ab\lambda}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\int_{z'}^{z''} dz \cos \frac{2\pi (a+b) z^2}{2ab\lambda}\right)^2 (*), \quad (4)$$

posant

$$v^2 = \frac{2(a+b) z^2}{ab\lambda}, \qquad (5)$$

d'où

$$dz = dv \sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}},$$

et représentant par v' et v'' les valeurs de v correspondantes à z' et z'',

---

(*) La marche que j'ai suivie pour calculer l'intensité de la lumière coïncide avec celle de Fresnel. En effet, ce célèbre physicien, après avoir trouvé pour la vitesse des molécules éthérées une expression de la forme $u = a \sin 2\pi t$, prend a^2 pour mesure de l'intensité de la lumière, ce qui suppose, comme je l'ai fait, que le rapport des intensités en deux points différents est égal au rapport qui existe entre les sommes des valeurs que prend u^2 en chacun de ces points pendant la durée d'une oscillation.

on obtient

$$I = \frac{ab\lambda}{4(a+b)}\left[\left(\int_{\nu'}^{\nu''} d\nu \sin\frac{\pi\nu^2}{2}\right)^2 + \left(\int_{\nu'}^{\nu''} d\nu \cos\frac{\pi\nu^2}{2}\right)^2\right]. \quad (6)$$

Si l'écran n'existait pas, z' et z'' seraient $+\infty$ et $-\infty$, ainsi que ν' et ν''; alors les intégrales se réduisent chacune à l'unité, ce qui rend la valeur de I égale à $\frac{ab\lambda}{2(a+b)}$ et le rapport de la valeur précédente à celle-ci est égal, abstraction faite du facteur $\frac{1}{2}$, à

$$\left(\int_{\nu'}^{\nu''} d\nu \sin\frac{\pi\nu^2}{2}\right)^2 + \left(\int_{\nu'}^{\nu''} d\nu \cos\frac{\pi\nu^2}{2}\right)^2. \quad (7)$$

On ne connaît pas les valeurs générales de

$$\int d\nu \sin\frac{\pi\nu^2}{2}, \quad \int d\nu \cos\frac{\pi\nu^2}{2},$$

on sait seulement qu'elles sont égales à l'unité, lorsque les limites sont $-\infty$, $+\infty$. Fresnel a calculé une table des valeurs numériques de chacune de ces intégrales dans des limites suffisantes pour les applications.

Lorsqu'on veut déterminer, à l'aide de la formule (7), les points P pour lesquels l'intensité de la lumière est maximum ou minimum, on cherche par tâtonnement les valeurs que doit prendre l'une des limites, convenablement choisie pour que l'expression (7) soit maximum ou minimum; on calcule ensuite par la formule (5) la valeur correspondante de z : on déduit facilement de là la valeur de PC, ou la distance de P à l'ombre géométrique (*).

(*) La formule (4) convient à tous les cas de la diffraction dans lesquels il ne faut intégrer que dans un sens et spécialement aux trois cas principaux de ce genre de phénomènes, savoir, aux franges produites par une ouverture étroite, à celles de l'ombre d'un corps étroit, et enfin aux franges que fait naître le bord d'un écran. On peut, par des considérations géométriques très simples, rendre raison, ainsi que Fresnel l'a fait, des deux premières espèces de franges, et même en

Dans les applications que j'aurai à faire de cette formule, la position de P sera déterminée par l'observation, ce qui fera connaître les valeurs de z', z'', et par (5) celles de v' et v''; on calculera alors les valeurs de (7) pour les sept rayons simples : en représentant par r, o, j, v, b, i, u, les valeurs obtenues, il restera à les substituer dans les deux expressions

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{(r+u)0,822682+(o+i)0,207399-(j+b)0,511428-v.0,953819}{r+o+j+v+b+i+u} \\ Y &= \frac{(r-u)0,482373+(o-i).0,963168+(j-b)0,815348}{r+o+j+v+b+i+u}, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

qui sont, d'après la règle de Newton, les coordonnées du centre de gravité de la teinte cherchée : en appelant δ la distance de ce centre de gravité au centre du cercle, et ψ l'angle de la ligne qui joint ces deux points avec l'axe oR (fig. 2), on a

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{Y}{X}, \quad \delta = \frac{X}{\cos \psi}.$$

L'angle ψ fait connaître la nature de la teinte cherchée, et peut varier de 0° à 360°; $1 - \delta$ est la proportion de lumière blanche qui entre dans la composition de la teinte (*).

Lorsque la lumière émanée de la source traverse une ouverture circulaire de diamètre très petit, on aperçoit au-delà une tache centrale de teinte variable avec sa distance à l'orifice, et entourée d'anneaux colorés. On peut encore dans ce cas comparer simplement

---

fixer à très peu près la position. Mais le même raisonnement ne peut pas servir pour les franges du bord d'un écran. La raison en est, que dans les deux premiers cas, la vitesse des molécules éthérées dans les franges obscures est *constamment* nulle ou plus petite que dans les points voisins : par suite, l'intensité de la lumière y est nulle ou très petite. Dans le dernier cas, il n'existe aucun point dans lequel la vitesse de l'éther soit à chaque instant plus petite que dans les points voisins, et il faut calculer la force vive pendant la durée d'une vibration, pour connaître les points dans lesquels l'intensité de la lumière est minimum ou maximum.

(*) *Traité de Physique mathématique* de M. Biot, 3e vol.

la théorie à l'expérience quand on connaît la distance de la tache à l'orifice, le diamètre de celui-ci et sa distance au point lumineux. Je vais donc calculer d'abord l'intensité, dans le cas d'une lumière homogène, pour la projection du centre de l'ouverture.

Je décompose la surface de l'onde en zones infiniment étroites par des plans perpendiculaires à LC (*fig.* 3). La vitesse en C à l'époque t due à la zone correspondante au point M pour lequel $AM = z$ sera

$$2\pi z dz \sin 2\pi\left(t - \frac{CM}{\lambda}\right) = 2\pi z dz \sin 2\pi\left[t - \frac{b}{\lambda} - \frac{z^2(a+b)}{2ab\lambda}\right] = 2\pi z dz \sin 2\pi(T - Z),$$

en employant les notations précédentes.

La vitesse V en C par l'action de tous les éléments de l'onde sera

$$V = 2\pi \int_0^r z dz \sin 2\pi(T - Z),$$

r étant le rayon de l'ouverture, et l'intensité

$$I = \int_0^1 V^2 dt,$$

ce qui conduit à

$$I = \frac{1}{2}\left(\int_0^r 2\pi z dz \sin 2\pi Z\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\int_0^r 2\pi z dz \cos 2\pi Z\right)^2.$$

Comme

$$dZ = \frac{(a+b)}{ab\lambda} z dz,$$

$$\int 2\pi z \sin 2\pi Z . dz = -\frac{ab\lambda}{a+b} \cos 2\pi Z + \text{const.},$$

$$\int 2\pi z \cos 2\pi Z . dz = \frac{ab\lambda}{a+b} \sin 2\pi Z + \text{const.},$$

$$\int_0^r 2\pi z \sin 2\pi Z . dz = \frac{ab\lambda}{a+b}\left[1 - \cos\frac{\pi(a+b)r^2}{ab\lambda}\right],$$

$$\int_0^r 2\pi z \cos 2\pi Z . dz = \frac{ab\lambda}{a+b} \sin\frac{\pi(a+b)r^2}{ab\lambda}.$$

On aura donc

$$I = \frac{a^2b^2\lambda^2}{2(a+b)^2}\left[2 - 2\cos\frac{\pi(a+b)r^2}{ab\lambda}\right] = \frac{a^2b^2\lambda^2}{(a+b)^2}\left[1 - \cos\frac{\pi(a+b)r^2}{ab\lambda}\right].$$

D'après la règle de Newton, il faut substituer à r, o, j,... dans (8) les rapports entre l'intensité de la lumière correspondante et celle qui aurait lieu si l'écran n'existait pas. Il faut donc calculer la valeur de I quand l'ouverture est indéfinie; mais en supposant $r = \infty$, la formule donne un résultat illusoire : pour obtenir sa valeur dans ce cas, on démontre que si l'on partage l'onde en zones dont les différences de distances à C croissent de $\frac{\lambda}{2}$, l'intensité de la lumière apportée par le demi-anneau central égale celle de la lumière apportée lorsque l'écran n'existe pas. Or, si l'on pose $\frac{(a+b)r^2}{2ab} = \frac{\lambda}{4}$, ce qui donne la valeur de r correspondante au demi-anneau central $\cos\frac{\pi(a+b)r^2}{ab\lambda} = 0$, et par suite I devient $\frac{a^2b^2\lambda^2}{(a+b)^2}$. Les valeurs de r, o, j,... se calculeront donc simplement par la formule

$$1 - \cos\frac{\pi(a+b)r^2}{ab\lambda}. \qquad (9)$$

Les formules précédentes sont indépendantes de la direction de la vitesse des molécules éthérées; de sorte que l'intensité de la lumière en chaque point reste la même lorsque la lumière incidente est polarisée dans un plan quelconque, ou lorsqu'elle est neutre.

Le tableau n° 1 renferme les résultats d'une série d'expériences faites avec des ouvertures étroites. Le diamètre de chaque ouverture a été déterminé avec une lame de verre divisée en dixièmes de millimètre. L'intervalle entre les franges situées symétriquement de part et d'autre de la projection du milieu de l'ouverture, a été mesurée à l'aide d'une vis micrométrique portant une loupe munie à son foyer d'un fil très fin; le pas de la vis est de $\frac{1}{5}^{mm}$; la tête en est divisée en 100 parties; chaque intervalle a été mesuré plusieurs fois, et le rapport de la différence entre les nombres obtenus à leur valeur moyenne s'est trouvé $\frac{1}{80}$ au plus, du moins dans les observations pour lesquelles cette valeur surpasse 2^{mm}.

La 6e colonne contient la moitié de chacun de ces intervalles ou la distance de chaque frange à la projection du milieu de l'ouverture.

Si l'on représente par m cette distance réduite dans le rapport de a

à $a+b$, et par l la demi-largeur de l'ouverture, on a pour les valeurs des limites z', z''

$$z' = m - l, \quad z'' = m + l,$$

Lorsque z' est positif, la frange correspondante est extérieure, et intérieure au contraire, lorsqu'il est négatif. Le premier de ces deux cas a lieu pour les observations 1, 2, 5, 6, 7, et le deuxième pour toutes les autres. Pour les franges extérieures, j'ai été obligé, à cause de la petitesse des valeurs de r, o, j,... de calculer les valeurs de $\int_0^v \sin\frac{\pi}{2}v^2 dv$, et $\int_0^v \cos\frac{\pi}{2}v^2 dv$ en faisant croître v de centième en centième, au lieu de dixième en dixième, comme Fresnel l'a fait.

La 7e colonne renferme les valeurs de ψ, et la 8e la nature de la teinte correspondante d'après la règle de Newton; mais on jugera mieux la nature de celle-ci en jetant les yeux sur la figure 2.

Sur 17 observations que ce tableau renferme, 11 présentent, soit pour la teinte, soit pour la proportion de blanc, un accord parfait entre le calcul et l'expérience. Pour les autres, on retrouve toujours la teinte observée, mais avec une déviation tantôt dans un sens, tantôt dans le sens opposé.

TABLEAU I (*).

NUMÉROS DES OBSERVATIONS	DEMI-LARGEUR DE L'OUVERTURE.	VALEURS de a.	VALEURS de b.	TEINTE DE LA FRANGE observée.	DISTANCE de cette frange à la projection du milieu de l'ouverture.	VALEURS de ψ.	TEINTE CORRESPONDANTE.	VALEURS de $1-\delta$ ou proportion de blanc.
1	0,4	1000	2000	Vert pâle.	4,53	165°	Vert légèrement jaunâtre.	0,69
2	»	»	»	Rouge violacé.	3,98	333°	Violet tendant au rouge.	0,84
3	0,75	1000	1400	Bleu très pâle	0 »	311° 23′	Violet chargé d'indigo.	0,86
4	»	»	»	Jaune blanc.	0,50	95° 10′	Jaune orangé.	0,89
5	0,25	1000	385	Rouge.	1,10	66° 36′	Orangé fortement rougeâtre.	0,60
6	»	»	2100	Bleu.	2,31	271° 51′	Indigo fortement bleuâtre.	0,56
7	»	»	»	Jaune légèrem. verdâtre.	3,33	127° 3′	Jaune très légèrement verdâtre.	0,74
8	0,8	500	620	Vert légèrement bleuâtre.	0 »	224° 13′	Bleu verdâtre.	0,86
9	»	»	830	Violet bleuâtre.	0 »	305° 49′	Violet indigo.	0,84
10	»	»	»	Blanc jaunâtre.	0,31	96° 14′	Jaune orangé.	0,89
11	»	»	»	Bleu.	0,66	291° 19′	Indigo violacé.	0,95
12	»	1180	370	Bleu verdâtre.	0 »	239° 37′	Bleu verdâtre.	0,85
13	»	»	»	Orangé rougeât.	0,15	51° 25′	Rouge fortement orangé.	0,87
14	»	»	»	Blanc.	0,68	307° 12′	Violet indigo.	0,98
15	»	»	550	Jaune.	0 »	61° 52′	Orangé très rougeâtre.	0,77
16	»	»	»	Bleu.	0,20	246° 56′	Bleu.	0,86
17	»	»	»	Rouge jaunâtre.	0,37	32° 37′	Rouge tendant un peu vers le jaune.	0,89

(*) Le millimètre est pris pour unité

Le tableau n° 2 contient les résultats d'une deuxième série d'expériences faites sur des orifices circulaires. Le diamètre de chaque orifice a été mesuré à l'aide de la lame de verre qui avait servi pour les ouvertures étroites. Celui du deuxième était un peu moindre que $1^{mm},9$; en prenant pour r la moitié de ce nombre ou 0,95, les calculs des trois premières observations ne s'accordaient pas parfaitement avec l'expérience et présentaient pour les valeurs de ψ des différences qui étaient pour toutes dans le même sens. Je modifiais alors la valeur de r dans les centièmes de millimètre jusqu'à ce que la teinte calculée s'accordât avec celle observée pour l'expérience (8); c'est cette valeur ainsi modifiée qui a été employée pour les calculs suivants. La valeur 1,886 qui en résulte pour le diamètre se trouve inférieure à 1,90 de quantités que je ne pouvais apprécier.

La plus grande différence entre le calcul et l'observation a lieu pour l'expérience (11); (12) présente un accord très frappant, et pour les autres il y a quelques déviations assez faibles.

TABLEAU II.

NUMÉROS DES OBSERVATIONS.	VALEURS de r.	VALEURS de a.	VALEURS de b.	VALEURS de ψ.	TEINTE CORRESPONDANTE.	VALEURS de $1-\delta$ ou proportion de blanc.	TEINTE OBSERVÉE.
1	0,5	1000	360	55°44′	Rouge orangé.	0,39	Rouge orangé
2	»	»	590	96.42	Jaune très orangé.	0,81	Jaune orangé très mêlé de blanc.
3	»	»	2500	275.57	Indigo bleuâtre.	0,999	Blanc.
4	»	500	400	297.36	Indigo violacé.	0,33	Indigo violacé.
5	»	»	570	58. 7	Rouge orangé.	0,38	Rouge orangé.
6	»	»	740	82.48	Orangé tendant vers le jaune.	0,49	Jaune orangé très beau.
7	»	1760	540	102. 3	Jaune orangé.	0,90	Jaune pâle.
8	0,943	500	520	203.23	Vert bleuâtre.	0,57	Vert bleuâtre.
9	»	»	710	7.24	Rouge très violacé.	0,66	Rouge.
10	»	»	940	111.03	Jaune légèrement orangé.	0,58	Jaune pâle.
11	»	»	1410	229.15	Bleu légèrement verdâtre.	0,46	Vert légèrement jaunâtre.
12	»	»	1940	283.55	Indigo.	0,55	Indigo.
13	»	»	2330	307.13	Violet indigo.	0,45	Violet un peu bleuâtre.
14	»	1000	420	14.13	Rouge légèrement violet.	0,66	Rouge légèrement orangé.
15	»	»	780	356.22	Violet fortement rougeâtre.	0,55	Rouge très violacé
16	»	»	1830	252.53	Bleu indigo.	0,67	Bleu verdâtre pâle.
17	»	1680	1330	283 39	Indigo.	0,39	Bleu très beau.
18	»	1760	540	309.53	Violet chargé d'indig.	0,49	Bleu chargé d'ind.

J'ai rapporté dans ces deux tableaux toutes les observations que j'ai calculées. Il est impossible, il est vrai, de fixer avec précision les valeurs de δ et de ψ, qui conviennent à une teinte observée : mais on peut dire avec certitude quelle est la couleur dominante, et celle-ci a presque toujours été retrouvée par la théorie. Si l'on veut bien réfléchir à la longueur des calculs nécessaires à la détermination de chaque teinte, on regardera, je pense, ce travail comme offrant une vérification aussi satisfaisante que possible des formules d'intensité, du moins sous le point de vue que je me suis proposé.

NOTE

Sur l'origine de nos chiffres et sur l'Abacus des Pythagoriciens ;

PAR M. VINCENT.

Depuis que M. CHASLES, dans son *Aperçu historique sur les méthodes en Géométrie*, et dans plusieurs communications qu'il a faites à l'Académie des Sciences (13 mai 1838 et 21 janvier 1839), a rappelé l'attention sur cette matière qui semblait épuisée depuis longtemps : un vif intérêt s'y est trouvé rattaché de nouveau, tant par le talent avec lequel il l'a traitée, que par la discussion soulevée par suite entre lui et un savant académicien, M. LIBRI, auteur de l'*Histoire des Mathématiques en Italie*.

Certaines recherches sur la Philosophie pythagoricienne, que j'avais faites antérieurement pour un autre objet, m'ayant porté à m'occuper de la question mise ainsi en quelque sorte à l'ordre du jour, je me suis vu conduit à une opinion différente à quelques égards de celles qui avaient été proposées. Pensant qu'il pouvait être utile de la faire connaître, je crus devoir la communiquer à M. LIBRI, par une lettre dont il voulut bien faire part à l'Académie des Sciences dans sa séance du 4 mars dernier. C'est sur le même sujet que je me propose de donner ici quelques détails.

Ce qu'il y a jusqu'à présent de plus probable quant à l'origine de nos chiffres, est qu'ils dérivent de certains caractères nommés *apices*, que l'on trouve dans les manuscrits de BOÈCE et d'autres écrivains. Il suffit en effet de renverser toute la série que présentent les apices de *Boèce*, tels qu'ils se trouvent dans un manuscrit de la Bibliothèque de Chartres d'où M. CHASLES les a extraits, pour y reconnaître immédiatement presque tous nos chiffres.

Nous commencerons donc par mettre ces apices sous les yeux du lecteur, 1° avec la double forme qu'ils présentent dans le manuscrit de Chartres, 2° avec celle qu'ils ont dans un manuscrit du fonds d'Arundel, contenant un traité de l'*Abacus*, et que possède le *Bristish Museum* (*).

Joignons de plus, à ces apices, les noms que leur donnent les deux manuscrits.

MANUSCRIT DE CHARTRES.			MANUSCRIT D'ARUNDEL	
Première série.		Deuxième série.		
I	Igin.	I	I	Igin.
ʊ	Andras.	ʊ	ʊ	Andras.
Ϟ	Ormis.	Ϟ	Ϟ	Ormis.
B	Arbas.	ϐ	ϐ	Arbas.
ϒ	Quimas.	ϒ	ϒ	Quimas.
⊞	Caltis.	Ꝑ	⊞	Chalcus.
Λ	Zenis.	Ν	V	Zenis.
ȣ	Temenias.	8	8	Zementas.
ϽϽ	Celentis.	ϑ	ϑ	Celentis.

(*) Ce manuscrit, coté n° 343, a été communiqué avec la plus gracieuse bienveillance à mon ami et compatriote M. *Cadart*, professeur au collége royal de Douai, par le savant M. *Barnwell*. Le *Traité de l'Abacus* qu'il contient se trouve également dans plusieurs manuscrits appartenant à d'autres bibliothèques, et dont l'un, à ce que m'a appris M. Chasles, donne à l'auteur le nom de *Gerland*.

On peut voir aussi à la Bibliothèque royale, ancien fonds latin, le manuscrit 7193, *fol.* 2. (La forme des apices de ce manuscrit est reproduite dans le *Traité de Paléographie*, de M. *Natalis de Wailly*, publié par le comité des Chartes.)

Maintenant, voyons s'il ne nous sera pas possible d'interpréter ces mots qui, dans leur ensemble du moins, ne paraissent usités dans aucune langue connue.

D'abord, comme l'avait depuis long-temps remarqué le savant *Huet*, évêque d'Avranches (*Demonstr. evang.*), les noms des nombres 4, 5, 7, et 8, sont d'origine incontestablement hébraïque, et expriment *littéralement* leurs valeurs respectives. Ainsi *arbas* vient de ארבע *quatre*, et *quimas* de חמש, *cinq*. Les mots *temenias* et *zementas*, qui représentent l'un et l'autre le nombre *huit*, dérivent, le premier du *chaldéen* תמניא, le second de l'*hébreu* שמנת qui signifie proprement *huitaine* (nous apprécierons plus loin l'importance de cette double expression). Quant à *zenis* que l'on doit probablement lire *zevis*, il vient également de l'hébreu שבע.

Restent les cinq autres, jusqu'ici inexpliqués, et pour lesquels il nous faut chercher une autre voie. Or, *Boèce* attribuant l'invention des apices aux philosophes pythagoriciens, il nous a paru rationnel de commencer par chercher la lumière dans les doctrines de leur école. Sans entrer dans le détail de toutes les rêveries que l'on y trouve entassées, nous dirons seulement, pour ce qui tient à notre sujet, d'abord que les Pythagoriciens regardaient les nombres pairs comme femelles, et les nombres impairs comme mâles, à commencer par *trois*, parce que l'*unité*, pour eux, n'était pas un nombre, mais la *semence* des nombres, σπέρμα (*); ensuite, que les mêmes philosophes employaient, pour désigner les nombres, une foule de dénominations symboliques plus ou moins bizarres, empruntées à la Théosophie, à la Cosmogonie, à la Métaphysique, etc.... *Meursius* (**), dans un ouvrage intitulé *Denarius pythagoricus*, a fait, d'après *Nicomaque*, *Sextus empiricus*, *Photius*, *Jamblique*, *Hesychius*, *Porphyre*, *Proclus*, etc., etc., une collection de plus de *trois cents noms* applicables seulement aux *dix* premiers nombres. Citons-en quelques-uns :

L'*unité* s'appelait *Dieu*, *intelligence*, *matière*, *génération*, *amitié*, *vie*, *androgyne*, *soleil*, *abîme*, *atlas*, *tour de Jupiter*, etc.

(*) « La monade engendre tous les nombres sans être engendrée par aucun ». (*Hermès Trismégiste*, *Pœmandr.* dial. IV.)

(**) Savant commentateur hollandais.

Le *deux* était *l'audace, la puissance, l'harmonie, la justice, la mort, la gloire, le mariage*, etc.

Le nombre *trois*, réputé *saint* par excellence, était *l'harmonie, la corne d'Amalthée, Hécate, le roi de la mer*, etc.

Le *quatre* était *le porte-clé de la nature, l'harmonie, le monde, la justice*, etc.

Et ainsi des autres.

Ces dénominations, comme on le pense bien, étaient fort arbitraires; et il était loisible à chaque initié de les adopter ou de les rejeter suivant ses propres vues et son caprice. Il en résultait, d'une part, qu'un même nom pouvait appartenir à la fois à plusieurs nombres différents; et au contraire, qu'un même nombre recevait, dans plusieurs cas, des dénominations contradictoires. Ainsi par exemple, tandis que d'un côté le *quaternaire* (*) ou le nombre *quatre*, était tantôt θηλύμορφος, *d'une beauté féminine*, et tantôt ἀθήλυντος, *n'ayant rien de féminin*, d'un autre côté, le nom ὁμόνοια *concorde*, s'appliquait en même temps aux nombres 1, 3, et 9; le nom κόσμος, *monde*, aux nombres, 4, 6, 10; γάμος, *mariage*, aux nombres 2, 3, 5, 6; ἁρμονία, *harmonie*, aux nombres 2, 3, 4, 6, etc.—En un mot, la nomenclature pythagoricienne peut être comparée à ces vêtements élastiques qui s'appliquent à toutes les formes.

(*) Il ne faut pas confondre ce quaternaire avec le *quaternaire des pythagoriciens* dont parle *Plutarque* (*De animæ creat.*), et qui valait 36, étant formé de la *somme des quatre premiers nombres impairs réunis aux quatre premiers nombres pairs*.

Le *quaternaire de Platon* (Voir son *Timée*) était au contraire composé des deux séries 1, 2, 4, 8, et 1, 3, 9, 27; le tout valait par conséquent 55. En général, tout nombre que l'on considérait comme composé de *quatre* autres, était un quaternaire.

Quant à ce fameux *quaternaire*, τετρακτύς, dont l'auteur était invoqué par les pythagoriciens dans la formule de leur serment : — *Nous jurons*, disaient-ils, *par celui qui a doté notre âme du quaternaire, principe de la nature éternelle*, — pour ce quaternaire-ci, dis-je, ce n'était sans doute pas un nombre; et ceux qui, comme *Barrow* (*Lect. math.*, tom. I, p. 17), croient le trouver dans ce que l'on a postérieurement nommé le *quadrivium*, composé des quatre parties alors admises dans les Mathématiques, savoir : *l'Arithmétique, la Musique, la Géométrie*, et *l'Astronomie*, ceux-là ne sont peut-être pas loin de la vérité.

Ces prémisses posées, il ne sera pas difficile de reconnaître dans les deux premiers mots *igin* et *andras*, les racines γυν, *femme*, et ανδρ, *homme*, accompagnées, celle-ci d'une terminaison hébraïque, et la première de l'article féminin ה (*).

D'après cette interprétation, les pythagoriciens de *Boèce* auraient donc considéré l'*unité* comme la *mère*, et le *deux* comme le *père* de tous les nombres (**); et en cela ils auraient réformé le jugement de leurs anciens relativement aux sexes (***). Or, on conviendra sans peine que ces sexes sont par eux-mêmes assez équivoques, pour que leur détermination précise ait pu occasioner une scission dans l'école : on a vu d'ailleurs que l'unité était positivement *androgyne*, circonstance peu propre à rétablir l'accord.

Continuons : le mot *ormis, trois,* paraît bien dériver de ὁρμή, *essor, impulsion*, autre dénomination pythagoricienne qui, dans l'ancienne école, était appliquée au *deux*. Elle signifiait alors la *première évolution du germe numérique*, c'est-à-dire, d'après ce qui précède, la première production émanée de l'unité. Mais pour la nouvelle secte, elle avait un tout autre sens, et devait désigner l'action du principe mâle sur le principe femelle, ce dont nous allons d'ailleurs, dans un instant, trouver la confirmation (****).

(*) Ou peut-être même de l'apice ou chiffre 1, qui, par l'aide de quelque maladroit copiste, se serait furtivement glissé à côté du nom, où, par suite, il aurait été métamorphosé dans la lettre I.

(**) Il y a plus : si l'on en croit *Sextus*, les pythagoriciens regardaient les nombres *un* et *deux* comme les seuls et vrais *principes* de toutes choses, *l'unité* étant la *cause première*, et le *nombre binaire*, la *matière* qu'elle emploie (*Meiners, Histoire des sciences en Grèce*, traduite par *Laveaux*, tome II, p. 251). — « Les pythagoriciens regardaient l'unité comme la mère du monde, des Dieux et des Hommes » (IBID. p. 255).

(***) C'était une idée généralement arrêtée parmi les kabbalistes, de donner à la femme le pas sur l'homme. Le célèbre *Nettesheyme*, plus connu sous le nom de *Cornelius Agrippa*, a fait un livre pour soutenir cette thèse de la prééminence du sexe.

(****) Dans une autre acception, le même mot ὁρμή, synonyme de πνεῦμα, signifie *souffle*, *inspiration divine* (ὁρμὴ δαιμόνιος, *Plut.*); c'est le רוח de la *Genèse*, l'esprit de Dieu qui plane au-dessus des eaux ; pour les chrétiens orthodoxes, c'est le *Saint-Esprit*, troisième personne de la *Trinité* divine, dont la *triade*

Passons au nombre *six*, appelé *caltis* dans le manuscrit de Chartres, et *chalcus* dans celui de Londres. Pour le nom de celui-là, ce n'est pas sans peine, je l'avoue, que j'en ai trouvé la signification probable, aucun mot grec qui s'en rapproche n'étant employé chez les auteurs compulsés par *Meursius*. J'y suis cependant parvenu, quoique indirectement; et l'on verra tout-à-l'heure comment j'ai été en quelque sorte dédommagé du détour qu'il m'a fallu prendre pour cela. Sans compter plusieurs autres genres de perfection, les anciens considéraient particulièrement comme *parfait*, τέλειος (et en cela ils ont été suivis par les modernes), tout *nombre égal à la somme de ses diviseurs* (Euclide, liv. VII, déf. 22). — Or le nombre *six* est le premier ou le plus petit de ceux qui présentent cette particularité : ses diviseurs exacts sont 1, 2, 3, dont la somme fait bien 6. J'ai pensé en conséquence que le mot χαλκοῦς, désignant chez les Grecs une *unité de poids*, pouvait avoir été, pour cette raison, adopté comme emblême de la *perfection* attribuée au nombre *six*, conformément à ces paroles du sage : — *Omnia in mensurâ et numero et pondere perfecisti* (Sap. XI, 21). — Or, ma conjecture s'est trouvée pleinement confirmée par le rapprochement de deux passages empruntés, l'un à *Cassiodore*, l'autre à *Pollux*. — *Le sénaire ou nombre* SIX, dit le premier (Var., lib. I, ep. 10), *que la docte antiquité a, non sans raison, déclaré nombre parfait, a été appelé* ONCE, uncia, *parce que l'once est le premier degré de la mesure*. — Maintenant : — *Le mot* ONCE, οὐγγία, dit Pollux (Lib. IX, cap. 6), *est un mot sicule qui a pour équivalent* (*) *dans la langue grecque, le mot* CHALCUS, χαλκοῦς. — L'interprétation de ce dernier et son application au nombre *six* paraissent donc

---

de nos trois premiers nombres paraîtrait une imitation, si bien plutôt elle ne se rapprochait de la *Trimourti* indienne. (*Voir* la *Symbolique de* CREUTZER, traduite en français par M. GUIGNIAUT).

Remarquons d'ailleurs que chez les *gnostiques*, l'Esprit-saint est considéré comme ayant le sexe féminin. (*Voyez l'Histoire critique du Gnosticisme*, de M. MATTER, tome I, p. 203 et 309, et tome II, p. 137.)

(*) On ne doit cependant pas prendre cette équivalence en toute rigueur : les deux poids n'étaient certainement pas identiques; mais il suffit ici que l'*once* et le *calque* fussent pris pour *unité*, chacun dans le système pondéral auquel il appartenait.

complétement justifiées (*). Nous aurons cependant à y revenir dans un instant, pour considérer cette représentation symbolique sous un autre point de vue. Mais auparavant, donnons l'explication du dernier nom qui nous reste à interpréter.

Ce nom, affecté au nombre *neuf*, est celui de *celentis*. Or, qui se refuserait à en reconnaître l'origine dans la dénomination pythagoricienne αἰθήλυντος, *viril* (ou plutôt αἰθ λυ. τος, *virilité*), que les anciens appliquaient au *quaternaire*, et qui se trouve transportée par les néopythagoriciens, au nombre *neuf* envers lequel il exprime également le témoignage d'une profonde vénération. A la vérité, il paraîtrait plus naturel de traduire *celentis* par θήλυντος, *efféminé*, que par son privatif; mais outre que cette dernière dénomination ne se trouve pas non plus dans *Meursius*, une puissante raison que l'on comprendra dans un instant, milite pour ἀθήλυντος. On verra en même temps que cette expression, comme les précédentes, avant d'être introduite dans la langue latine avait dû préalablement passer par l'hébreu, de manière à recevoir ainsi les empreintes successives de trois alphabets tous différents. Or, dans la langue hébraïque, outre que l'on tient peu de compte des voyelles, les radicaux admettent très rarement plus de trois syllabes; et comme l'importance de l'ἄλφα devenait ici tout-à-fait méconnaissable pour ceux qui n'étaient pas initiés au sens primitif du mot, on conçoit que pour abréger, et même sans intention formelle, l'habitude ait été prise insensiblement de le supprimer dans la prononciation, de la même manière que de ἀποθήκη nous avons fait *boutique* (**).

Quant au *zéro*, si j'ai cru n'en devoir rien dire jusqu'ici, c'est qu'il paraît n'avoir été mis que postérieurement au nombre des apices, bien qu'on le trouve employé par *Ptolémée*, tant dans son *Almageste*, que dans ses *Harmoniques*; au reste, j'y reviendrai plus loin. Mais passons auparavant à une autre considération.

En examinant la forme du *six* ou *chalcus* (*voir* le *Tableau*, p. 262), forme que les ornementistes nomment une *grecque*, je crus y reconnaître une sorte d'analogie avec ces poids emboîtés les uns dans les

(*) Quant à *calis*, ce serait tout simplement une mauvaise leçon.

(**) On pourrait citer une foule d'exemples de suppressions pareilles. Je me bornerai à rappeler que les Grecs avaient transformé *Aménophis* en *Memnon*, fils de l'Aurore. (*Voir*, à ce sujet, la savante et ingénieuse dissertation de M. Letronne;

autres dont nous nous servons, et dont les anciens pourraient bien avoir aussi connu l'usage. L'idée était peut être fausse, ou du moins je n'ai présentement aucune autorité à citer à l'appui. Quoi qu'il en soit, vraie ou non, cette idée ne m'en conduisit pas moins à examiner si les autres apices ne seraient pas aussi des emblêmes.

En effet, en jetant les yeux sur le même *tableau* (page 262), on aperçoit immédiatement que le 3 est bien la réunion du 1 et du 2, propriété qu'il conserve même sous sa forme actuelle. Quant à ceux-ci, considérés en eux-mêmes, de même qu'au 9, je crois pouvoir m'abstenir d'énoncer aucune opinion formelle à leur égard. Le lecteur n'a qu'à comparer les noms aux figures; et il appréciera l'intention, si elle existe, ce qui ne me paraît pas douteux de la part de gens dont les symboles et les emblèmes formaient le langage habituel et en quelque sorte fondamental (*). Les personnes qui ont étudié les religions anti-

(*) « Toute l'arithmétique des pythagoriciens avait été transformée en un sys-
» tème de signes hiéroglyphiques par lequel ils prétendaient avoir représenté
» l'essence des choses. » (*Meiners*, t. 1, p. 209.)

Les apices 4, 5, 7, et 8, sont donc aussi, je n'en doute pas, des représentations symboliques. Quoiqu'il me fût facile de proposer sur leur signification quelques conjectures plus ou moins plausibles, je préfère m'en abstenir, parce que les dénominations pythagoriciennes correspondantes pourraient seules, si on les connaissait avec certitude, donner quelque poids réel à ces conjectures.

Je me hasarderai pourtant à en présenter une sur le *quatre*, dont la forme actuellement usitée, et très commune d'ailleurs sur les monuments gnostiques, est évidemment une abréviation de celle de la 3e colonne du tableau de la page 262. Cette dernière forme et celle de la 2e colonne dénotent assez clairement l'intention de figurer une *clé*, symbole qui s'adapte parfaitement à la première dénomination (κλειδοῦχος τῆς φυσεως) rapportée (page 264) d'après *Photius*, pour le *quaternaire*. D'un autre côté, des circonstances analogues se rencontrent dans la fameuse *croix à anse* dont les divinités égyptiennes sont ordinairement armées. Cette croix, regardée, suivant l'opinion la plus probable, comme la *clé de la vie divine*, prend aussi parfois la forme d'un 4 (*voir*, dans l'*Histoire des Gnostiques de* M. Matter, la planche 1re, F, fig. 3). Il est donc permis de conjecturer que notre *chiffre* 4, représentant le *quaternaire*, était originairement le *Symbole de l'initiation aux mystères de la Nature*, et qu'il correspondait à la *croix ansée* de la Cosmologie égyptienne.

Cette interprétation nous expliquerait même pourquoi la nomenclature se trouve mi-partie de grec et d'hébreu, en nous donnant à penser que les dénominations pythagoriciennes, adoptées en principe comme éléments fondamentaux de cette nomenclature, auraient été remplacées par des noms hébreux lorsqu'elles n'étaient pas *univoques*.

ques, et qui aiment à suivre la marche de l'esprit humain à travers les siècles, trouveront ici ample matière à réflexions. Pour moi, je me bornerai à déduire un simple corollaire de la détermination de mes cinq inconnues, auxquelles je me hâte de revenir pour rentrer dans la spécialité de ce Journal.

Nous voyons, en résumant tout ce qui précède, que la nomenclature de *Boèce* se compose de deux sortes de mots : les uns, d'origine *hébraïque*, se traduisant *littéralement* par les noms des nombres qu'ils représentent, et assez exactement caractérisés malgré leur passage dans la langue latine, pour qu'on les y ait reconnus sans une grande difficulté ; les autres, d'origine *grecque*, n'exprimant plus les nombres eux-mêmes, mais représentant des idées *symboliques*, et d'ailleurs tellement corrompus et défigurés qu'ils en sont devenus à peu près méconnaissables. Je crois pouvoir conclure avec vraisemblance, de la considération des premiers, que les auteurs de la *nomenclature* de *Boèce* parlaient la langue hébraïque, et de celle des seconds, qu'ils professaient une doctrine occulte. *C'est donc* très probablement *de quelque secte philosophique juive, kabbale, gnose* (*), *ou autre, que nous tenons nos chiffres.*

Cette conclusion entièrement inattendue sur la source où nous avons puisé l'un des éléments de notre numération, se trouve d'ailleurs puissamment confirmée par une circonstance que j'ai notée plus haut, savoir : l'emploi de deux idiomes différents, l'hébreu et le chaldéen, pour exprimer un même nombre. Cette double forme ne saurait s'expliquer naturellement dans aucune autre hypothèse ; et elle donne, si je ne m'abuse, à l'opinion que je viens d'émettre, le plus haut

---

(*) A considérer ce mélange d'hébreu et de grec, cet amalgame de Pythagorisme, de Kabbale, de toutes les doctrines religieuses et philosophiques, puis joignant à tout cela les diverses circonstances déjà signalées, on ne peut se défendre de soupçonner plus spécialement quelque secte de gnostiques juifs. (*Voir* à ce sujet, l'*Histoire des Gnostiques de* M. MATTER.)

Il n'est peut-être pas inutile de remarquer ici que dans les manuscrits où les chiffres sont disposés horizontalement, ils le sont généralement de droite à gauche ; et par suite, quand ils sont disposés verticalement, les copistes latins, en les transcrivant, ont commencé par le 9 qu'ils ont placé en haut, descendant ensuite depuis le 9 jusqu'à l'*unité*. (*Voir*, par exemple, le *manuscrit d'Arundel*)

degré de probabilité. L'hypothèse ne perdrait même pas de sa vraisemblance quand on prétendrait, ce qui est bien loin d'être inadmissible, que les chiffres observés dans les manuscrits de *Boèce* ne s'y trouvent que par le fait des copistes qui les y auraient introduits postérieurement; et M. Libri, dans l'ouvrage déjà cité, fait observer en effet que ces manuscrits semblent tous écrits par des juifs (il est vrai qu'il ajoute : ou par des chrétiens).

Arrêtons-nous ici un instant; et signalons, avant de poursuivre, les conséquences importantes qui nous paraissent découler du résultat auquel nous venons de parvenir. Nous observerons d'abord que ce résultat rend complétement raison du fait remarquable signalé par M. Chasles, mentionné également dans la *Biographie universelle* de M. *Michaud* (*tome* 44, au mot *Sylvestre*), et qui consiste en ce que le système de numération de *Boèce*, oublié après lui, avait été postérieurement retrouvé par *Gerbert*. Ce dernier avait voyagé en Espagne à une époque où les rabbins y tenaient, entre autres, la célèbre école de *Tolède*, d'où sortirent, deux ou trois siècles plus tard, ces fameuses *Tables alphonsines* dont le juif *Aben-Saïd* fut le principal auteur. *Gerbert*, avide de toutes les sciences, ne pouvait manquer de se mettre en contact avec eux; et c'est sans doute à l'étude de la philosophie occulte qu'il aura dû l'accusation portée contre lui d'avoir commerce avec le diable (*).

Ce même résultat, considéré sous un point de vue plus général, en même temps qu'il prouve l'existence permanente des sectes occultes au milieu des sociétés du moyen âge, nous amène à constater un fait qui n'est pas sans quelque importance, celui de l'influence de l'élément juif sur l'état de nos sciences et de notre civilisation, influence presque entièrement méconnue jusqu'ici. Car, pour ne citer de cet oubli que le seul exemple relatif à notre sujet, nous ne savons si, parmi les noms des peuples chez lesquels on a cherché l'origine de nos chiffres, peuples arabes, grecs, indiens, ou autres, le nom du peuple juif a été mis en avant une seule fois.

(*) D'après *Guillaume de Malmesbury*, « *Gerbert* avait appris la magie dans un » livre qu'il avait autrefois dérobé à *Séville* en Espagne; et il avait fait hommage » au diable ».

Toutefois, quand je dis le peuple juif, c'est plutôt de la philosophie juive qu'il faudrait parler. Ce n'est donc pas sans une grande raison que M. Libri, dans son *Histoire des Mathématiques*, recommande l'étude des sciences occultes(*). Tout le monde sait en effet que c'est à l'Astrologie judiciaire que nous sommes redevables de l'Astronomie, comme de la Chimie aux hermétiques et aux chercheurs d'or. C'est encore des magiciens que nous tenons nos premières notions de Physique et d'Histoire naturelle. La Chiromancie et la Physiognomonie nous ont conduit par degrés jusqu'à la Cranioscopie, qui n'est jusqu'à présent, il est vrai, qu'un pas plus rationnel pour arriver, s'il est possible, à l'art de la divination appliqué aux penchants moraux.

La kabbale a aussi fourni son tribut, qui en somme, sans être bien regrettable, n'est peut-être pas entièrement dépourvu d'utilité. Car, sans parler des *anagrammes, acrostiches,* et autres jeux de lettres et de chiffres, choses futiles pour nous, pour des hommes libres qui peuvent parler sans figures, mais que la servitude et l'oppression rendaient précieuses et saintes à ceux qui, comme le peuple juif, étaient réduits à cacher leurs pensées, leurs sentiments, ou à ne pouvoir les exprimer qu'à la faveur du mystère ; sans parler, dis-je, de ces moyens de communication plus ou moins ingénieux, nous devons aux kabbalistes les artifices mnémoniques (**) qu'ils avaient portés à un haut degré de perfection, et qui sont peut-être aujourd'hui trop négligés ; nous leur devons enfin les premiers essais d'une théorie bien importante, la théorie des combinaisons.

(*) On ne veut pas dire par là, bien entendu, que les sciences occultes doivent faire partie de l'éducation, mais seulement qu'il serait à desirer de voir un travail approfondi fait sur cette matière par des hommes compétents.

D'ailleurs, que les sciences occultes ne puissent être bien utiles *par elles-mêmes*, il n'en résulte pas qu'elles ne puissent fournir des lumières precieuses *pour l'histoire* de l'esprit humain.

De même, que les juifs n'aient rien invente d'essentiel et n'aient eu que copistes, leurs travaux n'en seraient pas moins importants comme documents historiques.

(**) De ce nombre sont les *chronogrammes* : on nomme ainsi des mots ou des phrases dont les lettres numérales servent à fixer une date ou en général un nombre quelconque. Tels sont, par exemple, les mots ΑΒΡΑΞΑΣ, ΜΕΙΘΡΑΣ, dont les lettres considérées comme notes numérales, forment une somme égale à 365 nombre des jours de l'année.

Au surplus, une considération plus générale domine tout cela. Ne dût-on trouver dans les sciences occultes que de monstrueuses absurdités, elles seraient encore utiles à étudier, comme il est bon de connaître les écueils pour pouvoir s'en garantir. La science des erreurs de l'esprit humain ne forme-t-elle pas d'ailleurs les trois quarts de son histoire ?

Mais nous n'accordons pas qu'il n'y ait sur cette route, que des erreurs à rencontrer. Les kabbalistes, astrologues, magiciens, alchimistes, n'étaient-ils pas véritablement les hommes éclairés de leur temps ? A moins donc de supposer qu'aux époques de barbarie, l'esprit humain ait été tout entier plongé dans une léthargie pareille à la mort, il sera difficile d'admettre qu'au milieu du travail de ces hommes en qui se résumait et se concentrait à la faveur d'une ombre protectrice, toute l'activité de la pensée humaine, pas une seule étincelle du feu sacré n'ait pu jaillir du sein des ténèbres.

Quant aux kabbalistes en particulier, il nous est facile de voir maintenant comment on a pu rester à leur égard dans une si longue erreur. Si l'étude de la kabbale n'était point aujourd'hui tombée dans un discrédit tel, qu'il faut une sorte de courage même pour en prononcer le nom, les nombreux points de contact qui existent entre cette doctrine et la philosophie de *Pythagore*, principalement quant aux propriétés occultes des nombres, n'auraient pas été si long-temps méconnus, ou plutôt si long-temps oubliés : car la remarque en est tellement ancienne, dit le savant M. Lobeck dans son *Aglaophamus* (page 5), qu'elle peut aujourd'hui passer pour une nouveauté. Si en effet, sans même entrer dans le fond des principes, nous nous en tenons au mode de transmission caractéristique des deux sectes, la *transmission orale* (*) (car tel paraît être le sens précis du mot קבל , *kabbale*); si nous nous arrêtons, dis-je, à cette circonstance commune de l'existence d'une *doctrine ésotérique* ou occulte, complémentaire de la doctrine *exotérique* ou patente, nous serons certes entièrement dans la limite des faits, et tout au plus donnerons-nous un énoncé nou-

(*) Plus littéralement *réception* ou *acceptation*. — Ainsi, le mot *kabbale* peut être considéré comme logiquement applicable à toute doctrine occulte.

veau à une proposition non contestée, en considérant l'école primitive de *Pythagore* comme une véritable *kabbale grecque*. Aussi voyons-nous, à l'époque de la décadence de la kabbale proprement dite, c'est-à-dire à l'époque où les kabbalistes ont commencé à écrire (car pour eux comme pour les pythagoriciens, et pour les adeptes de toutes les sociétés secrètes, écrire, particulièrement sur les points fondamentaux de la doctrine, était un acte d'apostasie), aussi, dis-je, voyons-nous, à cette époque où le pythagorisme venait peut-être de se greffer sur la kabbale comme sur un arbre de même famille (*), tous les fauteurs des sciences occultes se parer avec orgueil du titre de pythagoriciens qu'aucune école plus digne ne pouvait plus leur disputer (**).

Ne soyons donc pas surpris de voir *Reuchlin* (*De arte cabbalisticâ*, liv. III) terminer assez plaisamment une discussion sur le pythagorisme et la kabbale, par ces paroles que rend plus piquantes encore le nom du personnage dans la bouche duquel il les place : — *Jam clarè video*, dit un des interlocuteurs appelé *Philolaüs* (***), *Cabbalistarum et Pythagoristarum inter se cuncta ejusdem esse farinæ ;* — c'est-à-dire à peu près, pour parler français, que — *Les pythagoriciens et les kabbalistes sont tous gens de même farine.*

Pour en revenir à *Boèce*, dont nous nous sommes peut-être trop écartés, nous savons maintenant à quoi nous en tenir sur ses pythagoriciens. Malgré la sagacité qu'il leur accorde et leur habileté aux calculs, nous venons de reconnaître que loin d'être de *grands grecs*, ils n'auraient pas même obtenu chez les Romains le titre de *græculi*.

(*) Je suis heureux de trouver ici à mon aide une autorité aussi imposante que celle de M. Matter (*Histoire critique du Gnosticisme*, tome I, p. 176) : — « Les anciennes doctrines mystérieuses de la Grèce, dit-il,... se sont rencon- » trées de nouveau avec les spéculations orientales dont elles s'étaient détachées » originairement. »

(**) Consultez encore l'*Histoire des sciences en Grèce*, par *Meiners* : l'existence des différentes sectes de *pythagoriciens, néopythagoriciens, pseudopythagoriciens*, s'y trouve pleinement constatée.

En tout état de cause, la kabbale nous paraît être le commentaire obligé des doctrines pythagoriciennes, platoniciennes, et philoniennes.

(***) Ce nom appartient, comme on le sait, au disciple le plus célèbre de *Pythagore*, à celui qui fut son successeur et précéda *Platon*.

Cherchons donc en conséquence à pénétrer plus avant, et examinons si la kabbale ne pourra pas nous fournir, sur la question de l'*abacus* ou ἄβαξ, quelques lumières nouvelles.

Or, les kabbalistes se servent en effet d'un tableau qu'ils nomment *atbasch*, אתבש, tableau disposé par lignes horizontales et verticales, comme ce que nous appelons *Table de Pythagore*, et dont chaque case contient une combinaison de deux lettres de l'alphabet hébreu : de sorte que, sur une même ligne, on a 11 combinaisons comprenant les 22 lettres de cet alphabet, et sur chaque ligne un système différent de 11 pareilles combinaisons : — *Aleph cum omnibus et omnia cum aleph, et sic de singulis. Ita rotando singulas per omnes, resultant januæ* 231 (*Sepher jetzirah*). — Chacune de ces lignes servait ainsi à une écriture occulte ou kabbalistique dans laquelle les deux lettres de chaque case se substituaient mutuellement l'une à l'autre. Ordinairement les lettres placées à droite, d'une part, et les lettres placées à gauche, d'autre part, dans les diverses cases d'une même ligne, ou dans chacun des divers alphabets, formaient deux séries successives dans le même sens ou en sens contraire, de l'une de ces deux manières :

AL	BM	CN	DO	EP	FQ	etc.

ou

AL	BK	CJ	DI	EH	FG	etc.

Dans le premier cas, l'alphabet était *direct;* et dans le second, il était *rétrograde*. La première case suffisait pour déterminer toute la série quand on savait si l'alphabet était direct ou rétrograde; mais quand on ignorait lequel des deux systèmes avait été suivi, il devenait nécessaire, pour la lecture, d'employer deux cases, lesquelles servaient alors de *clé* et donnaient leur nom à tout l'alphabet. Ainsi, les deux alphabets précédents seraient l'alphabet *albam* et l'alphabet *albak*, en intercalant la voyelle *a* pour la prononciation, comme on le fait en hébreu. Le dernier alphabet du tableau, ou l'alphabet *atbasch*, אתבש, ayant pour clé les deux premières lettres de l'alphabet naturel, *aleph* (א), *beth* (ב), et les deux dernières, *schin* (ש), *tau* (ת), a donné son nom au tableau entier.

Si j'ai cru devoir entrer dans ces détails, c'était d'une part, pour

faire comprendre l'analogie évidente qui existe entre l'*abacus* ou ἄβαξ des pythagoriciens et l'*atbasch* des kabbalistes, et en second lieu, pour détruire d'avance l'idée que l'on pourrait avoir de faire venir *atbasch* de ἄβαξ plutôt que celui-ci du précédent. Le mot *atbasch* se trouvant formé de toutes pièces, il est évident qu'il ne faut point lui chercher d'autre étymologie que lui-même :

..... *prolem sine matre creatam ;*

tandis qu'au contraire il a pu très bien donner lieu au mot ἄβαξ auquel on ne connaît pas d'origine raisonnable (*) : car comment pourrait-on dire avec l'*Etymologicum magnum* qu'ἄβαξ est *ce qui n'a pas de base.* Cette définition s'appliquerait certes beaucoup mieux à l'étymologie elle-même.

Quoique j'aie comparé l'*atbasch* des kabbalistes à la *Table* dite *de Pythagore*, ce n'est pourtant pas à dire que cette dernière soit le véritable *abacus ;* je pense même le contraire ; et la manière dont *Boèce* expose le procédé de la multiplication (à la *fin du* 1er *livre* de sa *Géométrie*) ne me paraît pas laisser d'équivoque à cet égard. Si les mots *descripserant sibi quandam formulam* sont un peu obscurs,

---

(*) Depuis que ceci est écrit, MM. Chasles et Terquem m'ont fait connaître une autre étymologie du mot ἄβαξ, proposée par *Etienne* Guichart dans son *Harmonie des Langues,* et d'après laquelle ce mot grec et le mot latin *abacus* viendraient de l'hébreu *abaq*, אבק, *poussière.* Cette étymologie me paraît en effet fort plausible, et du reste tellement simple, qu'il est étonnant que l'on ne s'y soit pas arrêté ; et moi-même j'hésite pour ne pas la préférer à celle que j'ai indiquée. Il est raisonnable d'admettre en effet que dès une très haute antiquité, on aurait pu donner ce nom *abaq,* à un tableau sur lequel on comptait après l'avoir préalablement couvert de poussière ; et l'invention de ce tableau serait d'autant plus vraisemblablement attribuée aux Phéniciens, grands calculateurs sans doute puisqu'ils étaient adonnés au négoce, que l'on fait honneur aux marchands de cette nation, des premières leçons d'arithmétique qu'aurait reçues *Pythagore.* Dans tous les cas, et quelle que soit celle des deux opinions que l'on adopte, il en résultera toujours, et c'est la conséquence principale à laquelle il nous est important d'arriver, que l'*abacus* est d'origine essentiellement *sémitique.* C'est même ainsi que *Clavius* (*Epitom. Arithm. pract.*) explique la disposition que nous donnons à nos chiffres en leur faisant suivre, dans l'écriture des nombres, une progression ascendante *de droite à gauche.*

l'explication de la manière de se servir du tableau me semble assez claire. En multipliant chaque chiffre de multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur, on a un produit de deux chiffres dont celui de droite (dans notre manière d'écrire) représente les *digits*, et celui de gauche les *articles*. *Boèce* explique très bien dans quelle colonne (*paginula*) du tableau, il faut les placer l'un et l'autre suivant l'ordre ou le degré de puissance des deux facteurs; et cela ne peut s'entendre que d'un *tableau préparé à l'avance* pour y inscrire les divers produits élémentaires à mesure qu'on les obtient.

Il est très probable que dans l'origine, on aura dû écrire dans une même case les deux chiffres de chaque produit, sauf à réduire ultérieurement les *articles* de chaque case avec les *digits* de la colonne suivante, à peu près comme le font les calculateurs persans (*Voyages de Chardin*), ou bien encore comme on le pratique dans la multiplication par le moyen des *bâtons de Néper*. Alors, avant la réduction, chacune des cases contenant deux chiffres, le tableau présente absolument l'apparence de l'*atbasch*. Toutefois, la méthode expliquée par *Boèce* est déjà plus avancée en progrès, car il pose sur-le-champ les deux chiffres dans des colonnes différentes.

Quoi qu'il en soit, il y avait vraisemblablement aussi plusieurs procédés pour écrire sur l'*abacus*. Dans le principe, on le couvrait d'une poussière sur laquelle on traçait les chiffres : mais les pythagoriciens de *Boèce*, gens ingénieux et subtils, *ingeniosissimi et subtilissimi*, s'étaient fait, dit-il, des caractères qu'ils nommaient *apices*, et dont ils se servaient à la place de poussière : *hos etenim apices ità variè ceu pulverem dispergere consueverant*. Ces caractères devaient donc être mobiles : ils étaient sans doute tracés sur des espèces de *dés* ou de *fiches;* et les formes ainsi que les noms étaient du reste demeurés entièrement arbitraires, puisque l'on y employait quelquefois, même les lettres de l'alphabet.

Telle est, d'après l'analogie que présentent l'*atbasch* des kabbalistes et l'*abacus* des pythagoriciens, l'origine qui m'a paru la plus probable pour le nom de ce dernier tableau.

Je ne puis terminer sans parler de l'emploi du *zéro* auquel j'ai promis de revenir.

La numération décimale, considérée quant à la classification des

divers ordres d'unités suivant la progression décuple (ce qui n'implique nullement l'emploi des chiffres proprement dits, et surtout la faculté attribuée à ces chiffres d'acquérir des valeurs de position), la numération décimale, dis-je, était certainement connue des Grecs aussi bien que des Hébreux, auxquels même les premiers l'ont évidemment empruntée (*). Il me serait facile de démontrer cette connaissance, si je voulais m'arrêter, soit à exposer la nomenclature des deux peuples et à comparer leurs lettres numérales, soit à rapporter les nombreux témoignages des auteurs qui en font foi. Parmi ces témoignages, je me bornerai à citer celui de *Plutarque* (*De placitis philosoph.*, liv. I, chap. 3): — *Pythagore*, dit-il, *appelle la dixaine, l'essence des nombres, parce que tous les peuples, grecs ou barbares, comptent jusqu'à dix, et que parvenus là, ils reviennent à l'unité.* — Aussi, les anciens regardaient-ils le nombre *dix* comme un nombre *parfait par excellence* (cette perfection étant, bien entendu, d'une autre nature que celle du nombre *six*); et ils appelaient aussi la *dixaine*, par cette raison, *créatrice de la perfection.* Mais quant au *zéro*, ce chiffre manquant dans la plupart des manuscrits de *Boèce*, on doit en conclure que son usage n'était pas encore fixement établi au cinquième siècle. Il est clair en effet qu'à la rigueur on pouvait s'en passer dans le calcul au moyen de l'*abacus;* et on le pouvait même encore dans la représentation du résultat de ce calcul, soit que l'on se contentât d'énoncer le nombre en langage vulgaire, soit qu'on voulût le transporter dans le corps d'écriture en l'y écrivant au moyen des lettres de l'alphabet employées comme notes numérales. Mais les neuf *apices* étant une fois inventés, on n'aura pas tardé à reconnaître l'avantage de les introduire dans l'écriture courante; d'où la nécessité de représenter les colonnes vides de l'*abacus* par quelque nouveau signe de convention.

Celui qui se présentait le plus naturellement était un simple point, comme nous le voyons employé dans *Alséphadi;* mais à la place de ce point, on aura bientôt senti la nécessité d'adopter un signe plus

(*) On reconnaîtra immédiatement cet emprunt si l'on considère que certaines lettres de l'alphabet des Hébreux, comme le *vau* qui valait *six*, manquant dans l'alphabet des Grecs, ceux-ci avaient adopté, pour remplir la même fonction numérale, des caractères supplémentaires qu'ils nommaient ἐπίσημα (d'où viendrait peut-être *apices*, si toutefois ce mot n'a pas la même origine qu'ἀπάξ); ainsi, le *vau* était remplacé par l'ἐπίσημον Ϝαῦ.

saillant; et le cercle vide se sera alors présenté assez naturellement : — *Quod (punctum) ut magis appareret,* dit HUET, *insigniusque fieret et crassius, circumducto in circulum calamo spatium inane properantiâ primùm deindè consuetudine relictum est.* — Quant à la manière de désigner ce cercle, les uns l'ont nommé *sipos* (ou peut être *siphos*), de סף, *vase* (*Zachar.* XII, 2), [d'où viennent aussi sans doute *sephinah*, ספינה, *vaisseau* (*lexic. rabb.* de *Buxtorff*), σίφος, *vide*, et σίφων, tube]; les autres l'ont appelé *tsiphra*, de צפר, *couronne* ou *diadême* (*Isaïe*, XXVIII, 5); et ce dernier nom, qui a survécu à l'autre, a fini lui-même, en devenant postérieurement applicable à un autre usage, par céder la place à une troisième dénomination, *zéro*, à peu près synonyme de la précédente : car *zéro* paraît n'être autre chose que le mot זר, *zer*, signifiant *cercle, auréole*, ou *couronne* (*Exode*, XXX, 4), auquel on aurait donné une terminaison italienne ou espagnole (*).

C'est ici, on doit le remarquer, que se montre l'influence juive dans toute sa force : au système de l'*abaq* (mot hébreu) succède d'abord le système de la *tsiphra* (autre mot hébreu); puis ce mot, perdant sa signification individuelle et propre à un seul des apices, pour acquérir un sens générique, devient applicable à la représentation de toutes les notes numérales devenues des *chiffres;* alors, obligé de lui trouver un remplaçant dans sa fonction spéciale, c'est encore un mot hébreu que l'on choisit pour cela.

Quelques auteurs préféreraient, je le sais, faire venir le mot *chiffre* de ספר, *compter* (**) (Voir *Montucla*, *Histoire des Mathématiques*,

---

(*) Le 8 juin dernier, M. le docteur ROULIN a communiqué à la société Philomatique, une observation qu'il a faite à l'église de *St-André de Pistoïa*, en Toscane, d'une date ainsi écrite : A D M C IX VI, ce qui paraît devoir se traduire par *Anno Domini* 1196. Le nombre IX acquiert ici, comme on le voit, une véritable valeur de position.

Au reste, un nouveau travail que prépare M. CHASLES nous apprendra bientôt sans doute, par où et à quelle époque le système de l'*Abacus* s'est introduit en Europe.

(**) Le mot ספירות, *sephirot*, *numération*, pris dans une autre acception, signifie *souffle*, *esprit*, *intelligence hypostasiée*, *ange* (on voit l'analogie de ce mot avec le ζέφυρος des Grecs et le *spiritus* des Latins). Or, il est à noter que même dans cette seconde acception, les Hébreux comptaient *dix séphirots*, *pas un de plus*, *pas un de moins*, *ni neuf*, *ni onze*, *mais bien dix* : c'est ainsi que s'ex-

tome I, p. 376); et cette opinion n'est pas non plus entièrement dépourvue de vraisemblance; mais c'est toujours de l'hébreu.

Quoi qu'il en soit, on voit combien il reste d'obscurité dans toutes ces questions d'origine. La raison en est simple : les sciences ne se sont perpétuées, à toutes les époques des ténèbres qui ont régné sur l'esprit humain, qu'à l'état occulte. Ce ne serait donc qu'en cherchant à pénétrer les systèmes des doctrines *ésotériques* de toutes les sectes secrètes, kabbalistiques, pythagoriciennes, gnostiques, et autres, que l'on pourrait espérer de renouer cette chaîne des connaissances philosophiques dont la plupart des anneaux nous échappent, soit par le fait de leur nature presque insaisissable, soit par suite du dédain qu'il est si commode de déverser sur les choses obscures pour être ainsi dispensé de chercher à les éclaircir (*). C'est au siècle des lu-

---

prime le *Sepher jetzirah*, ou le *Livre de la Création*, l'un des livres fondamentaux de la kabbale.

En second lieu, il est bon d'observer encore que le premier *séphirot* porte un nom (כתר) qui signifie *couronne*, ce qui pourrait bien n'être pas sans analogie avec l'étymologie que nous avons attribuée au mot *zéro*. (*Cl. Duret, Trésor des Langues*, p. 180).

[A l'égard du mot *chiffre* employé dans le sens d'*écriture occulte*, de *groupe de lettres*, de *monogramme*, il a sans doute une autre étymologie, et peut-être faudrait-il le faire dériver de *ziruph*, צירוף : [les *ziruphs* sont les combinaisons qui composent le tableau *atbasch* dont nous avons parlé précédemment.]

D'ailleurs, on sera moins étonné qu'il puisse y avoir dans les séphirots une allusion à la numération, si l'on considère que l'emploi des dénominations et des classifications figurées, très fréquent chez les orientaux qui personnifient et déifient tout, les attributs de Dieu, les penchants de l'homme, les nombres, toutes les abstractions, tient à cette sorte de mnémonique kabbalistique dont j'ai parlé précédemment. C'est ainsi que, dans les 365 intelligences émanées les unes des autres par séries de 7, qui, chez les *Basilidiens* (voir l'*Histoire des Gnostiques*, tome II, p. 60), forment 52 mondes ou οὐρανοί, plus *l'Être-suprême* qui se trouve comme huitième membre à la tête de la première *heptade*, on ne peut méconnaître une allusion à la double division de l'année en jours et en semaines. C'est encore ainsi que chez les Persans, suivant Chardin : — *La musique est une ville qui a quarante-deux quartiers, chacun de trente-deux rues*, etc.

(*) L'Académie des *Inscriptions et Belles-Lettres* a fait un pas important dans

mières néanmoins, nous le croyons, qu'il appartient de porter le jour au milieu de ces épaisses ténèbres ; or il est grand temps de se mettre à l'œuvre, car les monuments s'en vont, et les nuages du passé s'amoncèlent de plus en plus (*).

Au reste, ce n'est sans doute pas de nous que l'on attend la solution de ces questions difficiles : une connaissance approfondie des langues orientales serait ici de toute nécessité ; et ce moyen d'investigation nous manque. Seulement, ayant cru entrevoir un rayon de lumière, nous avons regardé comme un devoir de le signaler, laissant à de plus habiles le soin de le recueillir et de lui communiquer la puissance fécondante.

---

cette direction, en mettant au concours, il y a quelques années, *l'histoire du Gnosticisme.*

(*) On ne m'attribuera sans doute pas l'idée de méconnaître les brillantes découvertes qui ont été faites dans tous les genres depuis un demi-siècle : on doit bien voir qu'il ne s'agit encore que des sciences occultes. Au surplus, j'aurai dans quelque temps l'occasion de développer ma pensée à cet égard.

Je crois devoir signaler ici un ouvrage intitulé : *Histoire générale et particulière des religions et des cultes de tous les peuples du Monde, tant anciens que modernes, par F.-L.-S. Delaulnaye; Paris, J.-B. Fournier le jeune*, 1791. Cet ouvrage, dont il n'a paru que trois livraisons, devait avoir 12 vol. in-4°, et être suivi d'un *Traité des Mystères et Superstitions* en 4 volumes in-4°, d'une *Histoire des Sociétés secrètes*, etc. Le peu qui en a été publié (et qui ne se trouve pas à la Bibliothèque Royale) suffit pour donner une idée des immenses recherches faites par l'auteur sur les divers sujets qu'il avait entrepris de traiter. On ne saurait assez, sous ce rapport, déplorer la perte de ce travail si elle est irréparable. (Le lecteur voudra bien remarquer que je parle des documents recueillis par l'auteur, et non de ses opinions.)

Recherches géométriques sur les Engrenages de WITH;

PAR M. THÉODORE OLIVIER.

(Mémoire présenté à l'Institut, le 5 décembre 1825)

Le mécanicien With, lors du concours pour les prix décennaux, en 1810, soumit à l'examen de l'Institut, des engrenages cylindriques et coniques d'une construction nouvelle, et dit en les présentant qu'ils jouissaient des deux propriétés regardées jusque alors comme incompatibles, savoir : 1° vitesses angulaires dans un rapport constant, et 2° frottement de roulement; et qu'ainsi : 1° le pignon décrivant des arcs égaux faisait parcourir à la roue dentée des espaces angulaires aussi égaux, et 2° les courbes par lesquelles les dents étaient en contact, se roulaient à la manière de deux cercles tracés sur un même plan.

With n'était pas géomètre, aussi ne put-il démontrer rigoureusement l'existence des propriétés qu'il annonçait appartenir à ses engrenages. On voyait bien qu'en effet les vitesses angulaires étaient dans un rapport constant, on sentait bien que le frottement était très doux, mais cependant le frottement pouvait être de glissement. Jusqu'à présent la question est restée indécise.

En examinant les procédés pratiques que With employait pour la construction de ses engrenages, procédés qu'il a décrits dans une petite brochure que je n'ai pu me procurer qu'à la bibliothèque de l'École royale de l'artillerie et du génie à Metz, on voit qu'on peut *traduire géométriquement* les procédés de mécanique pratique, par une construction géométrique qui consiste, 1° à faire passer un plan M (fig. 1, pl. II) par les deux axes parallèles P de la roue dentée et Q du pignon; 2° à tracer dans ce plan une droite R parallèle aux axes, et dont les distances p à P et q à Q seront dans le rapport inverse des vitesses des axes, puis 3° construire deux triangles abc et $a'b'c'$, le premier

coupant la ligne R par son côté ab au point m et le second ayant son sommet a' placé en ce point m; les deux triangles n'ayant d'ailleurs aucun autre point commun; 4° faire mouvoir le triangle abc autour de l'axe P, tous les points du côté ab décrivant des hélices de même pas, que j'appellerai H, nommant S l'hélice décrite par le point m; 5° faire mouvoir le triangle $a'b'c'$ autour de l'axe Q, le point a' décrivant une hélice s dont le pas sera h, et l'on devra avoir l'équation $\frac{H}{h} = \frac{p}{q}$, c'est-à-dire que les pas des hélices S et s seront dans le même rapport que les rayons des deux cylindres sur lesquels elles sont tracées. Ainsi les dents sont formées par des filets de vis, et ne se mettent successivement en contact que par les courbes S et s.

Si les axes P et Q se coupent, la droite R passe alors par leur point d'intersection et elle divise l'angle compris entre P et Q en deux dont les sinus sont dans le rapport inverse des vitesses des axes, et les courbes S et s sont des spirales coniques d'Archimède dont les pas sont aussi dans le rapport direct des rayons des rouets coniques sur lesquelles elles sont tracées.

Les dents ainsi construites se conduisent-elles en effet par un frottement de roulement, et le rapport des vitesses angulaires est-il constant?

Telle est la première question que je me propose de résoudre dans ce Mémoire.

Examinons d'abord les engrenages cylindriques.

Par la droite R (fig. 5), je mène un plan M′ perpendiculaire au plan M qui contient les axes. Je trace sur ce plan M′ une droite g passant par le point m situé sur la droite R. (Au lieu d'une droite, l'on pourrait tracer une courbe arbitraire, mais dans les arts l'on doit préférer la droite parce qu'elle donne sur le cylindre une hélice, courbe que l'on peut tracer facilement par un mouvement continu, ce mouvement continu étant procuré par un mécanisme simple.) Puis j'enroule ce plan M′ sur le cylindre dont R est une génératrice, p le rayon de la base et P l'axe; la droite g se déformera suivant une hélice S dont le pas H sera l'un des côtés de l'angle droit du triangle mxy, construit dans le plan M′; la ligne mx étant horizontale et la droite my étant une partie de la droite g, et mx étant égal au développement de la cir-

conférence du cercle dont p est le rayon, H sera dès-lors égal à xy. Si, ensuite, j'enroule le plan M′ sur le cylindre dont R est une génératrice, q le rayon de la base et Q l'axe, la droite g se déformera suivant une hélice s, dont le pas h sera égal à $x'y'$, le côté mx' étant égal au développement de la circonférence du cercle dont q est le rayon, et l'on aura l'équation $\frac{H}{h} = \frac{p}{q}$. Cela posé : si je fais rouler le cylindre qQ sur le plan tangent M′, la courbe s se développera sur la droite g. De même si je fais rouler le cylindre pP sur le même plan tangent M′, la courbe S se développera sur la même droite g. Ainsi au point m les courbes s et S sont en contact ayant en ce point pour tangente commune la droite g. Si donc le cylindre pP prenant un mouvement de rotation autour de son axe P, entraîne par le frottement de roulement le cylindre pQ, les deux courbes s et S rouleront l'une sur l'autre et auront une tangente commune en chacun de leurs points de contact successif, et le point de contact parcourra la droite R.

Maintenant je trace dans le plan M qui contient les axes P et Q, une droite arbitraire G passant par le point m de contact des deux hélices s et S, puis je décris deux courbes arbitraires φ et φ' ayant pour tangente commune au point m la droite G; l'une de ces courbes φ étant au-dessus, l'autre φ' étant au-dessous de la droite G et toutes deux situées dans le plan M.

Cela posé : j'imprime au plan M un mouvement de rotation autour de l'axe P de manière que la courbe φ se meuve le long de la courbe S; on obtiendra par ce moyen une surface héliçoïde Φ. Si de même je fais mouvoir la courbe φ' le long de la courbe s, je formerai une seconde surface héliçoïde Φ', et ces deux surfaces Φ et Φ' seront en contact au point m, car elles auront en ce point même plan tangent, déterminé par les droites g et G, et ces deux surfaces n'auront évidemment que ce seul point commun. Dans les engrenages de With la courbe φ est une droite, par conséquent la surface Φ est une héliçoïde, telle qu'on l'emploie dans les vis triangulaires ou à filet carré. La courbe φ' se réduit à un point; donc la surface Φ' se réduit à une hélice, de sorte que la dent Φ conduira ou sera conduite par la dent Φ' par un frottement de roulement, les vitesses angulaires étant dans un rapport constant.

Ainsi les engrenages construits par With satisfont aux deux conditions regardées jusqu'à présent comme incompatibles. Mais pour que ces deux conditions soient en effet remplies à la fois, il faut que les engrenages soient exécutés avec une rare précision. Examinons si l'on n'obtiendrait pas dans des engrenages construits d'après le même principe, un frottement de glissement provenant d'une inexactitude dans le rapport des pas H et h, frottement de glissement qu'il serait impossible cependant de reconnaître et de détruire entièrement. Prenons l'engrenage exécuté par With, c'est-à-dire celui où les courbes Φ et Φ' sont des triangles. Chacun des points de la droite ab décrit une hélice dont le pas est H, mais, d'après ce qui précède, l'hélice décrite par le point m est la seule qui puisse se rouler avec l'hélice décrite par le point a' et dont le pas est h, si l'équation $\frac{H}{h} = \frac{p}{q}$ est satisfaite.

Les deux hélices S et s ont au point de contact m une tangente commune; et pour tous les points de l'hélice S, la tangente fait avec l'axe P le même angle; il en est de même pour tous les points de l'hélice s. Si les hélices décrites par les points de ab, au lieu d'avoir le pas H avaient un pas H′ peu différent de H, alors le point a' ne pourrait se mettre en contact avec le point m. Car alors l'hélice S′ décrite par le point m n'aurait pas même tangente que l'hélice s décrite par le point a' (les deux axes P et Q étant supposés dans le même plan); et aussi comme les hélices décrites par les divers points de ab, ont des tangentes qui font avec l'axe P des angles de plus en plus petits, à mesure que les points qui les décrivent se rapprochent de cet axe, l'on voit que l'on trouvera en avant ou en arrière du point m sur ab un point m' tel que l'hélice qu'il décrira fera avec l'axe P le même angle que l'hélice s fait avec l'axe Q.

Alors ces deux hélices pourront être mises en contact, elles auront une tangente commune, et nécessairement on aura : p' (distance de m' à l'axe P) est à q (distance du point a' à l'axe Q) dans le rapport qui existe entre H′ et h; car l'hélice décrite par le point m' pourra être formée en pliant sa tangente au point m' sur le cylindre dont le rayon est p'.

Ainsi, en ne considérant que deux dents, si l'une n'est pas construite avec exactitude, si donc les hélices qui composent la surface héliçoïde qui doit conduire ou être conduite par l'hélice s décrite par le point a'

n'ont pas rigoureusement leur pas égal à H, il sera toujours possible de rapprocher ou d'éloigner les axes P et Q, de manière que le point a trouve un point m' situé sur ab, lequel décrira une hélice faisant avec l'axe P le même angle que fait l'hélice s avec l'axe Q. Et l'hélice s décrite par le point a' ne pourra être mise en contact qu'avec l'hélice décrite par ce point m', tant que les axes P et Q, ainsi que la droite R lieu des points de contact successif, seront assujétis à être situés dans un même plan; car toute autre hélice faisant avec l'axe P un angle plus petit ou plus grand, donnerait au point de contact des tangentes qui se croiseraient; par conséquent l'hélice s ne serait pas tangente à la surface hélicoïde, au point considéré : elle la pénétrerait en ce point; les dents ne pourraient donc se conduire. Mais aussi les vitesses des axes P et Q ne seront plus dans le rapport demandé $\frac{q}{p}$, mais dans le rapport $\frac{q}{p'}$, p' étant le rayon de l'hélice S' sur laquelle se roule l'hélice s.

Mais un engrenage ne peut être formé par des roues n'ayant chacune qu'une seule dent. Il faut forcément placer sur ces roues plusieurs dents et dans des positions telles que le mouvement de rotation puisse se continuer sans être arrêté.

Il faudra donc placer sur le cylindre qQ une suite d'hélices équidistantes, leurs points de départ sur le cercle C tracé par le point a étant aussi équidistants entre eux, et divisant ce cercle C, en arcs égaux; puis faire rouler ce cylindre qQ sur le cylindre pP. Toutes les hélices du cylindre qQ laisseront sur pP pour traces des hélices aussi équidistantes, mais dont les points de départ sur le cercle C' décrit par le point m ne seront équidistants qu'autant que le cercle C dont le rayon est q se développera un nombre exact de fois sur le cercle C' dont le rayon est p, c'est-à-dire qu'autant que p et q seront dans un rapport commensurable; et cette condition doit être évidemment satisfaite pour que le mouvement de rotation ne soit pas interrompu.

Mais supposant le pignon terminé par le cylindre idéal qQ sur lequel se trouvent tracées des hélices équidistantes s, s', s'', etc., dont les pas sont tous égaux à h, et les points de départ de ces hélices divisant en parties égales le cercle base du cylindre qQ, nous ne pouvons pas supposer que la roue soit terminée par le cylindre idéal pP, parce que les dents doivent avoir un excès de longueur pour que

l'hélice s conduise son homologue S autrement que par le contact, c'est-à-dire ne puisse pas s'échapper, si la résistance devient plus grande que celle que peut vaincre le frottement de roulement. Le cylindre idéal aura donc pour la roue un rayon p'' plus grand que p, et nous appellerons ce cylindre p''P (fig. 4).

Puisque nous supposons que le cylindre qQ se développe un nombre exact de fois sur le cylindre pP, et que nous supposons que les surfaces des dents de la roue sont formées par une surface héliçoïde, il s'ensuit que l'on aura sur le cylindre p''P des hélices équidistantes entre elles et dont les points de départ diviseront le cercle qui lui sert de base et dont le rayon est p'', aussi en parties égales; et les distances de ces hélices, distances mesurées sur les génératrices du cylindre p''P, seront toutes égales entre elles et à celles des hélices tracées sur le cylindre qQ du pignon. Dans ce cas les hélices du pignon ne pourront se mettre en contact qu'avec celles tracées sur le cylindre pP, supposant le point de contact dans le plan des deux axes P et Q.

Mais si, par un vice de construction, les hélices composant les surfaces héliçoïdes qui forment les dents de la roue n'avaient pas leurs pas H dans le rapport $\frac{H}{h} = \frac{p}{q}$, il arriverait nécessairement, ou que les points de départ des hélices sur le cercle des bases ne seraient point également distants, les distances des hélices dans le sens des génératrices du cylindre n'ayant point varié, ou que ces distances auraient varié, si les points de départ étaient restés les mêmes, c'est-à-dire divisant le cercle base en arcs égaux. Dans le deuxième cas, les hélices du pignon et de la roue ne pourraient se mettre en contact, car les dents ne pourraient s'enchâsser les unes dans les autres; et dans le premier cas, le mouvement de rotation ne pourrait être continu. Ainsi l'engrenage de With ne peut marcher qu'autant que les hélices sont parfaitement exécutées, toutefois, en supposant, ainsi que nous l'avons fait dans tout ce qui précède, que le point de contact sera dans le plan des axes.

With est parvenu à vaincre toutes les difficultés que l'exécution présentait, comme on peut s'en assurer en examinant un modèle d'engrenage cylindrique qui existe dans le cabinet de l'École Polytechnique. Les hélices sont construites avec une rare précision, la division des surfaces cylindriques de la roue et du pignon est d'une grande égalité.

Mais malgré la perfection de son travail, est-il vrai que ses engrenages, mis en place, jouissent du frottement de roulement?

Nous venons de démontrer que tant que le point de contact des hélices qui se conduisaient était dans le plan des axes, cela avait lieu. Nous avons aussi démontré que la moindre inexactitude dans l'inclinaison voulue des hélices, conduisait à des roues et pignons qui ne pouvaient s'engrener, si l'on cherchait à mettre le point de contact dans le plan des axes. Mais le pignon ne peut-il pas avoir son contact hors du plan des axes? Et dans ce cas, les vitesses angulaires seraient-elles toujours dans le même rapport, et le frottement ne pourrait-il pas être de glissement? C'est ce que je vais examiner.

Supposons (fig. 4) une surface héliçoïde E engendrée par la droite ab tournant autour de l'axe P, puis une hélice s engendrée par le point a tournant autour de l'axe Q, la tangente à l'hélice s faisant avec l'axe Q un angle α.

Sur la surface E je prends un point arbitraire m; par ce point je fais passer un plan tangent T à cette surface. Par le point m passe une hélice S de la surface héliçoïde dont le pas est H. La distance du point m à l'axe P étant p, la tangente à l'hélice S fait avec l'axe P un angle dont la tangente trigonométrique sera $\frac{H}{2\pi p}$.

Par le point m j'élève une parallèle Y à l'axe P, puis je fais passer par ce même point une droite faisant avec cette parallèle l'angle α. Cette droite engendrera par son mouvement de rotation un cône droit dont l'axe sera Y. Le plan T pourra, 1° ne rencontrer le cône qu'en son sommet; 2° toucher ce cône suivant une génératrice; 3° couper le cône suivant deux génératrices.

Dans le premier cas, de quelque manière que l'on place les deux axes P et Q en les supposant toujours dans le même plan, l'hélice s ne pourra être tangente au point m à la surface E: elle la pénétrera toujours.

Dans le deuxième cas, les axes P et Q devront être à une distance déterminée pour que l'hélice s soit tangente à la surface E, et il n'y aura qu'une position de contact.

Dans le troisième cas, il y aura deux positions de contact.

Voyons, d'après ce qui précède, ce qui doit arriver dans les engrenages de With.

La surface E d'une dent de la roue est composée d'hélices dont les pas égaux sont avec celui de l'hélice s du pignon dans le rapport $\frac{H}{h} = \frac{p}{q}$, p et q étant les rayons des cercles bases des cylindres sur lesquels sont tracées les hélices S et s, qui se conduisent, et ces cercles se développant un nombre exact de fois l'un sur l'autre, c'est-à-dire que p et q sont commensurables entre eux, et que S et s ont pour tangentes des lignes qui font avec l'axe P et Q des angles égaux.

J'appelle tS la tangente à l'hélice S, et ts la tangente à l'hélice s, m un point quelconque de S, et a' un point quelconque de s, p la distance de m à l'axe P, et q la distance de a' à l'axe Q.

Et rappelons-nous que la surface E est engendrée par une droite (qui ne sera autre que le côté ab du triangle générateur employé par With), laquelle s'appuie sur l'axe P et l'hélice S, et qui se meut en restant parallèle à une surface conique droite dont P serait l'axe, ou bien en restant parallèle au plan perpendiculaire à l'axe P. Désignons par d la position particulière de cette droite lorsqu'elle passe par le point m.

Si nous prenons sur d un point m' dont la distance p' à l'axe P soit plus grande que p, par ce point m' passera une hélice S' dont la tangente tS' fera avec l'axe P un angle $\alpha' > \alpha$.

Par le point m' faisons passer une droite Y parallèle à P, et dans le plan qui passe par Y et tS', traçons une droite f passant par m' et qui fasse avec l'axe P un angle α.

Si je fais tourner f autour de Y, elle engendrera une surface conique droite Σ dont Y sera l'axe et f la génératrice, et il pourra arriver deux cas (en se rappelant que la droite ts est comprise dans l'angle formé par Y et tS', puisque $\alpha' > \alpha$), ou que ce cône ne rencontre pas le plan T tangent à E en m', plan qui passe par d et tS', ou qu'il lui soit tangent, car le plan qui passe par Y et tS' n'est point perpendiculaire au plan tangent T. [Cela n'aurait lieu qu'autant que d serait perpendiculaire à l'axe P, c'est-à-dire lorsque la surface E sera engendrée par une droite, s'appuyant sur l'axe P et sur l'hélice S, et restant parallèle au plan perpendiculaire à l'axe P, et dans ce dernier cas, le cône Σ ne serait tangent au plan T que lorsque le point m' se confondrait avec le point m.] Si le cône Σ ne rencontre

pas le plan tangent T, lorsque l'on mettra l'hélice s en contact avec l'hélice S′, et qu'ainsi les points a' et m' seront seulement superposés, que l'on fasse éloigner ou rapprocher les axes P et Q l'un de l'autre en les faisant tourner autour de la droite Y, dans quelque position, enfin, que l'on place les hélices S′ et s l'une par rapport à l'autre, il arrivera toujours que s coupera la surface E, par conséquent les deux roues dentées ne pourront être mises en contact par les points a' et m'.

Si le cône est tangent au plan tangent à E, l'hélice s pourra être mise en contact avec la surface E, et sa position sera celle où sa tangente ts se confondra avec l'arête de contact du plan tangent T avec le cône décrit par f autour de Y.

Mais alors les deux hélices s et S′ n'ayant point les rayons des cylindres sur lesquels elles sont tracées dans le rapport exact et inverse des vitesses des axes P et Q, elles ne rouleront point angulairement l'une sur l'autre, mais glisseront angulairement l'une sur l'autre. J'ai employé l'expression *angulaire*, parce que dans les positions qu'occupent les hélices s et S′, l'on voit que leurs tangentes ne se confondent point, mais se croisent au point qui leur est commun, celui en lequel les points a' et m' se confondent.

Mais si nous considérons le point m appartenant à l'hélice S et si nous établissons que les points a' et m se superposent, alors la tangente ts pourra prendre deux positions sur le plan tangent à la surface E passant par d et tS. Car le plan qui passera par tS, et sera parallèle à l'axe P, ne sera point perpendiculaire au plan tangent au point m à la surface E, à moins que d ne soit perpendiculaire à l'axe P, et dans ce dernier cas la tangente ts ne pourra prendre qu'une seule position et ce sera celle où elle se confond avec la tangente tS. Dans le premier cas s et S pourront avoir un frottement de roulement direct ou angulaire, et dans le deuxième cas, un frottement de roulement direct seulement. En prenant un point m'' sur d entre l'axe P et le point m et établissant que le point a' se superpose avec ce point m'', alors la droite ts pourra toujours prendre deux positions sur le plan tangent à la surface E au point m''. Ainsi l'on doit conclure de tout ce qui précède :

Que si la génératrice d de la surface hélicoïde E qui forme la sur-

face des dents est inclinée par rapport à l'axe P, lors même que les hélices s et S (qui doivent se développer l'une sur l'autre en roulant), seraient en contact, il pourra arriver, ou que leurs tangentes se confondent ou qu'elles se croisent sans que l'on puisse en être averti par autre chose que par le calcul que l'on fera de la somme des distances p et q. Si la distance des axes P et Q dans la position de contact égale $(p+q)$, les tangentes se confondront; si elle est plus petite, les tangentes se croiseront. Dans le premier cas le frottement sera direct et de roulement, et dans le deuxième il sera angulaire et de roulement.

Mais comme nous avons vu que l'hélice s peut se mettre en contact dans deux positions différentes ou dans une seule (la droite d étant toujours inclinée par rapport à P), avec une hélice S′ autre que S, il pourra arriver que la distance des axes P et Q soit $>$ ou $<(p+q)$, et que le frottement soit, dès-lors, angulaire et de glissement. Et l'on ne pourra le reconnaître qu'autant que l'on aura calculé les épaisseurs des roues, de manière que les cercles supérieurs et inférieurs soient dans le même plan, les points a' et m étant en contact, et que le mouvement de rotation soit bien donné par le travail des hélices s et S; si donc par une *pose* défectueuse de l'engrenage le mouvement de rotation est donné par le travail des hélices s et S′, les cercles supérieurs et inférieurs ne seront point dans le même plan (la droite d étant toujours inclinée par rapport à P). Mais dans le cas où d sera perpendiculaire à P, quelque position que l'hélice s prenne, les cercles supérieurs et inférieurs qui terminent la roue et le pignon seront toujours dans le même plan, et aussi dans ce cas sera-t-on assuré que s est en contact avec S lorsque la distance des axes P et Q sera égale à $(p+q)$.

On doit donc préférer pour les engrenages de With la génération de la surface héliçoïde E par une droite d perpendiculaire à l'axe P. Mais on voit par tout ce qui précède, que même dans ce cas, on ne pourra affirmer que le frottement est direct et de roulement, car les moyens mécaniques manquent pour mesurer avec une exactitude mathématique, la distance des deux axes P et Q. De sorte que l'on ne pourra jamais être sûr que le frottement ne soit pas angulaire et de glissement. Le glissement sera, il est vrai, très petit, et de plus sera constant, c'est-à-dire que les dents glisseront l'une sur l'autre

de la même quantité pour des espaces angulaires parcourus en temps égaux.

On voit d'après ce qui précède que l'on doit reconnaître quatre espèces de frottement, que je désignerai ainsi :

$$\text{Frottement direct} \left\{ \begin{array}{c} \text{de roulement} \\ \text{et} \\ \text{de glissement} \end{array} \right\} \text{et angulaire} \left\{ \begin{array}{c} \text{de roulement} \\ \text{et} \\ \text{de glissement.} \end{array} \right\}$$

Les premiers auront lieu lorsque les courbes en contact auront même tangente, les seconds lorsque leurs tangentes se croiseront au point commun. Mais, dans les engrenages de With, il ne pourra exister que trois de ces quatre frottements :

1°. Frottement direct et de roulement, lorsque les hélices qui sont en contact ont même inclinaison, et que le point de contact est dans le plan des axes;

2°. Frottement angulaire et de roulement, lorsque les hélices qui sont en contact ont même inclinaison, et que le point de contact n'est pas dans le plan des axes;

3°. Enfin, frottement angulaire et de glissement, lorsque les hélices qui sont en contact n'ont pas la même inclinaison, et que le point de contact n'est pas dans le plan des axes.

Pour rendre plus clair tout ce que je viens de dire sur la difficulté que l'on éprouve à mettre en place les engrenages de With, et pour mieux faire comprendre la nature des divers frottements que je viens d'indiquer, je vais construire géométriquement des courbes qui pendant leur mouvement jouiront de l'un ou de l'autre des deux frottements angulaires remarqués dans les engrenages de With. Je supposerai que ces courbes sont tracées sur des cylindres droits, dont les bases sont des cercles ou des courbes arbitraires. Car ce que nous dirons dans le cas des cercles sera vrai pour le cas des courbes arbitraires.

Fig. 6. Supposons deux cercles de rayons inégaux, tracés dans un même plan. Le centre du premier étant le point P, son rayon p; le centre du deuxième étant le point Q, et son rayon q. Ces deux cercles se coupant aux points m et n, supposons deux cylindres verticaux ayant ces cercles horizontaux pour bases.

Nous nommerons P′ l'axe du premier, Q′ l'axe du deuxième,

et M et N les génératrices d'intersection, lesquelles passeront respectivement par les points m et n. Supposons par M un plan dans lequel nous tracerons une droite d ou une courbe φ (nous emploierons dans les arts la droite d); puis enroulons ce plan, soit sur le cylindre P′, soit sur le cylindre Q′, la droite d laissera sur le premier pour trace une hélice G, et sur le deuxième une hélice g, qui se croiseront au point m' situé sur la génératrice d'intersection M, la droite d passant par ce point m', les droites m'T′ et $m't'$ tangentes au point m' respectivement à l'hélice G et à l'hélice g, se projetteront suivant mT et mt tangentes respectives en m aux cercles p et q.

Si le cylindre P′ tourne autour de son axe, l'hélice G conduira l'hélice g et le frottement sera angulaire et de roulement, car les points de ces deux hélices se conduiront angulairement les uns par rapport aux autres de la même manière qu'ils se conduiraient directement, si le cylindre Q′ prenant un mouvement autour de la génératrice, M, venait se mettre en contact avec le cylindre P′ suivant cette même ligne M, auquel cas, les deux hélices G et g auraient une tangente commune et rouleraient directement l'une sur l'autre.

Si donc par les deux tangentes m'T′ et $m't'$, je fais passer un plan, il coupera les deux axes P′ et Q′, le premier au point o, le deuxième au point o'. Je joins o et m', o' et m' par des droites, puis dans le plan passant par m' et P′ je trace une courbe L tangente en m' à la droite om'; et dans le plan passant par m' et Q′ une courbe L′ tangente en m' à la droite $o'm'$.

Je fais mouvoir la courbe L le long de l'hélice G, de manière qu'elle soit toujours dans un plan passant par l'axe P′ et que la droite $o'm'$ dans ses diverses positions reste parallèle à une surface conique droite engendrée par $o'm'$ tournant autour de l'axe P′, le point o' étant le sommet du cône.

Je fais mouvoir de la même manière la courbe L′ autour de l'axe Q′ et le long de l'hélice g; j'aurai alors formé deux surfaces héliçoïdales E et e qui seront pendant le mouvement de rotation toujours tangentes l'une à l'autre et le point de contact se mouvra sur la droite M.

Les deux cercles p et q se coupent par conséquent, le rayon p étant $> q$, l'arc mbn appartenant au cercle q et qui tourne sa con-

cavité vers $mb'n$ appartenant au cercle p sera plus grand que lui. Par conséquent l'hélice g aura un point dont la projection sera en n qui se trouvera au-dessous de celui de G qui a le même point n pour projection horizontale; il faudra donc que l'hélice g conduise en-dessous l'hélice G ou soit conduite en-dessus par elle. Ainsi L′ sera au-dessous de L par rapport au plan tangent commun aux deux surfaces E et e. (Plan tangent qui n'est autre que celui qui passe par les deux tangentes m'T′ et $m't'$), et ces deux surfaces e et E se conduiront par un frottement angulaire et de roulement.

Dans le cas des engrenages de With, la surface e se réduit à l'hélice g et la courbe L′ à un point de cette hélice, et la courbe L n'est autre que la droite om'.

Mais si au lieu de tracer sur le plan passant par la génératrice M une seule courbe φ ou une droite d nous traçons deux courbes φ et φ' ou deux droites d et d' passant par le point m' situé sur M (et ce que nous dirons pour les droites d et d' sera vrai pour le cas où l'on aurait les courbes φ et φ').

En roulant ce plan sur le cylindre P′, d laissera pour trace une hélice G, et d' laissera sur le cylindre Q′ une hélice g'. Ces deux hélices G et g' auront des tangentes qui se croiseront en m', mais si je fais tourner le cylindre Q′ autour de M pour venir se mettre en contact avec le cylindre P′, suivant cette même génératrice M, alors les deux hélices G et g' auront bien pour plan tangent commun, le plan vertical passant par la génératrice M et les tangentes aux hélices; mais ces tangentes ne se confondront plus en une seule, elles se croiseront. Les deux hélices dans cette position ne pourront se rouler, et pour qu'elles conservent un point commun le long de la génératrice M, pendant le mouvement de rotation, elles devront glisser l'une sur l'autre, de sorte que, quoique dans leur position primitive angulaire, je puisse leur mener un plan tangent commun par leurs tangentes m'T′ et $m't'$ (tangentes qui ne sont autres que les droites d et d'), plan qui coupera les deux axes P′ et Q′, et me permettra de construire deux hélicoïdes E et e' tangents l'une à l'autre au point m', le frottement entre les deux courbes G et g' sera nécessairement angulaire et de glissement et non de roulement.

Nous n'avons encore dans la construction de ces engrenages à

frottement angulaire considéré que deux filets ou dents en contact. Mais pour que le mouvement de rotation puisse être continu, il faudra disposer sur chaque roue une série de filets équidistants.

Dans le cas où p et q seront commensurables entre eux et seront dans le rapport inverse des vitesses des axes, on voit que les hélices tracées sur le cylindre P′ et Q′ ont des pas qui sont dans le rapport des rayons des cercles bases des cylindres, c'est-à-dire que l'on a $\frac{H}{h} = \frac{p}{q}$. Ainsi la construction sera absolument la même dans le cas du roulement angulaire et dans celui du roulement direct.

Mais lorsque p et q sont incommensurables entre eux ou ne sont pas dans le rapport inverse des vitesses des axes, si les hélices de l'héliçoïde E ayant pour pas H, l'hélice tracée sur le cylindre Q′ avait pour pas h, de sorte que l'équation $\frac{H}{h} = \frac{p}{q}$ subsiste, on ne pourrait avoir sur ce cylindre des hélices s, s', s'', etc., équidistantes entre elles sur la génératrice M de la même quantité que les hélices des surfaces E, E′, E″, etc., le sont sur cette même génératrice, et de plus divisant par leurs points de départ le cercle base du cylindre Q′ en parties égales. Alors il faudra incliner ces hélices, en les faisant pivoter autour de leurs points situés sur la génératrice M jusqu'à ce que l'on obtienne un pas h' tel que les points de départ sur le cercle base du cylindre Q′ soient équidistants. Dans ce cas on voit que les hélices s et S ne seront plus également inclinées par rapport à leurs axes respectifs P′ et Q′, et que l'on aura un frottement angulaire et de glissement. (*Voir* la Note A.)

[Il faut encore remarquer que si l'on avait pour bases des cylindres, des courbes autres que des cercles, fig. 7, il faudra que pendant le mouvement de rotation, les petits arcs de la courbe γ interceptés par la courbe γ' soient toujours plus petits ou plus grands que ceux que cette courbe γ interceptait sur γ', parce que l'on a vu qu'il fallait, pour que les hélices pussent se conduire, qu'elles n'eussent pas de point commun sur la deuxième génératrice d'intersection désignée par N, mais seulement sur la première que nous avons désignée par M].

Nous avons démontré que les engrenages de With, tels que ce

mécanicien les a construits, en supposant que l'hélicoïde E est engendré par une droite, et que la surface e se réduit à un hélice, pouvaient être mis en contact de trois manières différentes, de sorte que l'on pouvait avoir trois espèces de frottement; mais cela ne tient-il pas à la nature des surfaces E et e que With a choisies, et si l'on employait des surfaces E et e dont les courbes génératrices L et L′ seraient autres qu'une droite et un point, ces trois positions de contact seraient-elles possibles? Ainsi l'engrenage étant construit avec précision, pour une position de contact, lorsqu'on le mettra en place, ne sera-t-il pas forcé de prendre la position voulue, sans pouvoir en prendre une autre, comme cela arrive à ceux construits par With, quelque précision d'ailleurs qu'on apporte à leur exécution?

Je suppose que le point m situé sur L décrive une hélice dont le pas est H, et que la distance de ce point m à l'axe P soit p; que sur L′ j'aie un point a qui décrive une hélice dont le pas est h, que la distance de ce point a à l'axe Q soit q et que l'on ait $\frac{H}{h} = \frac{p}{q}$, les deux hélices rouleront l'une sur l'autre, et le plan tangent à la surface E au point m, fera avec la verticale passant par ce point m le même angle que le plan tangent à la surface e au point a, fait avec la verticale passant par le point a. J'appelle cet angle δ.

Supposons maintenant un point m' situé sur la courbe L entre l'axe P et le point m ou au-delà du point m, par rapport à l'axe P: le plan tangent à la surface E pour ce point m', fera avec la verticale passant par ce point m' un angle ϵ. Sur la courbe L′ je prends un point a' placé d'une manière quelconque par rapport à l'axe Q et le point a; je mène le plan tangent à la surface e en ce point a': ce plan fera avec la verticale un angle ϵ'.

Si ϵ et ϵ' sont égaux, je pourrai mettre les deux surfaces E et e en contact par les points m' et a', alors les hélices décrites par ces points m' et a' se croiseront et l'on aura un frottement angulaire de glissement.

On voit donc qu'il faut que tous les plans tangents à la surface E fassent avec l'axe P des angles plus grands ou plus petits que l'angle δ, et que tous les plans tangents à la surface e fassent avec l'axe Q des angles plus petits ou plus grands que cet angle δ, les plans tangents

à E et e aux points m et a étant les seuls qui fassent avec P et Q un angle égal à δ et alors les deux surfaces E et e ne pourront être mises en contact que par les seuls points m et a; mais aussi, en satisfaisant à ce tte condition, l'exécution des surfaces E et e deviendrait plus difficile dans la pratique.

Tout ce que j'ai dit sur les engrenages cylindriques est applicable aux engrenages coniques. Car si l'on mène un plan tangent aux deux surfaces coniques sur lesquelles sont tracées les spirales, ce plan passant par leur arète de contact, on voit que les deux courbes se développeront sur ce plan tangent suivant une même spirale d'Archimède, ayant le sommet commun aux deux cônes pour pôle, si les pas H et h des spirales coniques sont dans le rapport des rayons des cercles bases des cônes; ces cercles ayant pour pôle commun le sommet des cônes, et pour rayon vecteur l'apothème commune.

Ainsi les engrenages coniques de With jouissent des mêmes propriétés et des mêmes inconvénients dont nous avons parlé en examinant ses engrenages cylindriques.

Dans ce qui précède, j'ai discuté les propriétés qui appartenaient aux engrenages exécutés par With. J'ai fait remarquer les inconvénients qui résultaient de la forme que ce mécanicien avait donnée aux dents. Enfin j'ai indiqué les conditions géométriques auxquelles devraient satisfaire les surfaces des dents, afin que ces inconvénients n'eussent pas lieu, c'est-à-dire, pour qu'on fût toujours assuré que le point de contact était dans le plan des axes, lorsque les roues étaient en place. Mais en même temps j'ai fait sentir que l'exécution mécanique des surfaces héliçoïdes des dents serait sans doute beaucoup plus difficile.

Au lieu donc de surfaces héliçoïdes, je pense que l'on devrait employer des surfaces coniques ayant pour courbes directrices, les hélices équidistantes tracées sur l'un des deux cylindres ou sur l'un des deux cônes idéaux, que nous avons désignés précédemment par pP ou qQ, toutes ces surfaces coniques ayant pour sommet commun, un point de l'axe de la roue dentée.

Je vais donner la construction de ces surfaces coniques; et les avantages qui résulteraient de leur emploi par là même deviendront évidents. J'examinerai seulement le cas des engrenages cylindriques,

tout ce que j'aurai dit pour eux s'appliquant aux engrenages coniques.

Ayant deux cylindres, dont les axes sont parallèles, et mis en contact suivant une génératrice G; appelant P l'axe du premier et Q celui du deuxième; nommant p le rayon du cercle base du premier et q celui du deuxième, et supposant que p et q sont commensurables entre eux, on a vu que si l'on traçait sur le premier une hélice φ dont la tangente faisait avec l'axe P un angle α, et sur ce deuxième une hélice ζ dont la tangente faisait avec l'axe Q le même angle α, ces deux hélices étant en contact suivant un point m situé sur la génératrice G; on a vu, dis-je, que ces deux hélices roulaient directement l'une sur l'autre pendant le mouvement de rotation des deux cylindres. Supposons que j'éloigne l'axe Q et qu'il prenne la position Q', en le faisant mouvoir parallèlement à lui-même dans le plan des axes, le point m glissant sur une droite mo perpendiculaire à l'axe P, le point o étant sur cet axe; dès-lors le point m prendra une position m' sur la droite mo, et par ce point m' passera une droite m'G' arête du cylindre Q'q. Cette arête, en tournant autour de P, engendrera une surface cylindrique ayant $om' = p'$ pour rayon du cercle qui lui servira de base; et si l'on imprime un mouvement de rotation à ce nouveau système, l'hélice ζ aura pour homologue sur le cylindre Pp' une hélice φ' dont la tangente fera avec l'axe P un angle α. En faisant passer successivement le point m par les divers points de mo, et à chaque position nouvelle faisant les constructions précédentes, on voit que par les divers points m, m', m'', m''', etc., de la ligne mo passeront des hélices φ, φ', φ'', φ''', etc., dont les tangentes feront toutes avec l'axe P le même angle α, ces hélices étant tracées sur des cylindres concentriques, dont les cercles bases auront respectivement pour rayons les distances des points m, m', m'', m''', etc., au point o situé sur P, distances que je désignerai par p, p', p'', p''', etc. et p', p'', p''', etc.; étant les unes plus $>$ et les autres $<$ que p.

La surface formée par les hélices φ, φ', φ'', φ''', etc., étant désignée par E, on voit que suivant la droite mo, qui sera une génératrice de cette surface, il existera un plan tangent unique qui passera par les tangentes à φ, φ', φ'', φ''', etc., et menées respectivement aux points m, m', m'', m''', etc. de ces hélices. Maintenant démontrons que cette surface E est un cône dont le sommet est au point o.

Pour cela, fig. 8, supposons trois cercles concentriques op'', op, op'. Désignant par o leur centre commun et par $p'' < p < p'$ leurs rayons, coupons ces trois cercles par une droite ob passant par le centre. Les points d'intersection étant m'', m, m', supposons que ces trois cercles sont les bases de trois cylindres verticaux, et par chaque génératrice passant respectivement par les points m'', m, m', menons à ces cylindres des plans tangents M'', M, M'. Dans chacun de ces plans traçons des droites parallèles et passant par les trois points situés sur les cercles de base, ces trois droites faisant avec l'axe commun aux cylindres le même angle α; désignons ces droites par $m''d$, md, $m'd$. Les trois plans tangents couperont le plan horizontal sur lequel sont tracés les trois cercles suivant des tangentes à ces cercles et que nous désignerons par $m''t$, mt, $m't$.

Par le point o menons une droite oc coupant les trois tangentes aux points n'', n, n'; élevant par ces trois points des verticales qui seront respectivement situées dans les trois plans tangents, elles couperont les droites $m''d$, md, $m'd$, en trois points g'', g, g', qui seront sur une droite oG passant par le point o.

Si maintenant j'enroule les trois droites $m''d$, md, $m'd$, sur leurs cylindres respectifs, j'aurai trois hélices φ'', φ, φ', faisant avec l'axe un angle constant α, et chacun des points g'', g, g', se placera sur les hélices correspondantes en des points h'', h, h', qui seront évidemment sur une droite oH passant par le point o. Ainsi toutes les hélices φ'', φ, φ', seront sur un cône dont le sommet sera au point o.

Nous avons jusqu'ici supposé qu'il n'existait sur le pignon qQ qu'une seule hélice ζ. Supposons qu'il existe δ hélices équidistantes entre elles (la distance entre deux hélices étant mesurée sur une génératrice du cylindre Qq), ces hélices ζ, ζ', ζ'',...etc... diviseront le cercle base du pignon en δ arcs égaux. Si je fais mouvoir ce cylindre sur celui dont le rayon égale p et dont l'axe est P, alors comme le cylindre Qq se développera exactement sur le cylindre Pp, on obtiendra $\left(\frac{p}{q}\right)\delta$ hélices sur ce cylindre, et toutes équidistantes entre elles et de la même quantité qui existe pour deux hélices consécutives ζ, ζ', tracées sur Qq.

Nommons θ, θ', θ'',.. etc.... les hélices obtenues sur Pp, nous pourrons les regarder comme les directrices d'une série de cônes ayant tous pour sommet le point o.

Nous pourrons couper ces cônes par deux cylindres Pp' et Pp'', p' étant $<$ que p et $p''>p$, et les zones coniques interceptées formeront les surfaces des dents de la roue ayant pour axe P. Et comme les hélices intersections de la série des cônes et du cylindre Pp'' seront équidistantes, mais d'une quantité plus grande que celle qui existe entre deux hélices consécutives ζ, ζ'' du pignon; et que celles qui seront l'intersection de la série des mêmes cônes et du cylindre Pp', le seront d'une quantité plus petite; il est évident que le cylindre Qq du pignon ne pourra se mettre en contact qu'avec le cylindre Pp de la roue, le mouvement de rotation ne pouvant être continu qu'autant que les hélices ζ, ζ', etc., conduiront respectivement les hélices θ, θ', etc.; et comme les contacts des diverses dents seront situés sur une génératrice du cylindre Pp et que par ces points passeront respectivement des génératrices des divers cônes formant la surface des dents en contact, ces génératrices feront avec l'axe P des angles différents, puisqu'elles partent toutes du même point o. Les plans tangents aux points de contact feront donc des angles différents avec l'axe P, par conséquent le pignon ne pourra pas tourner autour de la ligne qui contient les points successifs de contact, pour prendre une autre position que celle que la construction a déterminée.

On appliquerait facilement les mêmes raisonnements et les mêmes constructions à l'engrenage conique.

J'ai publié ce Mémoire sans y rien changer, ni modifier; il est conforme au texte du manuscrit présenté à l'Institut, sauf les corrections de style qui arrivent toujours lors de l'impression. Sans nul doute, je présenterais maintenant mes idées dans un autre ordre, plus net et plus précis; mais j'ai pensé que je devais imprimer ce Mémoire textuellement pour que l'on pût s'assurer qu'en effet la question se trouvait résolue dès 1825, et qu'ainsi With avait raison. Je crois devoir ajouter que la démonstration exposée dans ce Mémoire, avait été trouvée dès 1818, lorsque j'étais élève sous-lieutenant d'artillerie à l'école d'application de Metz, et que je n'ai fait que transcrire ce que j'avais écrit, à cette époque, sur les engrenages de With.

Note A.

Dans cette note, je me propose d'exposer en peu de mots toute la théorie géométrique des engrenages de With, et de démontrer d'une manière très simple, qu'en effet, on peut construire des engrenages à la With qui jouissent à volonté des trois espèces de frottement :

Savoir, frottement de roulement, 1° direct ou 2° angulaire et 3° frottement de glissement angulaire; pouvant d'ailleurs rendre aussi considérable que l'on voudra, ou aussi petit que l'on voudra, le glissement d'une dent sur l'autre, pendant le temps que ces deux dents emploient à se conduire.

Supposons deux axes parallèles P et Q distants l'un de l'autre d'une quantité k, et supposons que dans le plan de ces axes on ait une droite R parallèle à l'une et l'autre droite P et Q et telle que la distance p de R à P soit à la distance q de R à Q dans le rapport inverse des vitesses des axes P et Q.

Ainsi V étant la vitesse de l'axe P et v celle de l'axe Q, on aura

$$\frac{p}{q} = \frac{v}{V}.$$

La droite R en tournant autour de l'axe P engendrera un cylindre pP, et en tournant autour de l'axe Q elle engendrera un cylindre qQ.

Coupons ces deux cylindres par deux plans parallèles entre eux et perpendiculaires à la droite R, et désignons par z la distance entre ces deux plans.

Le premier coupera le cylindre pP suivant un cercle C et le second suivant un cercle C′.

Le premier coupera le cylindre qQ suivant un cercle c et le second suivant un cercle c'.

Supposons ces quatre cercles liés deux à deux respectivement aux axes P et Q, on voit que lorsque l'axe P tournera sur lui-même avec la vitesse V, les cercles C et C′ entraîneront respectivement les cercles c et c' et forceront l'axe Q à se mouvoir avec la vitesse v; les cercles homologues C et c, C′ et c' roulant l'un sur l'autre.

Si l'on mène suivant la droite R un plan tangent commun aux deux cylindres pP et qQ, et que dans ce plan on mène une droite D, en pliant ce plan sur le cylindre pP, la droite D se déformera suivant une hélice S et, en pliant le même plan sur le cylindre qQ, la droite D se déformera suivant une hélice s.

Et si nous désignons par α l'angle sous lequel la droite D coupe la droite R, on

aura, en désignant par H le pas de l'hélice S et par h le pas l'hélice s,

$$(2\Pi.p)\cot\alpha = \mathrm{H} \quad \text{et} \quad (2\Pi.q)\cot\alpha = h.$$

On aura donc

$$\frac{\mathrm{H}}{h} = \frac{p}{q} = \frac{\nu}{\mathrm{V}}.$$

Ainsi les pas des hélices S et s seront dans le rapport inverse des vitesses des axes, ainsi que le sont les rayons des cercles homologues C et c.

Cela posé :

Il est évident que la portion de l'hélice S, ainsi que celle de l'hélice s, comprises entre les deux plans distants entre eux de la quantité z seront égales entre elles et dès-lors pendant le mouvement de rotation, ces deux portions d'hélices rouleront l'une sur l'autre, ayant eu chacun de leur point de contact une tangente commune ; et le point de contact décrira la droite R. On aura donc le frottement de roulement direct. (1er *cas.*)

Si maintenant on fait tourner le cylindre qQ autour de la droite R, sans rien changer à ce qui a été construit précédemment (sinon que la distance des deux axes P et Q sera plus petite que k), les deux hélices S et s se croiseront en un point situé sur la droite R, et pendant le mouvement de rotation, elles se développeront l'une sur l'autre, mais le frottement de roulement sera angulaire, puisque pour chaque point de contact angulaire, leurs tangentes se croisent au lieu de se superposer.

On aura donc le frottement de roulement angulaire. (2e *cas.*)

Mais si l'on prend deux cylindres ayant pour axe l'un P et l'autre Q, ces deux cylindres se coupant suivant deux droites M et N, et si l'on mène deux plans perpendiculaires à la droite M et distants entre eux d'une quantité z; en sorte que le cylindre P soit coupé par le premier plan, suivant un cercle C_1 du rayon p_1, et par le second plan suivant un cercle C'_1 du même rayon p_1; et que le cylindre Q soit coupé par le premier plan suivant un cercle c_1 du rayon q_1 et par le second plan suivant un cercle c'_1 du même rayon q_1.

Si les axes P et Q se meuvent avec les vitesses V et ν, les cercles homologues C_1 et c_1, C'_1 et c'_1 ne rouleront angulairement l'un sur l'autre qu'autant que l'on aura

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{\nu}{\mathrm{V}}. \qquad (1)$$

Mais si cette équation ne subsiste pas, alors les cercles homologues glisseront angulairement l'un sur l'autre.

Supposons donc que l'équation (1) n'a pas lieu, et menons par la droite M un plan et dans ce plan une droite D coupant la droite M sous l'angle α. Enroulons ce plan sur le cylindre p_1P; la droite D se déformera suivant une hélice S_1 et en enrou-

lant le même plan sur le cylindre q_1Q, la droite D se déformera suivant un hélice s_1.

Et désignant par H_1 le pas de l'hélice S_1 et par h_1 celui de l'hélice s_1, on aura

$$(2\Pi.p_1)\cot\alpha = H_1 \quad \text{et} \quad (2\Pi.q_1)\cot\alpha = h_1;$$

on aura donc

$$\frac{H_1}{h_1} = \frac{p_1}{q_1}.$$

Mais comme l'équation (1) n'est pas satisfaite, les pas des hélices S_1 et s_1 ne seront pas dans le rapport inverse des vitesses des axes; si donc l'on veut que les deux axes P et Q ne changent pas de vitesses, il faudra nécessairement, en supposant que l'hélice S_1 coupe la droite M sous l'angle α, supposer que l'on a une hélice s'_1 autre que s_1 qui soit chargée de conduire l'hélice S_1.

En désignant par h'_1 le pas de cette hélice particulière s'_1, on devra avoir

$$\frac{H_1}{h'_1} = \frac{\nu}{V}. \qquad (2)$$

Désignant donc par α' l'angle sous lequel l'hélice s'_1 doit couper la droite M, on aura

$$(2\Pi.p_1)\cot\alpha = H_1 \quad \text{et} \quad (2\Pi.q_1)\cot\alpha' = h'_1;$$

et en vertu de ce que l'équation (2) doit être satisfaite, on aura

$$\frac{p_1.\cot\alpha}{q_1.\cot\alpha'} = \frac{\nu}{V}. \qquad (3)$$

Ainsi, cette équation (3) servira à déterminer l'inclinaison α' de l'hélice s'_1 nécessaire pour que cette hélice s'_1 conduise angulairement l'hélice S_1 et de telle manière que les vitesses des axes soient toujours dans le rapport constant $\frac{\nu}{V}$.

Mais la position de l'hélice S_1 comprise entre les deux plans distants de la quantité z, ne sera pas égale en longueur à la portion de l'hélice s'_1 comprise entre ces deux mêmes plans; et la différence qui existera entre la longueur rectifiée L de la portion de l'hélice S_1 et la longueur rectifiée l' de la portion de l'hélice s'_1, sera aussi grande ou aussi petite que l'on voudra, pour cela il suffira de faire varier convenablement les rayons p_1 et q_1.

Ainsi plus $\frac{p_1}{q_1}$ différera de $\frac{\nu}{V}$, plus la différence $(L - l')$ sera grande; plus au contraire $\frac{p_1}{q_1}$ approchera d'être égal à $\frac{\nu}{V}$, plus la différence $(L - l')$ sera petite.

On aura donc, dans ce cas, un frottement de glissement angulaire qui pourra devenir aussi petit que possible. (3e *cas.*)

Et remarquons que plus $\frac{p_1}{q_1}$ approche de $\frac{v}{V}$, plus l'angle α approche d'être égal à l'angle α.

D'après ce qui précède, on voit, 1° que dans les deux premiers cas, les rayons p et q doivent être commensurables entre eux pour que le mouvement de rotation puisse être continu, car il faut que le cercle c se développe un nombre exact de fois sur le cercle C, pour que l'hélice s puisse venir reprendre l'hélice S, et 2° que, dans le troisième cas, les rayons p_1 et q_1 n'ont pas besoin d'être commensurables entre eux; ainsi il suffira dans les trois cas de diviser les cercles homologues C et c ou C_1 et c_1 en un nombre d'arcs égaux entre eux et tels que si on en place m sur C ou C_1 et n sur c ou c_1, on aura $\frac{m}{n} = \frac{v}{V}$. Dès-lors, si par les points de division des cercles C ou C_1, on fait passer des hélices telles que S ou S_1, et si par les points de division des cercles c ou c_1, on fait aussi passer des hélices telles que s ou s'_1, le mouvement de rotation se continuera sans interruption.

CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE

D'UN ENGRENAGE

DANS LEQUEL

Les axes des deux roues dentées ne sont pas situés dans un même plan et comprennent entre eux un angle plus petit que l'angle droit, les vitesses étant dans un rapport constant et le frottement étant de roulement angulaire;

PAR M. THÉODORE OLIVIER.

(Mémoire présenté à l'Institut en décembre 1825.)

Étant donnés deux axes P et Q qui ne se rencontrent point et qui sont dirigés d'une manière arbitraire dans l'espace, comprenant par conséquent entre eux un angle quelconque α, on demande s'il est possible (d'après les principes géométriques sur lesquels repose la construction des engrenages cylindriques et coniques de With), de construire deux roues dentées se conduisant par un frottement de roulement, et les vitesses angulaires de ces axes étant dans un rapport constant.

Jusqu'à présent l'on a cru qu'il n'était pas possible de transmettre le mouvement d'un axe à un autre dans le cas où ces axes n'étaient point dans un même plan, par un engrenage formé de deux roues seulement, excepté lorsque les axes étaient à angle droit, et alors on avait le système connu sous le nom d'*engrenage à vis sans fin*. Mais lorsque l'angle compris entre les deux axes était plus petit ou plus grand qu'un droit, l'on avait recours à une troisième roue doublement dentée, dite supplémentaire, dont l'axe coupait les deux axes donnés, et le mouvement se transmettait par le système de

deux engrenages coniques, la roue intermédiaire étant formée de deux roues dentées coniques juxtaposées par leur grande base.

Supposons que le plan vertical de projection soit parallèle aux deux axes donnés et que le plan horizontal de projection soit perpendiculaire à l'un des axes P, par exemple, l'autre étant désigné par Q, fig. 9. Dès-lors l'axe P aura pour projection verticale la ligne oV perpendiculaire à la ligne de terre LT et pour projection horizontale le point o. (Nous supposons que l'axe P est situé dans le plan vertical de projection.) L'axe Q aura pour projection verticale la droite oH faisant avec oV un angle α arbitraire, et pour projection horizontale la droite nH' parallèle à la ligne de terre; de sorte que la ligne on perpendiculaire à la ligne de terre sera la projection horizontale de la plus courte distance entre les deux axes P et Q, et le point o sera la projection verticale de cette plus courte distance.

Les vitesses de rotation des deux axes sont données. Désignant par V la vitesse de l'axe P et par v celle de l'axe Q, $\frac{V}{v}$ sera le rapport des vitesses des axes du système.

Si sur la ligne on je prends un point p tel que l'on ait $op : pn :: v : V$, c'est-à-dire tel que ses distances aux deux axes donnés P et Q soient dans le rapport inverse des vitesses de ces axes, je pourrai regarder le point n comme le centre d'un cercle dont le rayon serait égal à np et dont le plan serait perpendiculaire à l'axe Q. J'appelle ce cercle c

Je pourrai aussi regarder le point o comme le centre d'un cercle dont le rayon serait égal à op et dont le plan serait perpendiculaire à l'axe P. J'appelle ce cercle C.

Les plans de ces deux cercles se coupent suivant la droite on située sur le plan horizontal, et ces deux cercles ne se coupent que suivant le seul point p; si l'on fait mouvoir les deux axes P et Q et que par leur mouvement de rotation ils entraînent avec eux les deux cercles c et C, ces deux cercles rouleront l'un sur l'autre, c'est-à-dire qu'un point de l'un d'eux ne se mettra jamais en contact qu'avec un seul point de l'autre cercle. Mais comme au point commun les tangentes à ces cercles font entre elles un angle, nous avons désigné ce genre de roulement par les mots *roulement angulaire*.

Ainsi le frottement qui existera entre les deux cercles c et C ne

sera point un frottement de glissement, mais bien de roulement, et qui dans ce cas, vu la position qu'affectent les deux courbes l'une par rapport à l'autre, n'est point de même nature que lorsque les tangentes au point commun se confondent. Dans ce dernier cas les courbes ont un contact, et depuis long-temps le frottement de cette espèce est connu et désigné ainsi : frottement de *roulement direct*.

Mais dans le cas que nous examinons les deux cercles se coupent et nous adopterons la dénomination de frottement de *roulement angulaire*.

Si maintenant on construit une ligne D passant par le point dont les projections sont p et o, et telle que les distances de chacun de ses points aux deux axes P et Q soient dans un rapport constant et inverse de celui des vitesses des axes, cette ligne D engendrera par son mouvement autour de l'axe P une surface de révolution P_1 et par son mouvement de rotation autour de l'axe Q une deuxième surface de révolution Q_1, qui se couperont suivant la ligne D et une courbe δ. Chacun des points de la ligne D décrira soit autour de P soit autour de Q des cercles qui se couperont deux à deux de la même manière que les cercles c et C; de sorte que si sur la surface P_1 je trace une courbe arbitraire ξ et que je fasse mouvoir cette surface P_1 autour de son axe P, elle entraînera la surface Q_1 sur laquelle la courbe ξ laissera pour empreinte une courbe ξ', et ces deux courbes seront évidemment telles qu'un point de l'une d'elles ne se mettra jamais en contact qu'avec un seul point de l'autre.

Ainsi les deux courbes ξ et ξ' auront un frottement de roulement; et comme il est évident que leurs tangentes au point commun font un angle entre elles (comme on peut s'en assurer en construisant ces tangentes par la méthode de Roberval), ce frottement sera *angulaire*.

Si maintenant, par une position de rencontre de ξ et ξ', je fais passer un plan T par les deux tangentes à ces courbes, ce plan sera tangent aux deux courbes; et si dans ce plan je mène une droite quelconque R passant par le point commun aux deux courbes et par cette droite un plan N perpendiculaire au plan T, et qu'ensuite dans le plan N je construise deux courbes γ et γ' ayant pour tangente commune la droite R, l'une de ces courbes étant en-dessus, l'autre en-dessous de la droite R, ou en d'autres termes, deux courbes se tournant leur convexité; et que je fasse mouvoir le plan N de manière qu'il soit tou-

jours perpendiculaire aux différents plans T′, T″, T‴, etc. passant par les tangentes qui se croisent aux points successifs de rencontre des courbes ξ et ξ', et que la droite R soit toujours l'intersection du plan N avec ces différents plans tangents aux deux courbes, les courbes γ et γ' auront formé deux surfaces Σ et Σ' qui seront tangentes l'une à l'autre dans toutes les positions qu'elles prendront par le mouvement de rotation des axes P et Q, ces deux filets ou dents Σ et Σ' se conduiront par un frottement de roulement *angulaire*, et le rapport des vitesses des deux roues dentées sera constant et égal à celui des axes, c'est-à-dire à $\frac{V}{v}$.

Cherchons maintenant quelle est la nature de la ligne D. Je dis que cette ligne sera une droite dont la projection horizontale sera pg parallèle à la ligne de terre, et dont la projection verticale sera oG partageant l'angle α en deux, dont les sinus seront dans le rapport inverse des vitesses des axes P et Q.

En effet, il faut qu'un point de l'espace dont les projections sont m, sur le plan vertical et m' sur le plan horizontal, soit tel que ses distances aux deux axes P et Q se trouvent être dans le rapport inverse des vitesses de ces axes. Si par ce point je mène les droites mh et mq respectivement perpendiculaires aux projections verticales des axes P et Q, elles seront les projections verticales des distances du point de l'espace aux deux axes. La distance du point (m, m') à l'axe P sera donc en véritable grandeur la ligne om', hypoténuse d'un triangle rectangle dont l'un des côtés est $m'o' = op$, et l'autre la ligne mh'. La distance du point (m, m') à l'axe Q sera donc en véritable grandeur la ligne $m'r'$, hypoténuse d'un triangle dont l'un des côtés est $m'n' = pn$, et l'autre la ligne $n'r' = mr = mq$. Or il faut que l'on ait

$$om' : m'r' :: m'o' : m'n' :: op : pn :: v : V.$$

Par conséquent $n'r' = mq$ doit être à $o'o = mh$ dans le même rapport $v : V$. Ainsi les deux lignes menées du point m perpendiculairement aux projections verticales des axes P et Q seront dans le rapport inverse des vitesses de ces axes; par conséquent, tous les points de la droite (oG, pg) satisferont à cette condition. Ainsi la ligne D est une droite dont les projections sont oG et pg, la projection verticale oG

partageant l'angle α en deux angles β et β' tels que leurs sinus sont dans le rapport inverse des vitesses des axes P et Q; la projection horizontale pg étant parallèle à la ligne de terre.

Ainsi les deux surfaces P_1 et Q_1 sont deux hyperboloïdes à une nappe et de révolution se coupant suivant une génératrice sur laquelle se mouvra le point de contact des deux dents Σ et Σ'.

Ces deux hyperboloïdes se couperont encore suivant une courbe du troisième degré, mais on ne doit y faire aucune attention, puisque l'on peut ici faire la même remarque que pour le cas des engrenages cylindriques dans lesquels les surfaces cylindriques idéales, contenant la ligne droite, lieu des contacts successifs des dents, n'étaient point tangentes suivant cette ligne, mais se coupaient suivant elle; ainsi les deux filets Σ et Σ' n'ont qu'un seul point commun dans chaque position et ils ne peuvent point avoir de contact suivant aucun point de la courbe du troisième degré, mais seulement suivant les points de la génératrice d'intersection par rapport à laquelle on a fait les constructions.

Dans la pratique, on peut pour plus de facilité supposer que les courbes ξ et ξ' sont des spirales tracées sur les hyperboloïdes, réduire la surface Σ' à la courbe ξ' et supposer que la surface Σ est engendrée par une droite au lieu de l'être par la courbe γ.

Dès-lors la surface Σ sera un filet de vis hyperboloïdique, et l'on voit que les surfaces hyperboloïdes P_1 et Q_1 sont idéales, c'est-à-dire n'existent que par la pensée. Il n'existe de l'hyperboloïde P_1 que la spirale ξ qui fait partie de la surface Σ du filet de vis, et de l'hyperboloïde Q_1 que la spirale ξ'. On pourra construire autant de filets qu'on le voudra, mais pour que le mouvement de rotation puisse se continuer, il faudra que ces filets ou dents soient équidistants sur l'une et l'autre roue.

Ainsi, autant il y aura de spirales telles que ξ', ξ'_1, etc. qui couperont la génératrice des hyperboloïdes idéaux, autant il y aura de dents par lesquelles les roues seront en contact.

On doit remarquer que pour le point p situé sur la plus courte distance des axes P et Q, les deux hyperboloïdes sont tangents, et que les deux surfaces Σ et Σ' le seront aussi en ce même point; que par conséquent, pour ce point, le plan T sera vertical et parallèle aux

deux axes P et Q. (Les deux courbes ξ et ξ' étant supposées avoir pour point commun ce point p.)

Lorsque les deux surfaces Σ et Σ' par le mouvement de rotation seront en contact suivant un autre point m de la droite (oG, pg), alors le plan $T^{(m)}$ correspondant à ce point commun aux deux courbes ξ et ξ' coupera l'axe P et l'on prendra pour génératrice de la surface Σ, en supposant que Σ' se réduise à la courbe ξ', la droite qui passera par le point m commun aux deux courbes ξ et ξ' et par celui où le plan $T^{(m)}$ coupera l'axe P.

On voit donc que la surface Σ sera engendrée par une droite qui s'appuiera sur l'axe P et la courbe ξ et qui aura son mouvement régle par la condition qu'elle soit toujours contenue dans le plan passant par les deux tangentes aux courbes ξ et ξ' au point qui leur est commun. Cette génératrice pour le point p sera parallèle à l'axe P, et pour le point situé à l'infini sur la droite (oG, pg), elle sera horizontale.

On doit encore remarquer que la droite (oG, pg) n'est pas la seule qui satisfasse au problème; on peut encore, par le point p situé sur la plus courte distance, faire passer une droite (oG', pg) qui soit contenue dans un plan parallèle aux deux axes P et Q, et qui divise le supplément de l'angle α de ces axes en deux dont les sinus seront dans le rapport inverse de leurs vitesses.

On peut encore sur la plus courte distance prendre un point p' tel que $p'o : p'n :: v : V$, et par ce point faire passer deux droites respectivement parallèles aux droites (oG, pg), (oG', pg).

Ainsi, l'on peut satisfaire au problème par quatre systèmes différents formant ou deux engrenages intérieurs, ou deux extérieurs. Si l'on voulait résoudre le problème par l'analyse, on aurait un nombre infini de solutions. Car on trouverait que la surface qui jouit de la propriété d'avoir ses points distants des deux axes P et Q, dans un rapport constant, est une hyperboloïde à une nappe non de révolution et passant par les points p et p' de la plus courte distance; par conséquent l'on peut prendre pour la ligne D une courbe arbitraire tracée sur la surface hyperboloïdique que nous venons d'indiquer; mais je n'ai voulu donner ici que les lignes D qui pourraient être déduites par la Géométrie.

Dans un mémoire intitulé *Théorie générale des Engrenages à la*

With, je donnerai la solution analytique et complète de ce problème.

Dans les engrenages hyperboloïdiques dont je viens de donner la construction, l'on n'a point à craindre l'inconvénient que j'ai signalé dans les engrenages cylindriques ou coniques construits par With, savoir : que lorsque la génératrice de la surface héliçoïde de la dent était perpendiculaire à la ligne droite sur laquelle se mouvait le point de contact des dents, les roues pouvaient prendre deux positions différentes de contact, et trois positions de contact lorsque la génératrice de la surface était inclinée par rapport à la ligne des contacts des dents.

Cet inconvénient n'existe pas ici, parce que les plans tangents aux divers points où les surfaces des dents coupent la droite (oG, pg), lieu des contacts, ne sont point parallèles entre eux. En effet, supposons une surface courbe Σ et une courbe ξ', Σ et ξ ayant un point de contact. Nommons $t\xi'$ la tangente à la courbe ξ' au point m et T le plan tangent au point m à la surface Σ, ce plan T contiendra la droite $t\xi'$. Par le point m, élevons une droite N perpendiculaire au plan T. Si l'on fait tourner la courbe ξ' autour de N comme axe, on engendrera une surface de révolution S tangente à Σ au point m, et la courbe ξ' pourra prendre autour de N une infinité de positions dans lesquelles elle sera toujours tangente à la surface Σ.

Mais si par le point m on mène une droite N′ inclinée par rapport au plan T et telle que l'angle formé par N′ et $t\xi'$ soit l'angle de N′ avec le plan T, alors la courbe ξ' ne pourra plus tourner autour de N′ en restant tangente au point m à la surface Σ; dans toute autre position que celle qu'elle affecte primitivement, elle coupera la surface Σ. Si la ligne N′ ne fait point avec $t\xi'$ l'angle le plus petit ou le plus grand qui existe entre elle et le plan T dans la position qu'on lui a donnée, alors on pourra, par le point m, mener dans le plan T une droite t' qui fasse avec N′ un angle égal à celui que font entre eux la droite N′ et le plan T; et dès-lors, si l'on fait tourner la courbe ξ' autour de N′, il y aura un moment où la droite $t\xi'$ prendra une position t'', telle que l'angle $t'mt'' = tmt'$, et en cette position la courbe ξ' sera encore tangente à Σ; mais dans toute autre position ξ' coupera Σ.

Si donc nous désignons les deux axes par P et Q; si nous nom-

mons R la génératrice suivant laquelle les deux hyperboloïdes se coupent (désignant par HP l'hyperboloïde qui a pour axe P, et par HQ celui qui a pour axe Q); si nous supposons (fig. 10) que l'on ait trois dents sur HP coupant R aux points m', m'', m''', la surface de la première dent étant désignée par Σ', celle de la seconde par Σ'', et celle de la troisième par Σ''', l'on aura sur l'hyperboloïde HQ trois dents correspondant à celles situées sur HP. Ces dents seront terminées par trois courbes $\xi'_{,}$, $\xi''_{,}$, $\xi'''_{,}$, la première passant par le point m', la deuxième par m'' et la troisième par m'''; sur la surface Σ' existera une courbe ξ' correspondante de $\xi'_{,}$, et telle que ces deux courbes par le mouvement de rotation se conduiront par un contact angulaire, les points de contact étant successivement sur les divers points de la droite R et le premier contact étant en m'; de même sur Σ'' on aura la courbe ξ'' passant par le point m'', et sur Σ''' la courbe ξ''' passant par le point m'''.

La génératrice de la surface Σ' correspondant au point m sera une droite contenue dans le plan qui contient les deux tangentes à ξ' et $\xi'_{,}$ au point m' et passant par l'axe P. Nous nommerons t' la tangente à ξ', $t'_{,}$ la tangente à $\xi'_{,}$, et g' la génératrice. Nous aurons de même au point m'', les tangentes t'', $t''_{,}$ et la génératrice g'' de la surface Σ''; nous aurons de même au point m''' les trois droites t''', $t'''_{,}$ et g'''.

Les droites g', g'', g''' ne feront point avec l'axe P le même angle, d'après ce que nous avons dit, le point m' étant le plus près de celui qui est situé sur la plus courte distance des axes P et Q, il arrivera que l'angle δ' formé par P et g' sera plus petit que l'angle δ'' formé par P et g'', et plus petit que δ''' formé par P et g'''.

Par conséquent, les trois points m', m'', m''', en tant qu'appartenant à la surface HQ, ne pourront se placer que sur les points m', m'', m des droites g', g'', h'''. Aucuns autres points n', n'', n''', en ligne droite et situés respectivement sur les génératrices g', g'', g''', ne pourront se mettre en contact avec eux; par conséquent la position respective des deux hyperboloïdes HP et HQ est déterminée d'une manière invariable. Les roues de l'engrenage ne pourront donc prendre une autre position que celle qui leur est assignée par la construction.

La génération de la surface Σ qui doit terminer la dent de la roue HP pourrait présenter des difficultés dans l'exécution pratique; je

proposerai donc de construire les dents de l'engrenage de la manière suivante :

Étant donnés deux axes P et Q et une droite R telle que tous ses points soient distants des deux axes dans un rapport constant et inverse de celui de leurs vitesses respectives, l'on obtiendra, ainsi que nous l'avons dit plus haut, en faisant tourner la droite R autour de P pour surface de révolution, un hyperboloïde à une nappe HP; de même en faisant tourner R autour de Q, on aura la surface HQ. Ces deux surfaces se couperont suivant la droite R passant par un point de la plus courte distance qui existe entre P et Q, et une courbe du troisième degré γ qui passera aussi par le point où R coupe la plus courte distance. Cela posé : Si l'on divise la droite R en $(n-1)$ parties égales entre elles, par les points m', m'', $m'''\ldots m^{(n)}$, et que par chacun de ces points on mène des plans perpendiculaires à l'axe P, l'on aura pour intersections dans la surface HP des cercles. Désignant l'un de ces cercles par C; si par l'axe P l'on mène une suite de plans méridiens au nombre de $(n-1)$, ils diviseront le cercle C en $(n-1)$ arcs égaux, ainsi que tous les cercles parallèles à celui-ci, et la courbe qui passera par le premier point situé sur le cercle Cm', par le deuxième point situé sur Cm'', par le troisième point situé sur Cm''' et enfin par le dernier point $m^{(n)}$ ou le $(n-1)^{e}$ situé sur le cercle $Cm^{(n)}$, sera une spirale hyperboloïdique dont le pas sera mesuré sur R par la distance comprise entre les points m' et $m^{(n)}$.

Nous nommerons H ce pas et ξ la courbe spirale. On voit évidemment que cette courbe peut être tracée mécaniquement par un mouvement continu. Si l'on divise de même un cercle C′ appartenant à la surface HQ, par une suite de plans méridiens passant par l'axe Q en un certain nombre de parties égales entre elles, ce nombre étant représenté par $(n'-1)$ et tel que le rapport entre $(n-1)$ et $(n'-1)$ soit celui qui existe entre les distances respectives d'un des points de la droite R aux deux axes P et Q, on construira une spirale $\xi_{,}$ qui sera la correspondante de ξ; son pas h mesuré sur R sera tel que $\frac{H}{h} = \frac{n-1}{n'-1}$, et ces deux courbes ξ et $\xi_{,}$ se conduiront par un frottement de roulement *angulaire*.

Maintenant, par chacun des points de ξ, l'on fera passer des droites

perpendiculaires à l'axe P et qui formeront une surface spirale hyperboloïdique; cette surface sera nommée Σ. De même par ξ_1 on fera passer des droites perpendiculaires à l'axe Q et formant aussi une surface spirale hyperboloïdique Σ'. Ces deux surfaces pendant le mouvement de rotation ne seront en contact que par des points situés respectivement sur les courbes ξ et ξ_1. On ne prolongera les surfaces Σ et Σ', du côté des axes P et Q, et respectivement qu'autant qu'il sera nécessaire pour que la courbe ξ_1 puisse passer, puisqu'elle pénètre dans l'intérieur de la surface HP, et pour que la courbe ξ puisse aussi passer, puisqu'elle pénètre aussi elle-même dans l'intérieur de la surface HQ. De sorte qu'il y aura un noyau fixé à l'axe P et à la surface duquel la surface Σ s'arrêtera; de même aussi la surface Σ' s'arrêtera à la surface d'un noyau fixé à l'axe Q et assez rapproché de cet axe pour permettre un libre mouvement à la courbe ξ.

Ensuite l'on donnera à la dent une épaisseur suffisante (comme à un filet de vis). On n'aura pas besoin de lui donner un excès de longueur : on pourra la terminer à l'hyperboloïde HP ou HQ, parce que les deux courbes ξ et ξ_1 n'ayant point leur plan tangent commun en chacun de leurs points de contact successifs (excepté pour celui situé sur la plus courte distance), parallèle aux deux axes P et Q, les dents ne pourront s'échapper pendant le mouvement de rotation.

Cette construction pourra s'exécuter facilement sur le tour, et par conséquent l'on peut, je crois, regarder le problème qui fait le sujet de ce Mémoire, comme résolu, soit en théorie, soit en pratique.

Il faut cependant démontrer que la surface Σ dans quelque position que ce soit ne rencontrera la courbe ξ_1 qu'au seul point de contact angulaire existant entre les deux courbes ξ et ξ_1.

Soient P et Q (fig. 11) les deux axes donnés. Soit R la génératrice commune aux deux hyperboloïdes HP et HQ, et en même temps la droite des contacts angulaires successifs des dents de l'engrenage. Soit γ la courbe du troisième degré, seconde ligne d'intersection des deux surfaces HP et HQ. Soit ab la plus courte distance entre les axes, le point d étant situé sur cette plus courte distance, de telle manière que ad et db soient dans le rapport inverse des vitesses des axes; la droite R et la courbe γ passeront par le point d.

Il est évident que si par un point m pris arbitrairement sur la

droite R je fais passer deux plans respectivement perpendiculaires aux axes P et Q, l'un coupera HP suivant un cercle C, l'autre HQ suivant un cercle C′, tels que le premier coupera la courbe γ en un point m'' et le deuxième en un point m', et que ces deux points seront toujours dans la même position relative, savoir : que m' sera toujours au-dessous de m'', et qu'ainsi, si la droite $m'''mm''$ représente l'intersection des plans des deux cercles, la partie mm' du cercle C′ sera toujours en-dessous du plan du cercle C et que la partie mm''' sera toujours au-dessus de ce même plan.

Les deux cercles C et C′ sont des courbes correspondantes, c'est-à-dire qu'elles se roulent angulairement, le point de contact se plaçant toujours au point m : pour deux courbes correspondantes, telles que ξ et ξ_1; on aura les mêmes résultats, seulement le point de contact variera de position sur la droite R.

Ainsi (fig. 12) les deux courbes correspondantes ξ et ξ_1 étant en contact angulaire au point m situé sur R, si je prends sur ξ un point m'' qui soit le correspondant du point m''' situé sur ξ_1, ces deux points seront tels que les cercles C et C′ passant l'un par m'', et son plan étant perpendiculaire à P, l'autre par m''', et son plan étant perpendiculaire à Q, se couperont en un point m' situé sur R. Il est évident que toute la portion mm''' de ξ_1 sera au-dessous du plan C, et que tous les points de l'arc mm''' seront au-dessus de la surface spirale hyperboloïdique formée par les droites perpendiculaires à P et s'appuyant sur ξ; qu'il en sera de même par rapport à la surface spirale ayant Q et ξ_1 pour directrices, c'est-à-dire que la partie mm'' de ξ sera au-dessus d'elle.

Ainsi les deux surfaces spirales hyperboloïdiques n'auront jamais, dans quelque position que ce soit, qu'un seul point commun, qui sera celui en lequel les courbes ξ et ξ_1 ont leur contact angulaire.

Les deux roues dentées étant supposées mises en place, il arrivera, en vertu de la forme géométrique que nous avons donnée aux dents, que la roue qui a pour axe P restant fixe dans sa position, celle qui a pour axe Q, pourra prendre un mouvement de rotation autour de R comme charnière, l'axe Q décrivant un hyperboloïde à une nappe et de révolution autour de R, et que par conséquent les deux roues pour-

ront donner des systèmes différents dans lesquels les axes P et Q comprendront des angles variables ; et comme la ligne R dans chaque système sera la ligne des contacts et que ses distances aux axes P et Q n'auront point changé, il s'ensuivra que le rapport des vitesses sera toujours le même, et que le frottement sera de même nature, c'est-à-dire, de *roulement angulaire*.

Cependant l'axe Q ne pourra pas prendre une infinité de positions par rapport à P et R restés invariables, ces positions auront des limites déterminées par la considération suivante, savoir : que l'axe Q dans son mouvement de rotation autour de R, entraîne la courbe ξ_1, et que lorsque cette courbe rencontrera la surface hélicoïde Σ qui a pour directrice ξ, l'axe Q ne pourra dépasser la position qu'il affectera alors. Que de même lorsque ξ touchera la surface hélicoïde Σ' ayant ξ_1 pour directrice, l'axe Q ne pourra plus continuer à se mouvoir autour de R, mais entre ces deux positions extrêmes Q pourra prendre toutes les positions intermédiaires. On voit aussi que pour ces diverses positions intermédiaires de Q, la droite R ne passe plus par un point de la plus courte distance des deux axes. Cette considération du mouvement de Q autour de la droite R, qui permet de prendre une infinité de positions sans que les propriétés du système résultant soient changées, excepté l'angle des deux axes, nous démontre que la surface qui doit jouir de la propriété d'avoir ses points distants des deux axes, dans un rapport constant, est nécessairement engendrée par une ligne droite. J'ai dit ci-dessus que l'on savait par l'analyse que cette surface était un hyperboloïde à une nappe et non de révolution.

Dans le système que nous venons de construire, la droite R, en tant qu'appartenant à la surface HQ, ne pourra se placer sur aucune des génératrices du paraboloïde hyperbolique engendré par des droites perpendiculaires à P et s'appuyant sur P et R, la droite R étant une génératrice de cette surface paraboloïde et supposée appartenir aussi à la surface PH ; parce que comme les dents doivent être équidistantes, les génératrices perpendiculaires à P couperont bien toutes les génératrices du deuxième système du paraboloïde en parties égales entre elles, mais non égales à celles qui existent sur la directrice R. Ainsi l'engrenage ne pourra se mettre en contact que

par des points situés sur la droite idéale R dont tous les points sont distants des axes P et Q dans le rapport inverse des vitesses de ces axes, le frottement dès-lors sera de roulement *angulaire*, on ne pourra mettre les roues dentées en présence de manière à avoir un frottement de glissement *angulaire ;* la pose sera donc facile.

La construction géométrique exposée dans ce Mémoire a été trouvée en 1818, à l'École d'Application de Metz ; à cette époque j'avais à faire, comme travail d'étude, un projet de machines ; je donnai alors les dessins d'une machine propre à tailler les dents de l'engrenage précédent. On peut lire à ce sujet une note de M. Hachette, imprimée dans la deuxième édition de son *Traité des Machines*, à la fin du chapitre *sur les Engrenages*.

Note sur l'évaluation approchée du produit $1.2.3\ldots x$;

PAR J. LIOUVILLE *).

1. La méthode dont je me servirai ressemble beaucoup à celle employée par M. Lacroix, dans son *Traité élémentaire du Calcul différentiel et du Calcul intégral* (page 678 de la 5e édition). Cette méthode consiste à chercher le logarithme du produit $1.2.3\ldots x$, et elle repose sur la formule connue de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2x}{2x-1}\cdot\frac{2x}{2x+1}\cdots\cdots$$

en vertu de laquelle la quantité

$$\begin{aligned} &2\log 2 + 2\log 4 + \ldots\ldots + 2\log(2x-2) + \log(2x) \\ &- 2\log 1 - 2\log 3 - \ldots\ldots - 2\log(2x-3) - 2\log(2x-1) \end{aligned}$$

se réduit à $\log\pi - \log 2$ lorsque $x = \infty$. Mais je la compléterai en donnant une limite supérieure de l'erreur commise dans l'évaluation approchée de $\log(1.2.3\ldots x)$.

2. Pour toute valeur positive de z, on a

$$\frac{1}{z} = \int_0^\infty e^{-\alpha z}\,d\alpha.$$

d'où il résulte, en intégrant par rapport à z,

$$(1)\qquad \log z = \int_0^\infty \frac{(e^{-\alpha} - e^{-\alpha z})\,d\alpha}{\alpha}.$$

(*) M. Binet a traité la même question par une méthode différente dont il a bien voulu me communiquer, il y a déjà long-temps, les résultats. Un extrait de son Mémoire a été publié dans un des derniers *Comptes rendus*.

Faisant successivement, dans cette formule, $z=1$, $z=2$,.... $z=x$, puis ajoutant les résultats ainsi obtenus, il nous viendra

$$(2) \qquad \log(1.2.3\ldots x) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha}d\alpha}{\alpha}\left(x - \frac{1-e^{-\alpha x}}{1-e^{-\alpha}}\right).$$

Ainsi la question est ramenée à trouver la valeur de l'intégrale définie placée dans le second membre de l'équation (2). Représentons cette intégrale par u et traitons x comme une variable continue. En différenciant nous obtiendrons

$$\frac{du}{dx} = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha}\left(e^{-\alpha} - \frac{\alpha e^{-\alpha x}}{e^\alpha - 1}\right).$$

3. La fonction $\frac{\alpha}{e^\alpha - 1}$ qui sert de coefficient à $e^{-\alpha x}$ et que nous désignerons par $f(\alpha)$ peut se développer en une série ordonnée suivant les puissances de α. En différenciant plusieurs fois de suite l'équation

$$(e^\alpha - 1)f(\alpha) = \alpha,$$

on a

$$(e^\alpha - 1)f'(\alpha) + e^\alpha f(\alpha) = 1,$$
$$(e^\alpha - 1)f''(\alpha) + 2e^\alpha f'(\alpha) + e^\alpha f(\alpha) = 0,$$
$$(e^\alpha - 1)f'''(\alpha) + 3e^\alpha f''(\alpha) + 3e^\alpha f'(\alpha) + e^\alpha f(\alpha) = 0, \text{etc.};$$

de sorte qu'en posant $\alpha = 0$ on trouve sans difficulté

$$f(0) = 1,\ f'(0) = -\frac{1}{2},\ f''(0) = \frac{1}{6}.\ldots\ldots$$

Les deux premiers termes du développement de $f(\alpha)$ sont donc $1 - \frac{\alpha}{2}$; et les autres ne peuvent contenir que des puissances paires de α, car la différence $f(\alpha) - 1 + \frac{\alpha}{2}$ est égale à la moitié de

$$\frac{\alpha\left(e^{\frac{\alpha}{2}} + e^{-\frac{\alpha}{2}}\right)}{e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}} - 2,$$

et par conséquent est une fonction paire de α.

Les valeurs générales de $f''(\alpha)$ et de $f'''(\alpha)$ sont

$$f''(\alpha) = \frac{e^{\alpha}}{(e^{\alpha}-1)^3}[(\alpha-2)e^{\alpha}+\alpha+2],$$

$$f'''(\alpha) = -\frac{e^{\alpha}}{(e^{\alpha}-1)^4}[(\alpha-3)e^{2\alpha}+4\alpha e^{\alpha}+\alpha+3].$$

En se rappelant que la variable α est >0, on peut prouver que la première de ces deux dérivées est essentiellement positive et la seconde essentiellement négative.

D'abord en posant

$$P = (\alpha-2)e^{\alpha}+\alpha+2,$$

on a

$$\frac{dP}{d\alpha} = (\alpha-1)e^{\alpha}+1, \quad \frac{d^2P}{d\alpha^2} = \alpha e^{\alpha}.$$

Pour toute valeur de $\alpha > 0$, on a $\frac{d^2P}{d\alpha^2} > 0$: on a aussi $\frac{dP}{d\alpha} > 0$ et $P > 0$, puisque $\frac{dP}{d\alpha}$ et P s'annulent pour $\alpha = 0$ et prennent ensuite le signe de leur dérivée. Il suit évidemment de là que $f''(\alpha)$ est une quantité positive.

Posons maintenant

$$P = (\alpha-3)e^{3\alpha}+4\alpha e^{\alpha}+\alpha+3,$$

ce qui donne

$$\frac{dP}{d\alpha} = (2\alpha-5)e^{2\alpha}+(4\alpha+4)e^{\alpha}+1,$$

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2} = (4\alpha-8)e^{2\alpha}+(4\alpha+8)e^{\alpha};$$

en faisant

$$Q = (\alpha-2)e^{\alpha}+\alpha+2,$$

nous aurons

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2} = 4e^{\alpha}Q,$$

de manière que les deux fonctions Q et $\frac{d^2P}{d\alpha^2}$ seront de même signe.

Or, Q et $\frac{dQ}{d\alpha}$ sont zéro pour $\alpha = 0$; de plus $\frac{d^2Q}{d\alpha^2}$ est > 0 dès que α surpasse zéro : donc il en est de même de Q et de $\frac{d^2P}{d\alpha^2}$; par suite la fonction P jouit aussi de la même propriété puisque l'on a $P = 0$ et $\frac{dP}{d\alpha} = 0$ quand $\alpha = 0$; il suit évidemment de là que $f'''(\alpha)$ est une quantité négative.

On voit d'après cela que $f''(\alpha)$ est une fonction décroissante de α, dont la plus grande valeur est égale à $f''(0)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{6}$.

4. Après cette digression, revenons au développement de $f(\alpha)$. D'après une formule connue, nous pourrons écrire

$$\frac{\alpha}{e^\alpha - 1} = 1 - \frac{\alpha}{2} + R,$$

R représentant, suivant que l'on voudra pousser le développement plus ou moins loin, ou la quantité

$$\frac{\alpha^2}{1.2} f''(\theta\alpha),$$

ou la quantité

$$\frac{\alpha f'(0)}{2} + \ldots + \frac{\alpha^{2n} f^{2n}(0)}{1.2\ldots 2n} + \frac{\alpha^{2n+2} f^{2n+2}(\theta\alpha)}{1.2\ldots(2n+2)};$$

c'est ce que l'on comprendra en se rappelant que R est une fonction paire de α: à peine est-il nécessaire d'avertir que θ représente d'une manière générale un certain nombre compris entre 0 et 1. Cette valeur de $f(\alpha)$, substituée dans celle de $\frac{du}{dx}$, fournit

$$\frac{du}{dx} = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha}\left(e^{-\alpha} - e^{-\alpha x} + \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha x} - Re^{-\alpha x}\right)$$

c'est-à-dire en vertu de la formule (1),

$$\frac{du}{dx} = \log x + \frac{1}{2x} - \int_0^\infty \frac{Re^{-\alpha x} d\alpha}{\alpha}.$$

Par conséquent

$$u = C + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log x - x + \int_0^\infty \frac{Re^{-\alpha x}\,d\alpha}{\alpha^2}.$$

Cette valeur de u est en même temps celle de $\log(1.2.3\ldots x)$. Nous prouverons plus tard que la constante C est égale à $\log(\sqrt{2\pi})$.

5. On trouve aisément les limites de l'erreur que l'on commettrait en négligeant dans le second membre le terme

$$\int_0^\infty \frac{Re^{-\alpha x}\,d\alpha}{\alpha^2}.$$

A cause de

$$R = \frac{\alpha^2 f''(\theta\alpha)}{2},$$

ce terme devient

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha x}.\, f''(\theta\alpha)\,d\alpha.$$

Il est donc essentiellement positif comme la fonction $f''(\theta\alpha)$. De plus il est moindre que

$$\frac{1}{12}\int_0^\infty e^{-\alpha x}d\alpha \quad \text{ou} \quad \frac{1}{12x},$$

puisque l'on a $f''(\theta\alpha) < \frac{1}{6}$.

Cette discussion nous montre qu'en désignant par μ un certain nombre compris entre 0 et 1, on peut poser

$$\log(1.2.3\ldots x) = C + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{\mu}{12x}.$$

6. Si l'on prend

$$R = \frac{\alpha^2 f''(0)}{1.2} + \ldots + \frac{\alpha^{2n} f^{2n}(0)}{1.2\ldots 2n} + \frac{\alpha^{2n+2} f^{2n+2}(\theta\alpha)}{1.2\ldots(2n+2)},$$

le terme

$$\int_0^\infty \frac{Re^{-\alpha x}\,d\alpha}{\alpha^2}$$

se présentera sous une autre forme; il deviendra

$$\frac{f''(0)}{2x} + \ldots + \frac{f^{2n}(0)}{2n(2n-1).x^{2n-1}} + \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}.\alpha^{2n} f^{2n+2}(\theta\alpha)\,d\alpha}{1.2\ldots(2n+2)},$$

et si l'on veut avoir une limite supérieure de la valeur absolue de l'intégrale dont il dépend, il suffira de remplacer $f^{2n+2}(\theta\alpha)$ par le maximum absolu M de $f^{2n+2}(\alpha)$, ce qui permettra d'effectuer l'intégration.

7. Pour déterminer la constante C, mettons l'équation

$$\log(1.2.3\ldots x) = C + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{\mu}{12x}$$

sous la forme

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 + \ldots + \log x = C + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log x - x + \text{etc.}.$$

le signe etc. désignant un terme qui s'annule quand $x = \infty$.

Nous en tirerons facilement

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 + \ldots + \log 2x = C + \left(2x + \frac{1}{2}\right)\log 2x - 2x + \text{etc.}$$

A cause de

$$\log 2 + \log 4 + \ldots + \log 2x = x\log 2 + \log 1 + \log 2 + \ldots + \log x,$$

nous aurons aussi

$$\log 2 + \log 4 + \log 6 + \ldots + \log 2x = C + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log x + x\log 2 - x + \text{etc.}$$

Retranchant cette équation de celle qui donne la somme des logarithmes des nombres naturels depuis 1 jusqu'à $2x$, on obtient

$$\log 1 + \log 3 + \log 5 + \ldots + \log(2x-1) = x\log x + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log 2 - x + \text{etc.}$$

Retranchant à son tour le double de cette nouvelle équation du double de la précédente, il vient enfin

$$\left.\begin{array}{l} 2\log 2 + 2\log 4 + 2\log 6 + \ldots + 2\log(2x-2) + \log 2x \\ -2\log 1 - 2\log 3 - 2\log 5 - \ldots - 2\log(2x-3) - 2\log(2x-1) \end{array}\right\} = 2C - 2\log 2 + \text{etc.},$$

de sorte qu'à l'aide de la formule de Wallis, citée plus haut, on trouve en faisant x infini,

$$\log\pi - \log 2 = 2C - 2\log 2.$$

et par suite

$$C = \frac{1}{2}(\log\pi + \log 2) = \log\left(\sqrt{2\pi}\right).$$

MÉMOIRE

Sur la Réduction d'une classe d'Intégrales multiples;

PAR E. CATALAN,

Répétiteur à l'École Polytechnique.

Dans ses *Exercices de Calcul intégral*, Legendre détermine l'aire de l'ellipsoïde à trois axes, d'abord par le développement en série, et ensuite par la considération des lignes de courbure de la surface (*). En essayant de reprendre la même question sous un autre point de vue, j'ai rencontré une méthode de réduction pour une certaine classe d'intégrales multiples : l'exposition de cette méthode, et son application à quelques exemples, sont l'objet de ce Mémoire. Mais, afin de bien indiquer la marche que mes idées ont suivie, je traiterai en premier lieu la question de l'ellipsoïde.

I.

Soit

$$\left(\frac{x'}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{z'}{\gamma}\right)^2 = 1,$$

l'équation de la surface de l'ellipsoïde. L'élément de cette surface a pour expression

$$dx'dy' \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

p et q désignant à l'ordinaire les coefficients différentiels partiels $\frac{dz'}{dx'}$,

(*) M. *Plana* a aussi traité ce sujet (*Journal de Crelle*, 1837, page 345); mais nos deux méthodes n'ont aucun point commun.

$\frac{dz'}{dy'}$; savoir, $p = -\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 \frac{x'}{z'}$, $q = -\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2 \frac{y'}{z'}$. En substituant ces valeurs dans l'équation précédente, et désignant par A′ la huitième partie de l'aire de l'ellipsoïde, il vient

$$A' = \iint dx'dy' \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{x'}{\alpha}\right)^2\left(1 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right) - \left(\frac{y'}{\beta}\right)^2\left(1 - \frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)}{1 - \left(\frac{x'}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{y'}{\beta}\right)^2}}.$$

L'intégrale doit s'étendre à toutes les valeurs positives de x et de y satisfaisant à la condition

$$\left(\frac{x'}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\beta}\right)^2 \leqq 1.$$

Pour simplifier, je fais

$$\frac{x'}{\alpha} = x, \quad \frac{y'}{\beta} = y, \quad 1 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = a^2, \quad 1 - \frac{\gamma^2}{\beta^2} = b^2 :$$

comme on peut supposer $\alpha > \beta > \gamma$, a^2 et b^2 seront des constantes positives, moindres que l'unité, a^2 étant la plus grande. L'intégrale qu'il s'agit de déterminer est alors, en faisant $A' = \alpha\beta A$,

$$A = \iint dxdy \sqrt{\frac{1 - a^2x^2 - b^2y^2}{1 - x^2 - y^2}}; \qquad (1)$$

et cette intégrale doit être étendue à toutes les valeurs positives de x et de y qui vérifieront la relation

$$x^2 + y^2 \leqq 1. \qquad (2)$$

Si nous désignons par z la valeur positive du radical placé sous le signe $\int$, l'intégrale A devient $\int z dxdy$: elle peut être considérée comme exprimant le volume d'une portion du cylindre dont l'équation est $x^2 + y^2 = 1$, portion comprise entre les parties positives des plans coordonnés, et la surface représentée par

$$z^2 = \frac{1 - a^2x^2 - b^2y^2}{1 - x^2 - y^2}. \qquad (3)$$

Or, si après avoir mis cette équation sous la forme

$$(z^2 - a^2)x^2 + (z^2 - b^2)y^2 = z^2 - 1, \qquad (4)$$

nous y regardons z comme un paramètre variable, nous conclurons que tout plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, et situé à une distance plus grande que 1 de l'origine, coupe la surface suivant une ellipse qui a pour projection sur le plan des xy, une ellipse égale, représentée par l'équation (4). Pour $z = 1$, cette projection est l'origine des coordonnées; et si, à partir de cette limite inférieure, on fait croître z indéfiniment, on obtient une série d'ellipses concentriques, ayant leurs axes dirigés suivant ceux des x et des y, et dont la limite, répondant à z infini, est le cercle représenté par $x^2 + y^2 = 1$.

D'après cela, nous prendrons pour élément du volume dont il s'agit, le cylindre ayant pour hauteur z, et dont la base serait la *couronne* comprise entre les deux ellipses déterminées par l'équation (4), quand on attribue au paramètre deux valeurs consécutives, z et $z + dz$.

Représentant par X et Y les demi-axes de la première ellipse, la couronne elliptique aura pour mesure $\pi d.\mathrm{XY}$; et comme nous ne devons prendre que le quart du cylindre correspondant, nous aurons, au lieu de l'intégrale (1),

$$\mathrm{A} = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty z d.\mathrm{XY}. \qquad (5)$$

L'équation (4) donne

$$\mathrm{X} = \sqrt{\frac{z^2 - 1}{z^2 - a^2}}, \quad \mathrm{Y} = \sqrt{\frac{z^2 - 1}{z^2 - b^2}},$$

$$d\mathrm{X} = (1 - a^2)\frac{zdz}{(z^2 - a^2)\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - 1)}}, \quad d\mathrm{Y} = (1 - b^2)\frac{zdz}{(z^2 - b^2)\sqrt{(z^2 - b^2)(z^2 - 1)}},$$

$$d.\mathrm{XY} = \mathrm{X}d\mathrm{Y} + \mathrm{Y}d\mathrm{X} = \left(\frac{1 - a^2}{z^2 - a^2} + \frac{1 - b^2}{z^2 - b^2}\right)\frac{zdz}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}};$$

ce qui change la formule (5) en celle-ci,

$$\mathrm{A} = \frac{\pi}{4}\left[(1 - a^2)\int_1^\infty \frac{zdz}{(z^2 - a^2)\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} + (1 - b^2)\int_1^\infty \frac{zdz}{(z^2 - b^2)\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}}\right]. \qquad (6)$$

que l'on peut écrire sous la forme abrégée :

$$A = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1-a^2}{a}\cdot\frac{d.}{da} + \frac{1-b^2}{b}\frac{d.}{db}\right)\int_1^\infty \frac{z^2dz}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}}, \qquad (7)$$

en observant que

$$\frac{d.}{da}\frac{z^2dz}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}} = \frac{az^2}{(z^2-a^2)\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}}.$$

L'intégrale double (1) se trouvant ramenée ainsi à une ou à deux intégrales simples, la question principale est résolue : je vais actuellement, pour la compléter, transformer les intégrales contenues dans (6), de manière à exprimer A en fonctions elliptiques ordinaires.

On a

$$0 < b < a < 1 < z :$$

on peut donc supposer

$$z^2 - a^2 = (z^2 - b^2)\sin^2\varphi.$$

Ce changement de variable donne, en posant $b = ca$,

$$z = \frac{a^2(1-c^2\sin^2\varphi)}{\cos^2\varphi}, \quad zdz = \frac{a^2(1-c^2)\sin\varphi d\varphi}{\cos^3\varphi}, \quad z^2dz = \frac{a^2(1-c^2)\sin\varphi d\varphi}{\cos^4\varphi}\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi},$$

$$z^2-a^2 = a^2(1-c^2)\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}, \quad z^2-b^2 = a^2(1-c^2)\frac{1}{\cos^2\varphi}, \quad \sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)} = a^2(1-c^2)\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi},$$

$$\frac{z^2dz}{(z^2-a^2)\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}} = \frac{1}{a(1-c^2)}\,d\varphi\,\frac{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi},$$

$$\frac{z^2dz}{(z^2-b^2)\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}} = \frac{1}{a(1-c^2)}\,d\varphi\,\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}.$$

L'équation (6) devient, au moyen de ces valeurs,

$$A = \frac{\pi}{4a(1-c^2)}\left[(1-a^2)\int_\lambda^\pi \frac{d\varphi\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi} + (1-b^2)\int_\lambda^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}\right]: \qquad (8)$$

$$\lambda = \arcsin\sqrt{\frac{1-a^2}{1-b^2}}.$$

Les intégrales elliptiques qui entrent dans cette expression sont prises à partir de la valeur λ de l'amplitude : afin qu'elles s'évanouissent, ainsi qu'on le suppose ordinairement, pour $\varphi = 0$, je fais

$$\tang \varphi = \frac{1}{\sqrt{1-c^2 \tang \theta}};$$

ce qui donne, en représentant par Δ le radical $\sqrt{1-c^2 \sin^2 \theta}$:

$$\sin^2 \varphi = \frac{\cos^2 \theta}{\Delta^2}, \quad \cos^2 \varphi = (1-c^2)\frac{\sin^2 \theta}{\Delta^2}, \quad 1-c^2 \sin^2 \varphi = (1-c^2)\frac{1}{\Delta^2},$$

$$\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = -\frac{1}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \theta}}\frac{d\theta}{\Delta},$$

$$d\varphi = -\sqrt{1-c^2}\frac{d\theta}{\Delta^2}, \quad d\varphi\sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi} = -(1-c^2)\frac{d\theta}{\Delta^3},$$

$$\frac{d\varphi\sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi}}{\sin^2 \varphi} = -(1-c^2)\frac{d\theta}{\Delta \cos^2 \theta}.$$

La limite supérieure μ des nouvelles intégrales est déterminée par l'équation

$$\frac{1-a^2}{1-a^2c^2} = \frac{1}{1+(1-c^2)\tang^2 \mu};$$

laquelle donne

$$\tang \mu = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}, \quad \sin \mu = a, \quad \cos \mu = \sqrt{1-a^2}.$$

La substitution des valeurs précédentes dans la formule (8), donne

$$A = \frac{\pi}{4a}\left[(1-a^2)\int_0^\mu \frac{d\theta}{\Delta \cos^2 \theta} + (1-a^2c^2)\int_0^\mu \frac{d\theta}{\Delta^3}\right]. \qquad (9)$$

Or, on a (*)

$$\int_0^\mu \frac{d\theta}{\Delta \cos^2 \theta} = \frac{1}{1-c^2}\left[\sqrt{1-c^2 \sin^2 \mu}\,\tang \mu + (1-c^2)F(c, \mu) - E(c, \mu)\right],$$

$$\int_0^\mu \frac{d\theta}{\Delta^3} = \frac{1}{1-c^2}\left[E(c, \mu) - c^2 \frac{\sin \mu \cos \mu}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \mu}}\right];$$

(*) *Exercices de Calcul intégral*, 1811, tome I, page 199.

en posant, à l'ordinaire,

$$F(c, \mu) = \int_0^\mu \frac{d\theta}{\Delta}, \quad E(c, \mu) = \int_0^\mu \Delta . d\theta.$$

Au moyen de ces valeurs, et de celles de $\tang \mu$, $\sin \mu$, $\cos \mu$, la valeur de l'intégrale se change en

$$A = \frac{\pi}{4a}\left[a^2 E(c, \mu) + (1 - a^2) F(c, \mu) + a\sqrt{1 - a^2}\sqrt{1 - a^2 c^2}\right]. \quad (10)$$

Par suite, l'aire de l'ellipsoïde deviendra

$$8A' = 2\pi\gamma^2 + \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}}\left[(\alpha^2 - \gamma^2) E(c, \mu) + \gamma^2 F(c, \mu)\right]. \quad (11)$$

Cette formule ne diffère que par la notation de celle qui se trouve à la page 191 du tome premier des *Exercices*. Pour l'appliquer, on doit se rappeler que

$$c^2 = \frac{\alpha^2(\beta^2 - \gamma^2)}{\beta^2(\alpha^2 - \gamma^2)}, \quad \cos \mu = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

II.

En second lieu, soit l'intégrale

$$A = \iiint dx dy dz \sqrt{\frac{1 - a^2x^2 - b^2y^2 - c^2z^2}{1 - x^2 - y^2 - z^2}}, \quad (12)$$

dans laquelle a, b, c sont des constantes positives, moindres que l'unité. Cette intégrale doit être étendue à toutes les valeurs positives de x, y, z, propres à satisfaire à la condition

$$x^2 + y^2 + z^2 \overset{=}{<} 1. \quad (13)$$

En regardant x, y, z comme les coordonnées d'un même point matériel, rapporté à trois axes rectangulaires, cette relation (13) représentera l'ensemble de tous les points matériels contenus dans

une sphère ayant son centre à l'origine, et ayant pour rayon, l'unité.

De plus, si l'on fait

$$v^2 = \frac{1 - a^2x^2 - b^2y^2 - c^2z^2}{1 - x^2 - y^2 - z^2}, \qquad (14)$$

on pourra supposer que v représente une vitesse dont serait animée la molécule ayant pour coordonnées x, y, z, et pour volume, $dxdydz$. Prenant alors la densité de la sphère pour unité, le produit $vdxdydz$ exprimera une quantité de mouvement, et l'intégrale (12) ne sera autre chose que la somme des quantités de mouvement de tous les points matériels composant la sphère.

Pour évaluer cette somme, j'observe que les valeurs de x, y, z qui répondent à une valeur donnée de v, devant satisfaire à l'équation

$$(v^2 - a^2)x^2 + (v^2 - b^2)y^2 + (v^2 - c^2)z^2 = v^2 - 1, \qquad (15)$$

il résulte de cette dépendance, que tous les points qui ont même vitesse, sont situés à la surface d'un ellipsoïde à trois axes, représentée par cette équation. En considérant alors la portion de la masse sphérique comprise entre les deux surfaces ellipsoïdales qui répondent à deux vitesses consécutives v et $v + dv$, la somme des quantités de mouvement de toutes les molécules composant cette couche, sera égale au volume de la couche, multiplié par v.

Par suite, si nous désignons par X, Y, Z les demi-axes de l'ellipsoïde (15), l'intégrale (12) deviendra, à cause que nous ne devons prendre que le huitième de la couche,

$$A = \frac{\pi}{6}\int_0^\infty v d.XYZ. \qquad (16)$$

L'équation (15) donne

$$X = \sqrt{\frac{v^2 - 1}{v^2 - a^2}}, \qquad Y = \sqrt{\frac{v^2 - 1}{v^2 - b^2}}, \qquad Z = \sqrt{\frac{v^2 - 1}{v^2 - c^2}},$$

$$dZ = \frac{(1 - c^2)\, v dv}{(v^2 - c^2)\sqrt{(v^2 - 1)(v^2 - c^2)}}, \qquad XYdZ = \frac{(1 - c^2)\, v dv \sqrt{v^2 - 1}}{(v^2 - c^2)\sqrt{(v^2 - a^2)(v^2 - b^2)(v^2 - c^2)}},$$

$$d.XYZ = \frac{v dv \sqrt{v^2 - 1}}{\sqrt{(v^2 - a^2)(v^2 - b^2)(v^2 - c^2)}}\left(\frac{1 - a^2}{v^2 - a^2} + \frac{1 - b^2}{v^2 - b^2} + \frac{1 - c^2}{v^2 - c^2}\right).$$

Cette dernière valeur conduit à

$$A = \frac{1}{6}\pi\left[(1-a^2)\int_1^\infty \frac{v^2 dv\sqrt{v^2-1}}{(v^2-a^2)\sqrt{(v^2-a^2)(v^2-b^2)(v^2-c^2)}} + (1-b^2)\int_1^\infty \frac{v^2 dv\sqrt{v^2-1}}{(v^2-b^2)\sqrt{(v^2-a^2)(v^2-b^2)(v^2-c^2)}}\right.$$
$$\left. + (1-c^2)\int_1^\infty \frac{v^2 dv\sqrt{v^2-1}}{(v^2-c^2)\sqrt{(v^2-a^2)(v^2-b^2)(v^2-c^2)}}\right]; \quad (17)$$

formule que l'on peut écrire

$$A = \frac{1}{6}\pi\left(\frac{1-a^2}{a}\frac{d}{da} + \frac{1-b^2}{b}\frac{d}{db} + \frac{1-c^2}{c}\frac{d}{dc}\right)\int_1^\infty \frac{v\,dv\sqrt{v^2-1}}{\sqrt{(v^2-a^2)(v^2-b^2)(v^2-c^2)}}. \quad (18)$$

Le second membre de l'équation (17), si on le multiplie par 8, peut encore être considéré comme exprimant la masse d'une sphère ayant pour rayon l'unité, et dans laquelle la densité varierait suivant une loi donnée par l'équation (15).

III.

Les résultats contenus dans les deux paragraphes précédents, ont été obtenus à l'aide de considérations géométriques ou de considérations mécaniques. Si l'on voulait, par des procédés analogues, s'élever à l'intégrale quadruple, la chose deviendrait, je crois, plus épineuse : mais il paraît évident, *à priori*, que toutes ces considérations détournées doivent être l'expression d'un seul et même fait analytique. C'est ce dont il est aisé de s'assurer.

Considérons en effet, l'intégrale multiple d'ordre n :

$$A = \int \ldots dz\,dy\,dx\sqrt{\frac{1-\ldots-c^2z^2-b^2y^2-a^2x^2}{1-\ldots-z^2-y^2-x^2}}, \quad (19)$$

dans laquelle nous supposerons que $a, b, c, \ldots$ sont des constantes positives moindres que l'unité, et $x, y, z, \ldots$ des variables positives, liées entre elles par la condition

$$x^2 + y^2 + z^2 \ldots \overset{=}{<} 1. \quad (20)$$

Cette intégrale définie est égale à la somme des valeurs que prend la

différentielle, quand on y fait varier x, y, z,... de toutes les manières possibles, compatibles avec la relation (20). Ordinairement, pour obtenir la valeur de cette intégrale, on suppose en premier lieu, y, z... constantes et déterminées, et l'on somme par rapport à x, en faisant croître cette variable de 0 à $\sqrt{1-y^2-z^2-\ldots}$; puis, supposant z,..... constantes, on fait varier y de 0 à $\sqrt{1-z^2-\ldots}$, etc. Cette manière d'arriver au résultat n'est pas la plus simple que l'on puisse adopter, au moins dans le cas actuel

Pour le faire voir, posons

$$v^2 = \frac{1-\ldots-c^2z^2-b^2y^2-a^2x^2}{1-\ldots-z^2-y^2-x^2}; \qquad (21)$$

donnons pour un instant à v une valeur constante et déterminée, puis cherchons $\int dxdydz\ldots$, en attribuant à x, y, z,... toutes les valeurs propres à satisfaire à la condition

$$(v^2-a^2)x^2+(v^2-b^2)y^2+(v^2-c^2)z^2+\ldots \gtreqless v^2-1, \qquad (22)$$

laquelle se déduit de l'équation (21), et n'est pas contradictoire avec (20), attendu que les rapports $\frac{v^2-a^2}{v^2-1}$, $\frac{v^2-b^2}{v^2-1}$,... sont tous plus grands que l'unité. Nous obtiendrons de la sorte une intégrale définie, exprimée en v, a, b, c,... que nous pouvons représenter par $F(v)$.

Attribuons maintenant à v une nouvelle valeur $v'=v+dv$; calculons l'intégrale $\int dxdy\ldots$ entre les nouvelles limites, lesquelles se déduisent de (22) en y remplaçant v par v'; puis, retranchons le premier résultat du second : la différence, égale à $d.F(v)$, représentera la somme des valeurs que prend la fonction $dxdydz\ldots$, lorsque les variables satisfont à l'équation (21), et que, dans cette équation, le paramètre passe de v à v'. Par conséquent, d'après les premiers principes du calcul intégral, on pourra considérer le produit $vd.F(v)$, comme exprimant, dans l'intégrale (19), la partie que l'on obtiendrait, en faisant croître le radical de v à $v+dv$. D'ailleurs, aux limites

$$x^2+y^2+z^2+\ldots=0, \qquad x^2+y^2+z^2+\ldots=1,$$

correspondent

$$\nu = 1, \quad \nu = \infty ;$$

donc pour déterminer la valeur complète de l'intégrale cherchée, il suffit de prendre la somme des valeurs qu'acquiert la fonction $\nu d.F(\nu)$, lorsque ν, croissant par degrés infiniment petits, passe de 1 à l'infini. Autrement dit, si l'on fait

$$F(\nu) = \int \ldots dzdydx, \tag{23}$$

les limites étant déterminées par

$$(\nu^2 - a^2)x^2 + (\nu^2 - b^2)y^2 + (\nu^2 - c^2)z^2 + \ldots \overset{=}{<} \nu^2 - 1,$$

on aura ce théorème :

$$\int \ldots dzdydx \sqrt{\frac{1 - \ldots - c^2z^2 - b^2y^2 - a^2x^2}{1 - \ldots - z^2 - y^2 - x^2}} = \int_1^\infty \nu d.F(\nu), \tag{24}$$

les limites de l'intégrale multiple étant données par

$$x^2 + y^2 + z^2 + \ldots \overset{=}{<} 1.$$

IV.

Pour déterminer la fonction $F(\nu)$, j'emploie la formule très remarquable donnée par M. Dirichlet :

$$\int x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}\ldots dxdydz = \frac{\alpha^a\beta^b\gamma^c\ldots}{pqr\ldots} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right)\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)\ldots}{\Gamma\left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \ldots\right)}.(*) \tag{25}$$

Dans cette équation, toutes les constantes sont positives : les variables $x, y, z, \ldots$ sont aussi positives, et doivent satisfaire à la condition

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r + \ldots \overset{=}{<} 1. \tag{26}$$

(*) *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, tome VIII, page 156; ou *Journal de Mathématiques*, mars 1839, page 168.

Pour appliquer cette formule à l'intégrale (23), je mets la condition (22) sous la forme

$$\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{v^2-1}{v^2-a^2}}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{v^2-1}{v^2-b^2}}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{\frac{v^2-1}{v^2-c^2}}}\right)^2+\ldots \leqq 1.$$

Comparant alors le second membre de l'équation (23) avec le premier membre de la formule (25), j'obtiens immédiatement

$$F(v)=\int dxdydz\ldots=\frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\sqrt{\left(\frac{v^2-1}{v^2-a^2}\right)\left(\frac{v^2-1}{v^2-b^2}\right)\ldots} \quad (27)$$

Donc l'intégrale multiple (19) se trouve ramenée à l'intégrale simple

$$A=\frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\int_1^\infty vd.\sqrt{\left(\frac{v^2-1}{v^2-a^2}\right)\left(\frac{v^2-1}{v^2-b^2}\right)\ldots} \quad (28)$$

Si, dans la formule (19), les variables pouvaient recevoir des valeurs négatives, il est évident que le résultat précédent devrait être multiplié par 2^n.

En effectuant la différenciation indiquée, la formule (28) devient

$$A=\frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\int_1^\infty \frac{v^2(v^2-1)^{\frac{n}{2}-1}dv}{\sqrt{(v^2-a^2)(v^2-b^2)(v^2-c^2)\ldots}}\left(\frac{1-a^2}{v^2-a^2}+\frac{1-b^2}{v^2-b^2}+\ldots\right). \quad (29)$$

Le cas où les quantités $a, b, c, \ldots$ seraient égales entre elles, doit être remarqué : on a alors

$$A=$$

$$\int\ldots dxdydz\sqrt{\frac{1-a^2(x^2+y^2+z^2+\ldots)}{1-(x^2+y^2+z^2+\ldots)}}=n(1-a^2)\frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\int_1^\infty \frac{v^2(v^2-1)^{\frac{n}{2}-1}dv}{(v^2-a^2)^{\frac{n}{2}-1}}. \quad (30)$$

En posant $v^2 - 1 = (v^2 - a^2)\sin^2\varphi$, il vient successivement

$$v^2 = \frac{1 - a^2\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi},\quad v^2 - a^2 = \frac{1 - a^2}{\cos^2\varphi},\quad v^2 - 1 = (1 - a^2)\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi},\quad v\,dv = (1 - a^2)\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\cos^3\varphi},$$

$$v^n dv = (1 - a^2)\frac{\sin\varphi\,d\varphi\sqrt{1 - a^2\sin^2\varphi}}{\cos^4\varphi},\quad \frac{v^n dv}{(v^2 - a^2)^2}\left(\frac{v^2 - 1}{v^2 - a^2}\right)^{\frac{n}{2} - 1} = \frac{1}{1 - a^2}\sin^{n-1}\varphi\,d\varphi\sqrt{1 - a^2\sin^2\varphi};$$

d'où

$$A = 2\frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\varphi\,d\varphi\sqrt{1 - a^2\sin^2\varphi}. \qquad (31)$$

Si n est impair, l'intégrale sera réductible aux transcendantes elliptiques de première et de seconde espèces, et si n est pair, cette même intégrale pourra s'exprimer par des logarithmes. Dans les deux cas, la réduction se fera par le calcul suivant.

Δ représentant le radical $\sqrt{1 - a^2\sin^2\varphi}$, on a identiquement

$$\sin^{n-1}\varphi . d\varphi\Delta = \sin^{n-3}\varphi\,d\varphi\Delta + \frac{1}{2a^2}\sin^{n-4}\varphi\cos\varphi \times -2a^2\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\Delta;$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\varphi\,d\varphi\Delta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-3}\varphi\,d\varphi\Delta - \frac{1}{3a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Delta^3\left[(n-4)\sin^{n-5}\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi - \sin^{n-3}\varphi\,d\varphi\right]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-3}\varphi\,d\varphi\Delta - \frac{n-4}{3a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-5}\varphi\,d\varphi\Delta + \frac{n-4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-3}\varphi\,d\varphi\Delta$$

$$+ \frac{n-3}{3a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-4}\varphi\,d\varphi\Delta - \frac{n-3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-3}\varphi\,d\varphi\Delta.$$

Cette équation donne

$$A_{n-1} = \frac{(n-1)a^2 + (n-3)}{na^2}A_{n-3} - \frac{n-4}{na^2}A_{n-5}, \qquad (32)$$

en posant, pour abréger,

$$A_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\varphi\,d\varphi\sqrt{1 - a^2\sin^2\varphi}.$$

Nous devons actuellement faire la séparation des deux cas :

1°. n impair.

On a (*)

$$A_0 = E_1, \quad A_2 = \frac{2a^2-1}{3a^2} E_1 + \frac{1-a^2}{3a^2} F_1 :$$

et la formule (32) donne ensuite

$$A_4 = \left(\frac{4a^2+2}{5a^2} \cdot \frac{2a^2-1}{3a} - \frac{1}{5a^2}\right)E_1 + \left(\frac{4a^2+2}{5a^2} \cdot \frac{1-a^2}{3a^2}\right)F_1 ;$$

$$A_6 = \left(\frac{6a^2+4}{7a^2} \cdot \frac{4a^2+2}{5a^2} \cdot \frac{2a^2-1}{3a^2} - \frac{6a^2+4}{7a^2} \cdot \frac{1}{5a^2} - \frac{3}{7a^2} \cdot \frac{2a^2-1}{3a^2}\right)E_1$$
$$+ \left(\frac{6a^2+4}{7a^2} \cdot \frac{4a^2+2}{5a^2} \cdot \frac{1-a^2}{3a^2} - \frac{3}{7a^2} \cdot \frac{1-a^2}{3a^2}\right) F_1 ,$$

etc.

2°. n pair.

Les termes initiaux de la série sont

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}, \quad A_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi d\varphi \sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}.$$

Pour déterminer ces deux intégrales, je pose

$$1 - a^2 \sin^2\varphi = \frac{a^2\cos^2\varphi}{\sin^2\theta} :$$

cette transformation est permise, attendu que, a étant moindre que l'unité, on a

$$a^2(1 - \sin^2\varphi) < 1 - a^2\sin^2\varphi.$$

J'obtiens successivement,

$$\sin^2\varphi = \frac{a - \sin^2\theta}{a^2\cos^2\theta}, \quad \cos^2\varphi = \frac{(1-a^2)\sin^2\theta}{a^2\cos^2\theta}, \quad \sin\varphi\cos\varphi d\varphi = -\frac{1-a}{a^2} \frac{\sin\theta d\theta}{\cos^3\theta},$$

$$d\varphi = -\sqrt{1-a^2} \frac{d\theta}{\cos\theta\sqrt{a-\sin^2\theta}}, \quad \sqrt{1-a^2\sin^2\varphi} = \frac{\sqrt{1-a}}{\cos\theta},$$

$$A_1 = \frac{1-a^2}{a} \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\cos^2\theta}, \quad A_3 = \frac{1-a}{a} \int_0^{\alpha} \frac{d\theta\,(a-\sin^2\theta)}{\cos^3\theta}.$$

en posant $\qquad \alpha = \text{arc sin}\, a.$

(*) *Exercices de Calcul intégral*, tome Ier, pages 199 et 200.

On trouve facilement,

$$\int_0^\alpha \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{1-a^2} + l\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right), \quad \int_0^\alpha \frac{d\theta(a^2-\sin^2\theta)}{\cos^5\theta} = \frac{1}{8}\left[\frac{a(3a^2-2)}{1-a^2} + (3a^2+1)\, l\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right].$$

Il résulte de ces valeurs,

$$A_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1-a^2}{a}\, l\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}, \quad A_3 = \frac{1}{8}\,\frac{3a^2-2}{a^2} + \frac{1}{8}\,\frac{(1-a^2)(3a^2+1)}{a^3}\, l\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}.$$

Les deux premiers termes de la série étant ainsi connus, la formule (32) donnera ensuite, de proche en proche, les valeurs de A_5, A_7, etc.

Dans l'équation (31), supposons $a = 0$: l'intégrale contenue dans le second membre, se réduit à $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$; d'où résulte cette formule très simple

$$\int^n \frac{dx\,dy\,dz\ldots}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2\ldots}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}. \qquad (33)$$

Dans cette intégrale, les variables sont positives et satisfont à la condition

$$x^2 + y^2 + z^2 \ldots \overset{=}{<} 1.$$

V.

La méthode dont nous avons fait usage dans les deux paragraphes précédents, peut être présentée sous la forme générale suivante.

Supposons, 1° que l'intégrale proposée soit

$$A = \int^n dx\,dy\,dz\ldots \varphi(x, y, z, \ldots) \cdot f[\psi(x, y, z, \ldots)]; \qquad (34)$$

2° Que les n variables $x, y, z, \ldots$ positives pour plus de simplicité, doivent toujours satisfaire à une condition exprimée par

$$\psi(x, y, z, \ldots) \overset{=}{<} 0; \qquad (35)$$

3°. Que la fonction $\varphi(x, y, z, \ldots)$ soit de telle nature, qu'elle prenne des valeurs déterminées et connues, α et β, quand on fera $x = y = z = \ldots = 0$, et quand ces variables satisferont à l'équation $\psi = 0$;

4°. Que de plus, l'intégrale $\int dx dy dz \ldots \vartheta(x, y, z, \ldots)$, prise entre les limites

$$x = y = z = \ldots = 0, \quad \text{et} \quad \varphi(x, y, z, \ldots) \overset{=}{<} v,$$

soit connue, et égale à $F(v)$;

5°. Qu'enfin, la condition $\varphi(x, y, z, \ldots) \overset{=}{<} v$ ne soit pas contradictoire avec (35), et qu'en faisant varier v dans la première, depuis α jusqu'à β, on reproduise tous les systèmes de valeurs de $x, y, z, \ldots$ satisfaisant à la seconde; on aura

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} f(v) . \frac{d.F(v)}{dv} . dv. \tag{36}$$

Ce théorème deviendra évident, si l'on répète, sur ce cas général, les raisonnements qui ont été développés, dans le paragraphe III, sur un exemple particulier. Les paragraphes qui vont suivre sont destinés à faire voir quelques-unes des applications que l'on peut faire de la formule (36).

VI.

Pour premier exemple, je considérerai l'intégrale

$$A = \int dx dy dz \ldots \times x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \ldots \left(\frac{1 - ax^{\alpha} - by^{\beta} - cz^{\gamma} - \ldots}{1 - x^{\alpha} - y^{\beta} - z^{\gamma} - \ldots}\right)^{\frac{1}{m}}, \tag{37}$$

dans laquelle les quantités $p, q, r, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont des constantes positives quelconques; $a, b, c, \ldots$ des constantes moindres que l'unité; m une constante positive plus grande que un, et $x, y, \ldots$ des variables qui peuvent recevoir toutes les valeurs positives compatibles avec la condition

$$x^{\alpha} + y^{\beta} + z^{\gamma} + \ldots \overset{=}{<} 1. \tag{38}$$

Si je fais

$$v^m = \frac{1 - ax^\alpha - by^\beta - cz^\gamma - \ldots}{1 - x^\alpha - y^\beta - z^\gamma - \ldots}, \tag{39}$$

puis si je pose

$$F(v) = \int dx dy dz \ldots \times x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \ldots, \tag{40}$$

les limites étant déterminées par

$$(v^m - a) x^\alpha + (v^m - b) y^\beta + (v^m - c) z^\gamma + \ldots \overset{=}{<} v^m - 1; \tag{41}$$

j'aurai

$$A = \int_1^\infty v dF(v).$$

Pour déterminer F (v), je mets la condition (41) sous la forme

$$\left(\frac{x}{\sqrt[\alpha]{\frac{v^m-1}{v^m-a}}}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{\sqrt[\beta]{\frac{v^m-1}{v^m-b}}}\right)^\beta + \left(\frac{z}{\sqrt[\gamma]{\frac{v^m-1}{v^m-c}}}\right)^\gamma + \ldots \overset{=}{<} 1:$$

le théorème de M. Dirichlet (25) donne alors

$$F(v) = \frac{\left(\frac{v^m-1}{v^m-a}\right)^{\frac{p}{\alpha}} \left(\frac{v^m-1}{v^m-b}\right)^{\frac{q}{\beta}} \left(\frac{v^m-1}{v^m-c}\right)^{\frac{r}{\gamma}} \ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)\ldots}{\Gamma\left(1 + \frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} + \ldots\right)}.$$

Donc,

$$A = \frac{1}{\alpha\beta\gamma\ldots} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\ldots}{\Gamma\left(1 + \frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} + \ldots\right)} \int_1^\infty v d.\left[\left(\frac{v^m-1}{v^m-a}\right)^{\frac{p}{\alpha}} \left(\frac{v^m-1}{v^m-b}\right)^{\frac{q}{\beta}} \ldots\right]; \tag{42}$$

ou bien,

$$A =$$

$$\frac{m}{\alpha\beta\gamma\ldots} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\ldots}{\Gamma\left(1 + \frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} + \ldots\right)} \int_1^\infty \frac{v^m (v^m - 1)^{-1 + \frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} + \ldots}}{(v^m - a)^{\frac{p}{\alpha}} (v^m - b)^{\frac{q}{\beta}} \ldots} \left[\frac{p(1-a)}{\alpha(v^m - a)} + \frac{q(1-b)}{\beta(v^m - c)} + \ldots\right] dv; \tag{43}$$

ou encore, en posant $v^m = u$, et $\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+\ldots = k$:

$$A = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\ldots\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma(1+k)}\int_1^\infty \frac{\frac{1}{u^m}(u-1)^{k-1}\,du}{(u-a)^{\frac{p}{\alpha}}(u-b)^{\frac{q}{\beta}}\ldots\ldots}\left[\frac{p(1-a)}{\alpha(u-a)}+\frac{q(1-b)}{\beta(u-b)}+\ldots\right] \quad (44).$$

Si les constantes a, b, c, sont égales entre elles, la formule se simplifie beaucoup : elle devient

$$\int dx\,dy\ldots\ldots dz\,x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\ldots\ldots\left[\frac{1-a(x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots)}{1-(x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots)}\right]^{\frac{1}{m}}$$

$$= (1-a)\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma(k)}\int_1^\infty \frac{\frac{1}{u^m}(u-1)^{k-1}\,du}{(u-a)^{k+1}}. \quad (45)$$

Si, dans cette dernière, a est nul, le second membre se réduit à

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\ldots\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma(k)}\int_1^\infty \frac{(u-1)^{k-1}\,du}{u^{l+1-\frac{1}{m}}}.$$

Je pose $u = \frac{1}{\theta}$: l'intégrale se transforme en

$$\int_0^1 \theta^{-\frac{1}{m}}(1-\theta)^{k-1}\,d\theta = \frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)\Gamma(k)}{\Gamma\left(k+1-\frac{1}{m}\right)};$$

donc

$$\int \frac{dx\,dy\,dz\ldots x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\ldots}{(1-x^\alpha-y^\beta-z^\gamma-\ldots)^{\frac{1}{m}}} = \frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma\left(1-\frac{1}{m}+\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\ldots\right)}. \quad (46)$$

Dans toutes ces intégrales multiples, la condition aux limites est toujours

$$x^\alpha + y^\beta + z^\gamma + \ldots \overset{=}{<} 1.$$

VII.

La formule (46) peut se déduire d'une autre formule très générale.

Prenons $A = \int x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \ldots dx dy dz . \varphi(x + y + z + \ldots)$, (47)

la condition aux limites étant $x + y + z + \ldots \overset{=}{<} \lambda$.

En posant

$$x + y + z + \ldots = v,$$

nous aurons à chercher l'intégrale

$$F(v) = \int x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \ldots dx dy dz,$$

entre des limites données par

$$\frac{x}{v} + \frac{y}{v} + \frac{z}{v} + \ldots \overset{=}{<} 1.$$

Or, par la formule de Dirichlet,

$$F(v) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)\ldots}{\Gamma(1 + p + q + r + \ldots)} . v^{1+p+q+r+\ldots}$$

donc,

$$A = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)\ldots}{\Gamma(p + q + r + \ldots)} \int_0^{\lambda} v^{-1+p+q+r\ldots} \varphi(v) dv \ (*). \qquad (48)$$

Il est clair que, par un simple changement de variables, cette formule donnera l'équation (46); elle conduit également à celle-ci :

$$\int dx dy dz \ldots \times x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \ldots \left(1 - x^{\alpha} - y^{\beta} - z^{\gamma} - \ldots\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$= \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right) \ldots}{\alpha\beta\gamma \ldots \Gamma\left(1 + \frac{1}{m} + \frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} + \ldots\right)}. \qquad (49)$$

Dans cette dernière équation, toutes les constantes ont la même signification que dans (46); l'équation aux limites est la même; m est une constante positive quelconque.

(*) Cette formule a été démontrée d'une autre manière par M. Liouville (*Journal de Mathématiques*, mai 1839).

VIII.

Pour application de la formule (48), je prendrai l'intégrale

$$A = \int dx dy dz \ldots \sqrt{\frac{1-(x^2+y^2+z^2+\ldots)}{1+(x^2+y^2+z^2+\ldots)}}, \qquad (50)$$

dans laquelle les n variables seront positives et satisferont à la condition

$$x^2+y^2+z^2+\ldots \overset{=}{<} 1.$$

Cette intégrale se transforme d'abord en

$$A = \left(\frac{1}{2}\right)^n \int \frac{dx dy dz \ldots}{\sqrt{xyz\ldots}} \sqrt{\frac{1-(x+y+z+\ldots)}{1+(x+y+z+\ldots)}}, \qquad (51)$$

la condition aux limites étant

$$x+y+z+\ldots \overset{=}{<} 1.$$

J'applique actuellement la formule en question, et j'obtiens

$$A = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 v^{\frac{n}{2}-1} dv . \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}. \qquad (52)$$

L'intégrale équivaut à

$$-\int_0^1 \frac{v^{\frac{n}{2}} dv}{\sqrt{1-v^2}} + \int_0^1 \frac{v^{\frac{n}{2}-1} dv}{\sqrt{1-v^2}} = -\frac{1}{2}\int_0^1 \theta^{\frac{n}{4}-\frac{2}{1}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta + \frac{1}{2}\int_0^1 \theta^{\frac{n}{4}-1} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}+1\right)} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right)};$$

en posant $v = \theta^{\frac{1}{2}}$, et faisant usage de la relation,

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^1 \theta^{p-1}(1-\theta)^{q-1} d\theta.$$

Au moyen de ces valeurs, je trouve, au lieu de l'intégrale (50),

$$A = \frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{n+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[-\frac{\Gamma\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}+1\right)}+\frac{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right)}\right].$$

Cette formule donnera successivement

$$\int_0^1 dx\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}-\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\right] = \frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{2\pi}}-\frac{\pi\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}, \quad (54)$$

à cause de

$$\Gamma\frac{1}{4}\Gamma\frac{3}{4} = \frac{\pi}{\sin\frac{1}{4}\pi};$$

$$\int dxdy\sqrt{\frac{1-(x^2+y^2)}{1+(x^2+y^2)}} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right), \quad (55)$$

$$\int dxdydz\sqrt{\frac{1-(x^2+y^2+z^2)}{1+(x^2+y^2+z^2)}} = \frac{1}{8}\sqrt{2\pi}\left[\frac{4\pi^2}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}-\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2\right], \quad (56)$$

$$\int dxdydzdt\sqrt{\frac{1-(x^2+y^2+z^2+t^2)}{1+(x^2+y^2+z^2+t^2)}} = \frac{\pi^2}{16}\left(1-\frac{\pi}{4}\right), \quad (57)$$

etc.

IX.

Je choisirai enfin, pour application de la formule (48), l'intégrale

$$A = \int\frac{dxdydz\ldots}{(x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots)^m}, \quad (58)$$

entre les limites

$$x^\alpha + y^\beta + z^\gamma + \ldots \overset{=}{<} 1.$$

En remplaçant x^α par x, y^β par y, etc., elle devient

$$A = \frac{1}{\alpha\beta\gamma\ldots}\int^n\frac{dxdydz\ldots\times x^{\frac{1}{\alpha}-1}\,y^{\frac{1}{\beta}-1}\,z^{\frac{1}{\gamma}-1}\ldots}{(x+y+z+\ldots)^m};$$

et la condition aux limites :

$$x + y + z + \ldots \overset{=}{<} 1.$$

La formule (48) donne alors

$$A = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\ldots\right)}\int_0^1 v^{-1-m+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\ldots}\,dv.$$

Pour que l'intégrale ne soit pas infinie, on doit avoir

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\ldots > m;$$

et, cela étant,

$$A = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\ldots-m\right)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\ldots\right)}. \qquad (59)$$

Si les exposants α, β, γ,... sont égaux entre eux,

$$A = \frac{\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^n}{\left(\frac{n}{\alpha}-m\right)\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}. \qquad (60)$$

Nous avons supposé l'exposant m positif; s'il était négatif, nous trouverions

$$\int(x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots)^m dx\,dy\,dz\ldots = -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\left(m+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\ldots\right)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\ldots\right)}. \qquad (61)$$

Dans le premier membre, supposons m entier, et développons la puissance du polynome: l'un des termes à intégrer sera de la forme

$$\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b+1)\ldots}\int x^{a\alpha}y^{b\beta}z^{c\gamma}\ldots dx\,dy\,dz,$$

en posant

$$a+b+c+\ldots = m.$$

Or, en observant que l'intégrale doit être prise entre les limites données par

$$x^{\alpha} + y^{\beta} + z^{\gamma} + \ldots \overset{=}{<} 1,$$

la formule de M. Dirichlet donne

$$\int x^{a\alpha} y^{b\beta} z^{c\gamma} \ldots dx dy dz = \frac{1}{\alpha\beta\gamma\ldots} \frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(b+\frac{1}{\beta}\right)\ldots}{\Gamma\left(1+m+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\ldots\right)};$$

d'où résulte, en comparant avec l'équation (61),

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)\ldots}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\ldots\right)} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(m+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\ldots\right)} \sum \frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(b+\frac{1}{\beta}\right)\ldots}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\Gamma(c+1)\ldots}. \quad (62)$$

Le signe Σ indique une somme de termes de même forme que celui placé sous ce signe : a, b, c,... doivent recevoir toutes les valeurs entières non négatives satisfaisant à l'équation

$$a + b + c + \ldots = m.$$

Le nombre de ces termes est d'ailleurs (*)

$$N = \frac{(m+1)}{1} \cdot \frac{m+2}{2} \cdots \frac{m+n-1}{n-1}.$$

(Avril 1839.)

(*) *Journal de Mathématiques*, tome III, page 112.

NOTE

Sur le centre de gravité du tronc de prisme ;

PAR M. BRIANCHON ;

Ancien chef d'escadron d'Artillerie.

1. Soient AB, CD, EF les trois arètes parallèles d'un tronc de prisme triangulaire, V le volume du tronc, Z la distance du centre de gravité à la face ABCD; enfin, H la distance de cette face à l'arète opposée EF.

Par l'une, E, des extrémités de EF, je mène deux plans sécants, EBD, EAD, qui décomposent le tronc en trois pyramides triangulaires, ECAD, EABD, EFBD, dont les volumes seront désignés par V', V'', V''', respectivement. Nommons Z', Z'', Z''' les distances respectives des centres de gravité de ces pyramides à la face ABCD, et prenons les moments par rapport à cette face; il vient

$$V.Z = V'.Z' + V''.Z'' + V'''.Z'''.$$

Reste à déterminer V', V'', V''', et Z', Z'', Z'''.

PREMIÈREMENT. Quelle que soit l'inclinaison des bases du tronc sur les trois arètes parallèles, on a

$$V : V' : V'' : V''' :: AB + CD + EF : CD : AB : EF$$

(Voyez la *Géométrie* de Legendre, livre VI, proposition 22).

SECONDEMENT. *La distance du centre de gravité d'une pyramide triangulaire à un plan situé d'une manière quelconque dans l'espace, est égale à la moyenne distance de ses quatre* sommets *au même plan.*

(Voyez la *Statique* de M. Poinsot, chapitre 3). Donc :

$$Z' = \tfrac{1}{4}H, \qquad Z'' = \tfrac{1}{4}H, \qquad Z''' = \tfrac{1}{2}H.$$

Substituant ces valeurs de V', V'', V''' et Z', Z'', Z''' dans l'équation des moments, il vient

$$Z = \tfrac{1}{4}H\left(1 + \frac{EF}{AB + CD + EF}\right),$$

formule qu'on traduit ainsi :

« Dans un tronc de prisme triangulaire, la distance du centre de » gravité à l'une quelconque des trois faces est égale au produit de » deux facteurs, dont l'un est le quart de la distance de cette face à » l'arête opposée, et dont l'autre est l'unité augmentée du rapport de » cette arête à la somme des trois arêtes parallèles. »

2. Combinant ce théorème avec le principe des moments, on obtiendra, pour un tronc de prisme polygonal, la distance du centre de gravité à l'une quelconque des faces. Un tel corps, en effet, représente toujours un système de prismes triangulaires tronqués.

3. Coupez le tronc de prisme triangulaire par un plan parallèle à l'une quelconque, ABCD, des trois faces ; la section est un trapèze, *abcd*, ayant son centre de gravité sur la droite qui joint les milieux de ses deux bases *ab*, *cd* ; et cette droite de jonction est dans le plan MM qui joint les milieux des trois arêtes parallèles AB, CD, EF. Donc :

« Le centre de gravité d'un tronc de prisme triangulaire est sur le » plan qui joint les milieux des trois arêtes parallèles. »

Concevez qu'on prolonge les plans des deux bases du tronc, jusqu'à leur rencontre mutuelle dans l'espace ; la droite d'intersection est évidemment sur MM. Ainsi :

4. « Dans un tronc de prisme polygonal quelconque, les milieux » des arêtes parallèles sont tous situés sur un même plan, et ce plan » contient le centre de gravité du tronc. »

Le même théorème est applicable aux troncs de cylindre à base quelconque.

5. Considérez, dans le tronc de prisme polygonal, deux quel-

conques des arêtes parallèles comme bases d'un trapèze. Les diagonales de ce trapèze auront leur croisement sur MM, et les deux côtés aussi, en les prolongeant.

6. Les deux théorèmes (1. 3) sur le centre de gravité du tronc de prisme triangulaire ont leurs analogues dans la géométrie plane; effectivement :

« Dans un trapèze, la distance du centre de gravité à l'une quel-
» conque des deux bases, est égale au produit de deux facteurs,
» dont l'un est le tiers de la hauteur, et dont l'autre est l'unité aug-
» mentée du rapport de l'autre base à la somme des deux bases.

» Le centre de gravité du trapèze est sur la droite qui joint les
» milieux des deux bases. »

Propriétés nouvelles de l'Hyperboloïde à une nappe ;

PAR M. CHASLES.

Toutes les propositions que je vais énoncer sont relatives aux génératrices *d'un même système de génération* de l'hyperboloïde à une nappe.

Ces propositions sont nouvelles et d'un genre particulier. La plupart s'appliquent au paraboloïde hyperbolique, qui n'est qu'une variété de l'hyperboloïde.

Considérons donc les génératrices d'un même système de génération d'un hyperboloïde à une nappe. Concevons un plan transversal quelconque; et, par un point pris arbitrairement dans ce plan, menons des droites dont chacune rencontre deux génératrices de l'hyperboloïde. Nous dirons que ces deux droites sont *conjuguées*. Toutes les génératrices de l'hyperboloïde seront ainsi distribuées en groupes ou systèmes de deux génératrices *conjuguées*.

Ce sont ces systèmes de deux génératrices conjuguées dont nous avons à présenter diverses propriétés assez curieuses.

D'abord remarquons qu'on peut déterminer ces systèmes d'une infinité de manières; car il y a deux choses arbitraires qui nous ont servi à les former, savoir, le plan transversal et le point pris dans ce plan.

Si l'on prend arbitrairement deux génératrices comme *conjuguées entre elles*, et deux autres génératrices quelconques comme conjuguées aussi entre elles, ces deux systèmes suffiront pour déterminer tous les autres. Cela est évident.

Les génératrices d'un hyperboloïde, groupées ainsi deux à deux, jouissent des propriétés suivantes :

1°. *Toutes les génératrices d'un même mode de génération d'un hyperboloïde étant prises deux à deux comme conjuguées, si l'on mène un plan transversal quelconque qui rencontrera les deux génératrices conjuguées de chaque système en deux points, la droite qui joindra ces deux points passera toujours par un même point fixe de ce plan.*

Et réciproquement, *si par un point quelconque de l'espace on mène des droites dont chacune s'appuie sur deux génératrices conjuguées, toutes ces droites seront dans un même plan.*

Ainsi, la propriété dont jouissent les systèmes de droites conjuguées, par rapport au plan et au point qui ont servi à les former, s'applique à tout autre plan et à tout autre point de l'espace.

2°. *Si l'on mène les droites dont chacune mesure la plus courte distance entre deux droites conjuguées, toutes ces droites s'appuieront sur un même axe fixe* X *auquel elles seront perpendiculaires ; et les distances de deux génératrices conjuguées, à cet axe, seront entre elles comme les tangentes trigonométriques des angles que ces deux droites feront avec cet axe.*

3°. *Un cylindre quelconque étant circonscrit à un hyperboloïde, deux plans tangents au cylindre, parallèles entre eux, passent par deux génératrices de la surface ; et les systèmes de deux génératrices ainsi déterminés, sont des systèmes de génératrices conjuguées.*

Ce théorème offre une autre manière de déterminer les systèmes de génératrices conjuguées.

Il s'ensuit que les deux propositions précédentes peuvent être considérées comme des propriétés relatives à un cylindre quelconque circonscrit à un hyperboloïde, et pourraient prendre, sous ce point de vue, d'autres énoncés.

A chaque plan mené arbitrairement dans l'espace, correspond, d'après le théorème 1, un point situé dans ce plan, par lequel passent toutes les droites qui joignent deux à deux les pieds des génératrices conjuguées. Et à un point pris arbitrairement dans l'espace, correspond un plan passant par ce point et dans lequel se trouvent toutes les droites qui, issues de ce point, s'appuient sur les droites conjuguées prises deux à deux.

La considération de ces points par rapport aux plans, ou des plans par rapport aux points, donne lieu à divers théorèmes. Pour les énoncer plus clairement, nous appellerons *pôle* d'un plan, le point en question situé dans ce plan, et ce plan sera dit le plan *polaire* du point.

4°. *Quand plusieurs plans passent par un même point, leurs* PÔLES *sont situés sur un même plan qui est le* PLAN POLAIRE *du point.*

Et réciproquement, *quand plusieurs points sont situés sur un*

même plan, leurs PLANS POLAIRES *passent par un même point qui est le* PÔLE *de ce plan.*

5°. *Quand des plans passent par une même droite* L, *leurs pôles sont situés sur une seconde droite* L′;

Et les plans menés par cette droite L′ *ont leurs pôles situés sur la première* L.

De sorte que les deux droites L, L′ jouissent, l'une par rapport à l'autre, de propriétés réciproques.

6°. *Ces deux droites jouissent des mêmes propriétés que deux génératrices conjuguées de l'hyperboloïde.* Ce qui donne lieu aux quatre propositions suivantes :

7°. *Si l'on mène un plan transversal quelconque, la droite qui joindra les deux points où il rencontrera les deux droites* L, L′, *passera par le pôle de ce plan ;*

8°. *La droite qui mesure la plus courte distance des deux droites* L, L′ *s'appuie sur l'axe* X (théorème 2) *et lui est perpendiculaire ; et les distances de cet axe à ces droites sont proportionnelles aux tangentes trigonométriques des angles qu'il fait avec elles ;*

9°. *Les deux droites* L, L′ *et deux génératrices conjuguées de l'hyperboloïde peuvent être prises pour quatre génératrices d'un même mode de génération d'un autre hyperboloïde.*

10°. *Deux systèmes de deux droites telles que* L, L′, *sont quatre génératrices d'un même mode de génération d'un hyperboloïde.*

11°. *Quand des points sont situés sur une surface du second degré, leurs plans polaires enveloppent une autre surface du second degré ;*

Et réciproquement, *les plans polaires des points de cette seconde surface sont tangents à la première.*

12°. *Si par les pôles de différents plans on mène les normales à ces plans, et qu'on demande que ces droites passent par un même point donné dans l'espace, toutes ces droites formeront un cône du second degré ; et les pôles des plans seront sur une courbe à double courbure du troisième ordre.*

13°. *Si l'on demande que les normales, au lieu de passer par un même point, soient toutes situées dans un même plan donné, elles envelopperont dans ce plan une parabole ; et les pôles par où elles seront menées seront sur la directrice de cette courbe.*

. . . . . .

SECOND MÉMOIRE

Sur l'équilibre des Températures dans les corps solides homogènes de forme ellipsoïdale, concernant particulièrement les ellipsoïdes de révolution;

PAR G. LAMÉ.

Le premier Mémoire (*) que j'ai présenté sur l'équilibre de la chaleur dans les corps solides homogènes de forme ellipsoïdale, contient la loi des températures permanentes dans l'ellipsoïde à trois axes inégaux, lorsque sa surface est soumise à des sources constantes de chaleur et de froid. Je me suis proposé, dans ce second Mémoire, de considérer en particulier le cas d'un ellipsoïde de révolution, soit aplati, soit allongé. Voici le résumé succinct de ce travail, tel que je l'ai donné dans la note lue à l'Académie des Sciences.

La solution générale indique, par des transformations faciles, la forme de la série qui doit exprimer la température dans le nouveau corps; il serait même possible de l'en déduire complétement, en faisant un usage convenable de la méthode qui sert à trouver la vraie valeur des fractions, se présentant sous une forme indéterminée. Mais après avoir ainsi reconnu la forme, essentielle et suffisante, de la nouvelle solution, j'ai cru préférable de la compléter par des recherches directes.

La loi des températures dans l'ellipsoïde de révolution, est définitivement exprimée par une série de termes, desquels chacun est le produit de trois facteurs : l'un est le cosinus ou le sinus d'un arc multiple de l'angle azimutal, qui particularise les plans méridiens; les deux autres facteurs sont respectivement des fonctions entières et

(*) *Voyez* Tome IV, p. 133 de ce Journal.

rationnelles du diamètre équatorial, et de l'axe polaire des autres surfaces coordonnées, lesquelles sont des ellipsoïdes et des hyperboloïdes de révolution autour du même axe, isothermes et orthogonaux. Les constantes de ces deux fonctions, ou plutôt de ces deux polynomes, sont totalement dégagées de tout nombre incommensurable. Enfin les coefficients des différents termes sont déterminés, à l'aide des températures données de la surface, par des intégrales définies qu'il est facile de calculer.

Cette solution prend une autre forme, quand on choisit pour paramètre des surfaces conjuguées, les transcendantes qui exprimeraient la température dans chaque système coordonné, pris isolément comme système de surfaces isothermes. Les axes des hyperboloïdes de révolution se transforment alors en exponentielles toujours réelles. Quant à ceux des ellipsoïdes, ils deviennent pareillement des exponentielles réelles, si le sphéroïde est allongé; mais ils prennent la forme de la tangente et de la sécante d'un arc de cercle, si l'ellipsoïde est aplati, c'est à-dire si l'axe polaire est moindre que le diamètre de son équateur. Dans les deux cas, la fonction introduite se présente développée en une série de sinus ou de cosinus pour l'une des variables, et d'exponentielles réelles pour l'autre.

Lorsque les températures de la surface sont distribuées de la même manière sur tous les méridiens, la série qui donne les températures intérieures est indépendante de la longitude; et la fonction donnée, qui n'est plus qu'à une seule variable, est introduite par son développement en une série d'exponentielles réelles.

§ I.

La série qui représente la loi des températures, dans l'ellipsoïde à trois axes inégaux, contient les paramètres de trois surfaces du second ordre, ayant les mêmes foyers géométriques que l'ellipsoïde donné, et en outre deux constantes b et c. Ces constantes servent à particulariser les distances $2b$, $2c$, $2\sqrt{c^2 - b^2}$, qui séparent les foyers sur chaque section principale; leurs rapports et leurs grandeurs absolues restent arbitraires, en sorte que la série doit conserver la même forme, quelles que soient les valeurs particulières

données à ces constantes. Or lorsqu'on suppose $b = 0$, ou $b = c$, il est aisé de voir que l'ellipsoïde devient de révolution autour du petit axe, ou du grand axe de l'ellipse méridienne. L'équilibre des températures dans un ellipsoïde de révolution doit donc pouvoir se déduire de la solution qui concerne l'ellipsoïde à trois axes inégaux; et de cette liaison naturelle résulte la forme, essentielle et suffisante, de la série qui doit exprimer le nouvel équilibre.

Guidé par ces considérations, nous allons chercher directement la loi des températures permanentes d'un ellipsoïde de révolution, lorsque sa surface est en contact avec des sources de chaleur et de froid. Nous considérerons d'abord le cas où l'ellipsoïde de révolution est aplati, c'est-à-dire tel que le diamètre de l'équateur surpasse l'axe polaire.

L'ellipsoïde proposé est alors compris parmi les surfaces au paramètre ρ, représentées par l'équation

$$(1) \qquad \frac{x^2+y^2}{\rho^2} + \frac{z^2}{\rho^2-c^2} = 1;$$

ces surfaces sont conjuguées à celles désignées par les équations

$$(2) \qquad \frac{x^2+y^2}{\rho_1^2} - \frac{z^2}{c^2-\rho_1^2} = 1, \quad \theta = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right),$$

desquelles la première représente des hyperboloïdes à une nappe, de révolution autour de l'axe polaire, et la seconde des plans méridiens. Les ellipsoïdes (1) et les hyperboloïdes (2) sont tels qu'un même plan méridien les coupe suivant des ellipses et des hyperboles ayant les mêmes foyers géométriques.

Si l'on prend pour coordonnées nouvelles les paramètres $\rho > c$, $\rho_1 < c$, et θ, de ces surfaces orthogonales conjuguées, les équations (1) et (2) donnent aisément pour formules de transformation :

$$(3) \quad cx = \rho\rho_1 \sin\theta, \quad cy = \rho\rho_1 \cos\theta, \quad cz = \sqrt{\rho^2-c^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}.$$

Si l'on désigne par h, h_1, h_2, les valeurs de l'expression différentielle $\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}$, pour f successivement égal à ρ, ρ_1, θ,

le calcul donne

$$(4)\qquad h=\frac{\sqrt{\varrho^2-c^2}}{\sqrt{\varrho^2-\varrho_1^2}},\quad h_1=\frac{\sqrt{c^2-\varrho_1^2}}{\sqrt{\varrho^2-\varrho_1^2}},\quad h_2=\frac{c}{\varrho\varrho_1}.$$

Enfin, si l'on représente par le symbole $\Delta_2 f$, la somme..... $\left(\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dy^2}+\frac{d^2f}{dz^2}\right)$, on trouve

$$(5)\quad \Delta_2\rho=\frac{d\log\varrho\sqrt{\varrho^2-c^2}}{d\varrho}h^2,\quad \Delta_2\rho_1=\frac{d\log\varrho_1\sqrt{c^2-\varrho_1^2}}{d\varrho_1}h_1^2,\quad \Delta_2\theta=0.$$

Les formules (4) et (5) servent à transformer en coordonnées ρ, ρ_1, θ, l'équation $\Delta_2 V=0$, laquelle exprime l'équilibre de la température V, dans un corps solide homogène et quelconque : il convient, pour simplifier, d'introduire les deux transcendantes

$$(6)\qquad \varepsilon=\int_c^{\rho}\frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{\varrho^2-c^2}},\quad \varepsilon_1=\int_0^{\rho_1}\frac{d\varrho}{\varrho_1\sqrt{c^2-\varrho_1^2}},$$

et l'équation ($\Delta_2 V=0$) devient

$$(7)\qquad \rho_1^2\frac{d^2V}{d\varepsilon^2}+\rho^2\frac{d^2V}{d\varepsilon_1^2}+(\rho^2-\rho_1^2)c^2\frac{d^2V}{d\theta^2}=0.$$

Le problème d'analyse, qu'il s'agit de résoudre, consiste à trouver une fonction V de ρ, ρ_1, θ, qui, vérifiant l'équation (7) se réduise à une fonction connue $\varphi(\rho_1,\theta)$ quand $\rho=\rho_1$, ou sur la surface de l'ellipsoïde de révolution proposé.

Avant d'aborder la solution de ce problème, il est nécessaire d'étudier les propriétés du système des coordonnées ρ, ρ_1, θ, afin de pouvoir partager la fonction φ, dans le cas le plus général, en plusieurs fonctions plus simples, et satisfaisant à des conditions de symétrie particulières.

§ II.

Le système coordonné qui vient d'être défini n'est qu'un cas particulier du système général employé pour la solution de l'ellipsoïde à trois axes inégaux ; on peut le déduire de ce dernier en posant

$\rho_2 = b \sin\theta$, et ensuite $b = 0$. Il résulte de là, et des considérations exposées au § XVI du premier Mémoire, que parmi les six quantités ρ, $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, ρ_1, $\sqrt{c^2 - \rho_1^2}$, $\sin\theta$, $\cos\theta$, introduites par les nouvelles coordonnées, les seules pour lesquelles il soit nécessaire d'admettre des valeurs négatives, sont $\sin\theta$ ou θ, ρ_1 et $\sqrt{\rho^2 - c^2}$. Les changements de signe de ces variables sont liés avec ceux de x, y, z : d'après les formules (3), x change de signe avec θ, y avec ρ_1, z avec $\sqrt{\rho^2 - c^2}$.

Pour fixer les idées, nous appellerons *longitude* l'angle azimutal θ. Le plan correspondant à $x = 0$ ou à $\theta = 0$, sera alors le méridien de départ; la longitude étant positive à droite, et négative à gauche de ce plan. Le méridien perpendiculaire à celui dont la longitude est nulle, sépare les points de l'espace situés en avant et pour lesquels ρ_1 est positif, de ceux situés en arrière et pour lesquels ρ_1 est négatif. D'où il suit que dans un plan méridien quelconque, deux points pris de part et d'autre de l'axe de révolution, correspondent à des valeurs de ρ_1 ayant des signes contraires. Enfin le plan de l'équateur sur lequel $z = 0$, ou bien $\rho = c$, ou $\rho_1 = \pm c$, divise l'espace de telle manière que $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ est positif au-dessus, et négatif au-dessous de ce plan.

D'après cette représentation géométrique, θ ne varierait qu'entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, et ρ_1 entre $-c$ et $+c$. Mais on peut aussi particulariser successivement tous les points de l'espace, en ne conservant que des valeurs positives de ρ_1, et même de θ : les points, situés en avant de l'axe de révolution, se distinguent alors de ceux situés en arrière, sur un même plan méridien, en ce que θ augmente de π lorsqu'on passe des premiers aux seconds.

§ III.

La fonction V qui représentera la loi que nous cherchons, étant exprimée en coordonnées rectilignes, doit être développable suivant les puissances ascendantes de ces variables, sans que la série résultante contienne des exposants négatifs : car la température ne saurait devenir infinie pour $z = 0$, ou $y = 0$, c'est-à-dire pour des points intérieurs

de l'ellipsoïde situés sur l'équateur, ou sur le méridien dont la longitude est nulle, ou $\frac{\pi}{2}$. Le développement de V en x, y, z, peut être groupé ainsi :

$$V = P + P'x + P''y + P'''z + P_3yz + P_2zx + P_1xy + P_0xyz\,;$$

P, P', ... P_1, P_0, étant des fonctions rationnelles de x^2, y^2, z^2. Si l'on transforme ce développement en coordonnées ρ, ρ_1, θ, à l'aide des formules (3), il prendra la forme

$$(8)\quad \begin{cases} V = Q + Q'\rho\rho_1 \sin\theta + Q''\rho\rho_1 \cos\theta + Q_1 \sin\theta \cos\theta \\ \quad + (Q''' + Q_2\rho\rho_1 \sin\theta + Q_3\rho_1 \cos\theta + Q_0 \sin\theta \cos\theta)\sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}\,; \end{cases}$$

Q, Q', ... Q_1, Q_0, étant des fonctions rationnelles de ρ^2, ρ_1^2, $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$.

Sur la surface de l'ellipsoïde proposé, ou pour $\rho = \rho_0$, la température se réduit à une fonction V_0 des deux variables ρ_1 et θ, laquelle a pour forme correspondante à celle qui précède :

$$(9)\quad \begin{cases} V_0 = (q + q'\rho_1 \sin\theta + q''\rho_1 \cos\theta + q_1 \sin\theta \cos\theta \\ \quad + (q''' + q_2\rho_1 \sin\theta + q_3\rho_1 \cos\theta + q_0 \sin\theta \cos\theta)\sqrt{c^2 - \rho_1^2}\,, \end{cases}$$

q, q', ... q_1, q_0, étant des fonctions rationnelles de ρ_1^2, $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$.

Il suit de là que l'état général de l'équilibre des températures, dont nous cherchons la loi, peut être regardé comme la superposition de huit états partiels, correspondant aux huit termes des développements (8) et (9), et qui jouissent chacun de propriétés particulières.

Pour les quatre termes qui ne contiennent pas $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ ou $\sqrt{c^2 - \rho_1^2}$ comme facteur, les sources calorifiques de la surface, et par suite les températures intérieures de l'ellipsoïde, sont les mêmes en deux points symétriquement placés, l'un au-dessus, et l'autre au-dessous du plan de l'équateur. Tandis que pour les quatre termes qui contiennent ce facteur irrationnel les températures des deux points symétriques sont égales et de signes contraires.

Pour les quatre termes qui ne contiennent pas le facteur $\sin\theta$, les

sources et les températures sont distribuées symétriquement, à droite et à gauche du plan méridien dont la longitude est zéro. Tandis que pour les quatre termes qui contiennent ce facteur $\sin\theta$, les températures des deux points symétriques par rapport au méridien de départ, sont de signes contraires et égales seulement en valeur absolue.

Enfin, les termes qui ne présentent aucun des deux facteurs $\sin\theta$, $\cos\theta$, ainsi que ceux qui contiennent ces deux facteurs à la fois, ne changeant ni de signes, ni de valeurs, quand θ augmente de π, correspondent à des états partiels où les températures sont distribuées symétriquement de part et d'autre de l'axe de révolution, sur chaque plan méridien. Tandis que les quatre termes qui présentent le facteur $\sin\theta$, ou $\cos\theta$, changeant de signe et conservant la même valeur absolue, quand θ augmente de π, désignent des états partiels où les températures sont de signes contraires en deux points d'un même plan méridien symétriques par rapport à l'axe.

Quelle que soit la fonction $\varphi(\rho_1, \theta)$ qui exprime la loi donnée des températures de la surface, elle pourra toujours être décomposée en huit fonctions plus simples, dont elle sera la somme, et qui jouiront respectivement des conditions de symétrie, directe ou inverse, particularisant les huit termes généraux du développement (9).

Il suit de là que la solution générale sera facile à composer, si l'on parvient à exprimer la loi des températures permanentes de l'ellipsoïde, dans chacun des huit cas particuliers qui viennent d'être distingués, et qui sont représentés par les huit groupes (8).

§ IV.

Le développement (8) de V, ne contenant que des puissances entières et positives de $\sin\theta$ et de $\cos\theta$, peut être transformé de la manière suivante :

$$(10)\left\{\begin{aligned} V = {} & \sum P_i \cos 2i\theta + \sum P'_i \sin(2i+1)\theta + \sum P''_i \cos(2i+1)\theta + \sum P'''_i \sin 2i\theta \\ & + \left[\sum R_i \cos 2i\theta + \sum R'_i \sin(2i+1)\theta + \sum R''_i \cos(2i+1)\theta + \sum R'''_i \sin 2i\right] V\, \xi^{c'-c'} \sqrt{c'-\xi}. \end{aligned}\right.$$

Les sigma s'étendent à toutes les valeurs positives du nombre entier i.

P_i, $P'\ldots R''_i$, R'''_i, sont des séries rationnelles en ρ et ρ_1, qui ne renferment que des puissances positives de ces variables, et qui changent pour chaque valeur de i; P_i, P''_i, R_i, R''_i, ne contiennent que des puissances paires de ρ et ρ_1, et P'_i, P''', R'_i, R'''_i, seulement des puissances impaires. Les huit états partiels qui se superposent dans le cas général sont maintenant représentés par les huit groupes du développement (10).

La composition des séries $P_i\ldots R'''_i$, est indiquée par la solution de l'ellipsoïde à trois axes inégaux. En effet, il a été démontré dans le premier Mémoire que la température permanente d'un ellipsoïde quelconque, était essentiellement exprimée par la série :

$$(11)\qquad V = \sum_{n=0}^{n=\infty} S_n MEE_1F_2;$$

E, E_1, E_2, sont des polynomes entiers, rationnels et du degré n, savoir: E en ρ, $\sqrt{\rho^2-b^2}$, $\sqrt{\rho^2-c^2}$, axes de l'ellipsoïde isotherme; E_1 en ρ_1 $\sqrt{\rho_1^2-b^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$, axes de l'hyperboloïde isotherme à une nappe: E_2 en ρ_2, $\sqrt{b-\ {}^2_2}$, $\sqrt{c^2-\ {}^2_2}$, axes de l'hyperboloïde isotherme à deux nappes; de plus ces polynomes sont composés de la même manière et avec les mêmes coefficients ; la somme S_n est composée en général de $(2n+1)$ termes semblables, dans lesquels les polynomes facteurs ont tous le même degré n; enfin le sigma s'étend à toutes les valeurs positives du nombre n.

Pour déduire de cette série (11) appartenant à tout système ellipsoïdal, celle particulière à l'ellipsoïde de révolution aplati, il faut poser $\rho_2 = b\sin\theta$, et faire $b=0$. Lorsqu'on fait d'abord $\rho_2 = b\sin\theta$, d'où $\sqrt{b^2-\rho_2^2} = b\cos\theta$, et $\sqrt{c^2-\rho_2^2} = \sqrt{c^2-b^2\sin^2\theta}$, on peut négliger $-b^2\sin^2\theta$ devant c^2, sous le dernier radical, ou remplacer $\sqrt{c^2-\rho_2^2}$ par c; tout le polynome E_2, de degré n, devient alors une fonction entière et rationnelle de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, qui peut être remplacée par une série limitée de sinus ou de cosinus d'arcs multiples de θ, le multiple le plus élevé ne surpassant pas $n\theta$. Quant aux polynomes E et E_1, ils conservent le même degré n, restent entiers, ra-

tionnels et composés de la même manière, le premier en ρ et $\sqrt{\rho^2-c^2}$, le second en ρ_1 et $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$.

Si l'on met en facteur commun dans la série (11) ainsi transformée, les produits EE_1, qui multiplient le cosinus et le sinus d'un même multiple $j\theta$, ce facteur, mis sous la forme ΣMEE_1, se composera d'une somme de produits EE_1 de deux polynomes symétriques et du même degré n. Ce degré varie d'un terme à l'autre, mais ne peut être moindre que j : car il est évident que, dans la série générale, un polynome E_2 transformé ne contiendra pas le sinus ou le cosinus de $j\theta$, si son degré primitif surpasse j.

Il suit de cette transformation de la série générale, que les séries partielles P_1, P'_1, ... R''_1, R'''_1, des huit groupes (10) sont nécessairement de la forme ΣMEE_1; E et E_1 sont des polynomes entiers, rationnels et composés de la même manière, l'un en ρ, l'autre en ρ_1; le degré n de chaque polynome varie d'un terme à l'autre; enfin, le sigma s'étend depuis une valeur de n qui dépend du multiple de θ correspondant, jusqu'à $n=\infty$.

Telle est la forme, essentielle et suffisante, de la série qui doit représenter les températures permanentes dans l'ellipsoïde de révolution aplati, lorsque sa surface est en contact avec des sources de chaleur et de froid. Mais pour que cette série soit complétement connue, il reste à déterminer les polynomes conjugués E et E_1 qui correspondent aux divers états partiels, définis par les groupes du développement (10).

§ V.

Le cas le plus simple de la question qui nous occupe, est celui où la fonction donnée des températures de la surface, serait indépendante de θ, ou ne contiendrait que ρ_1; c'est-à-dire celui où les foyers calorifiques seraient distribués de la même manière dans tous les plans méridiens. Il convient de traiter d'abord ce cas simple, avant d'aborder la solution générale.

Dans les circonstances supposées, la fonction représentant la tem-

pérature dans l'ellipsoïde est indépendante de θ, et l'équation aux différences partielles qu'elle doit vérifier se réduit à celle-ci :

$$(12) \qquad \rho_1^2 \frac{d^2 V}{d\varepsilon^2} + \rho^2 \frac{d^2 V}{d\varepsilon_1^2} = 0;$$

ε et ε_1 étant toujours les transcendantes (6). Le problème d'analyse, qu'il faut résoudre, consiste à trouver une fonction V de ρ et ρ_1 qui, vérifiant l'équation (12), se réduise à une fonction connue $\varphi(\rho_1)$ de ε_1, quand $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Les seuls termes du développement (10) qu'il faille conserver, sont $(P_0 + \sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}.R_0)$: la première série, P_0, correspond à une distribution des sources calorifiques, identiquement la même au-dessus et au-dessous de l'équateur; la seconde série, R_0, appartient à une autre distribution de ces sources, telle que deux points, placés symétriquement par rapport au plan de l'équateur, aient des températures égales en valeur absolue, mais de signes contraires. Or, la fonction φ peut toujours être décomposée en deux fonctions partielles, jouissant respectivement des deux conditions de symétrie, directe ou inverse, qui viennent d'être définies; l'une de ces fonctions partielles servira à déterminer la série P_0, l'autre la série R_0. Il faut considérer séparément les deux états particuliers qui correspondent à ces séries.

Lorsque les foyers calorifiques, déjà distribués de la même manière sur tous les méridiens, le sont en outre symétriquement au-dessus et au-dessous de l'équateur, la température V doit être exprimée par la seule série P_0, qui d'après les considérations des § III et IV, est nécessairement de la forme

$$(13) \qquad V = \sum_{n=0}^{n=\infty} MEE_1;$$

E et E_1 étant des polynomes rationnels en ρ^2 et ρ_1^2, du même degré $2n$, ayant même coefficients; et le sigma s'étendant à toutes les valeurs positives du nombre entier n. Pour que la série (13) puisse résoudre la question dont il s'agit ici, il faut que chaque produit EE_1 vérifie séparément l'équation (12). Or, si l'on pose dans cette équation $V = EE_1$, E ne dépendant que de ρ, et E_1 que de ρ_1, il vient

$$(14) \qquad \rho_1^2 E_1 \frac{d^2 E}{d\varepsilon^2} + \rho^2 E \frac{d^2 E_1}{d\varepsilon_1^2} = 0:$$

ce qui exige que l'on ait séparément

$$(15)\qquad \frac{d^2E}{d\varepsilon^2} - A\rho^2 E = 0, \quad \frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2} + A\rho_1^2 E_1 = 0;$$

A étant un coefficient constant, le même dans les deux équations.

Les transcendantes ε et ε_1 étant les fonctions de ρ et ρ_1 données par les relations (6), on a

$$\frac{dE}{d\varepsilon} = \frac{dE}{d\varrho}\rho\sqrt{\rho^2 - c^2}, \quad \frac{d^2E}{d\varepsilon^2} = \frac{d^2E}{d\varrho^2}(\rho^4 - c^2\rho^2) + \frac{dE}{d\varrho}(2\rho^3 - c^2\rho),$$
$$\frac{dE_1}{d\varepsilon_1} = \frac{dE_1}{d\varrho_1}\rho_1\sqrt{c^2 - \rho_1^2}, \quad \frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2} = \frac{d^2E_1}{d\varrho_1^2}(c^2\rho_1^2 - \rho_1^4) + \frac{dE_1}{d\varrho_1}(c^2\rho_1 - 2\rho_1^3);$$

et les équations (15) peuvent s'écrire ainsi

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2E}{d\varrho^2}(\rho^4 - c^2\rho^2) + \dfrac{dE}{d\varrho}(2\rho^3 - c^2\rho) = A\rho^2 E, \\ \dfrac{d^2E_1}{d\varrho_1^2}(\rho_1^4 - c^2\rho_1^2) + \dfrac{dE_1}{d\varrho_1}(2\rho_1^3 - c^2\rho_1) = A\rho_1^2 E_1. \end{cases}$$

La symétrie de ces deux équations indique que si l'on trouve un polynome E du degré n en ρ^2, et une valeur de A correspondante, qui vérifient la première, la même valeur de A et le polynome E, qu'on déduira de E en y changeant ρ^2 en ρ_1^2, vérifieront la seconde : ce qui confirme la symétrie prévue de la série (13).

§ VI.

Soit posé $E = \alpha_0\rho^{2n} + \alpha_1\rho^{2n-2} + \alpha_2\rho^{2n-4} + \ldots + \alpha_n$, dans la première des équations (16), il vient, en divisant par ρ^2, facteur commun à tous les termes, et en ordonnant le premier membre,

$$\begin{aligned} &2n(2n+1)\alpha_0\rho^{2n} + [(2n-1)(2n-2)\alpha_1 - (2n)^2c^2\alpha_0]\rho^{2n-2} \\ &\quad + [(2n-3)(2n-4)\alpha_2 - (2n-2)^2c^2\alpha_1]\rho^{2n-4} + \ldots \\ &\quad = A\alpha_0\rho^{2n} + A\alpha_1\rho^{2n-2} + A\alpha_2\rho^{2n-4} + \ldots. \end{aligned}$$

L'identification de ces deux polynomes donne d'abord $A = 2n(2n+1)$,

et les n relations

$$\begin{aligned}
&[A - (2n-2)(2n-1)]\alpha_1 + (2n)^2 c^2 \alpha_0 = 0,\\
&[A - (2n-4)(2n-3)]\alpha_2 + (2n-2)^2 c^2 \alpha_1 = 0,\\
&[A - (2n-6)(2n-5)]\alpha_3 + (2n-4)^2 c^2 \alpha_2 = 0, \ldots
\end{aligned}$$

Si l'on convient de représenter par le symbole A_j le produit $2j(2j+1)$, d'un nombre pair $2j$ par l'impair qui le suit, les valeurs des n coefficients $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, déduites des relations précédentes seront

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -\frac{(2n)^2}{A_n - A_{n-1}} c^2 \alpha_0,\\
\alpha_2 &= +\frac{(2n)^2 (2n-2)^2}{(A_n - A_{n-1})(A_n - A_{n-2})} c^4 \alpha_0,\\
\alpha_3 &= -\frac{(2n)^2 (2n-2)^2 (2n-4)^2}{(A_n - A_{n-1})(A_n - A_{n-2})(A_n - A_{n-3})} c^6 \alpha_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_n &= (-1)^n \frac{(2n)^2 (2n-2)^2 \ldots 4^2 . 2^2}{(A_n - A_{n-1})(A_n - A_{n-2}) \ldots (A_n - A_1) A_n} c^{2n} \alpha_n;
\end{aligned}$$

et l'on pourra supposer $\alpha_0 = 1$.

Ainsi $2n$ étant un nombre entier pair quelconque, on satisfera aux équations différentielles (15) ou (16), en prenant

$$A = 2n(2n+1) = A_n,$$

$$(17)\quad \begin{cases} E = \varrho^{2n} - \dfrac{(2n)^2}{A_n - A_{n-1}} c^2 \varrho^{2n-2} + \dfrac{(2n)^2 (2n-2)^2}{(A_n - A_{n-1})(A_n - A_{n-2})} c^4 \varrho^{2n-4} - \ldots (-1)^n \dfrac{(2n)^2 (2n-2)^2 \ldots 4^2 . 2^2}{(A_n - A_{n-1})(A_n - A_{n-2}) \ldots (A_n - A_1) A_n} c^{2n}, \\ E_1 = \varrho_1^{2n} - \dfrac{(2n)^2}{A_n - A_{n-1}} c^2 \varrho_1^{2n-2} + \dfrac{(2n)^2 (2n-2)^2}{(A_n - A_{n-1})(A_n - A_{n-2})} c^4 \varrho_1^{2n-4} - \ldots (-1)^n \dfrac{(2n)^2 (2n-2)^2 \ldots 4^2 . 2^2}{(A_n - A_{n-1})(A_n - A_{n-2}) \ldots (A_n - A_1) A_n} c^{2n}; \end{cases}$$

les polynomes E et E_1 ainsi définis se terminent évidemment au terme en c^{2n}.

§ VII.

La série (13) est maintenant connue, les deux polynomes conjugués E et E_1 de chacun de ses termes étant donnés par les formules (17) pour chaque valeur de n. Lorsque $\rho = \rho_0$, ou sur la surface de l'ellipsoïde, on a

$$V_0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} ME(\rho_0) E_1,$$

$E(\rho_0)$ désignant la constante à laquelle se réduit E pour $\rho = \rho_0$. Mais V_0, ou la température à la surface, est une fonction connue $\psi(\rho_1)$ de ρ_1 satisfaisant par hypothèse à la condition de symétrie directe du cas actuel; on doit donc avoir

$$(18) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} NE_1 = \psi(\rho_1);$$

N représentant pour simplifier le produit $ME(\rho_0)$; et il ne reste plus qu'à déterminer le coefficient général N, de telle sorte que la série (18) soit un des développements possibles de la fonction $\psi(\rho_0)$.

Or, si E_1 et E'_1 désignant deux polynomes différents, pris dans la série (18), de degrés $2n$ et $2n'$, ou correspondant à des valeurs différentes $A = 2n(2n+1)$, $A' = 2n'(2n'+1)$, ces deux polynomes vérifieront les équations

$$\frac{d^2E_1}{d\rho_1^2} + A\rho_1^2 E_1 = 0, \quad \frac{d^2E'_1}{d\rho_1^2} + A'\rho_1^2 E'_1 = 0.$$

d'où l'on conclut aisément

$$E_1 \frac{d^2E'_1}{d\rho_1^2} - E'_1 \frac{d^2E_1}{d\rho_1^2} = (A - A')\rho_1^2 E_1 E'_1;$$

si l'on multiplie cette équation par $d\rho_1 = \frac{d\rho_1}{\rho_1\sqrt{c^2 - \rho_1^2}}$, et que l'on intègre de $\rho_1 = 0$ à $\rho_1 = c$, le premier membre disparaîtra, car son intégrale indéfinie

$$\left(E_1 \frac{dE'_1}{d\rho_1} - E'_1 \frac{dE_1}{d\rho_1}\right), \text{ ou } \left(E_1 \frac{dE'_1}{d\rho_1} - E'_1 \frac{dE_1}{d\rho_1}\right)\rho_1\sqrt{c^2 - \rho_1^2},$$

s'évanouit aux deux limites, et l'on aura simplement

$$0 = (A - A')\int_0^c \frac{\rho_1 E_1 E'_1 d\rho_1}{\sqrt{c^2 - \rho_1^2}};$$

donc, excepté lorsque $A = A'$, on a

$$(19) \qquad \int_0^c \frac{\varrho_1 E_1 E'_1 d\varrho_1}{\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}} = 0.$$

Il suit de là qu'en multipliant l'équation (18) par le facteur $\frac{\varrho_1 E_1 d\varrho}{\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}}$; et intégrant de $\rho_1 = 0$ à $\rho_1 = c$, tous les termes du premier membre disparaîtront à l'exception de celui en E_1; ce qui donnera pour le coefficient N :

$$N = \frac{\int_0^c \frac{\psi(\varrho_1)\varrho_1 E_1 d\varrho_1}{\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}}}{\int_0^c \frac{\varrho_1 E_1^2 d\varrho_1}{\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}}},$$

et pour les séries (18) et (13),

$$(20) \quad \psi(\rho_1) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\int_0^c \frac{\psi(\varrho_1)\varrho_1 E_1 d\varrho_1}{\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}}}{\int_0^c \frac{\varrho_1 E_1^2 d\varrho_1}{\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}}} E_1, \quad V = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\int_0^c \frac{\psi(\varrho_1)\varrho_1 E_1 d\varrho_1}{\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}}}{\int_0^c \frac{\varrho_1 E_1^2 d\varrho_1}{\sqrt{c^2 - \varrho_1^2}}} \frac{E}{E(\varrho_0)} E_1,$$

formules qui complètent la solution, car la dernière est l'expression analytique de la loi cherchée.

§ VIII.

La solution précédente peut être exprimée d'une autre manière, en adoptant pour paramètres des ellipsoïdes (1), et des hyperboloïdes (2), les transcendantes (6) qui serviraient à exprimer les températures sur ces surfaces, prises comme systèmes de surfaces isothermes. Les équations (6) donnent en effectuant les intégrations indiquées

$$(21) \qquad c\varepsilon = \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{c}{\varrho}\right), \quad c\varepsilon_1 = \log \frac{\varrho_1}{c + \sqrt{c^2 - \varrho_1^2}};$$

d'où l'on conclut aisément

$$(22) \qquad \rho = \frac{c}{\cos c\varepsilon}, \quad \rho_1 = \frac{2c}{e^{c\varepsilon_1} + e^{-c\varepsilon_1}};$$

e étant la base des logarithmes népériens. Les limites de ρ_1 étant zéro et c, il suit de la seconde des relations (22), que les limites correspondantes de ε_1 seront l'infini et zéro.

La première des séries (20) prendra la forme suivante, en remarquant que $\psi(\rho_1)$ doit être maintenant considéré comme une fonction $f(\varepsilon_1)$ de ε_1,

$$(23)\qquad f(\varepsilon_1) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\int_0^\infty \frac{f(\varepsilon_1)\,E_1 d\varepsilon_1}{(e^{c\varepsilon_1}+e^{-c\varepsilon_1})^2}}{\int_0^\infty \frac{E_1^2 d\varepsilon_1}{(e^{c\varepsilon_1}+e^{-c\varepsilon_1})^2}}\,E_1,$$

et la température V sera donnée par la série

$$(24)\qquad V = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\int_0^\infty \frac{f(\varepsilon_1)\,E_1 d\varepsilon_1}{(e^{c\varepsilon_1}+e^{-c\varepsilon_1})^2}}{\int_0^\infty \frac{E_1^2 d\varepsilon_1}{(e^{c\varepsilon_1}+e^{-c\varepsilon_1})^2}}\,\frac{E}{E(\varepsilon_0)}\,E_1;$$

ε_0 étant la valeur de ε correspondante à $\rho = \rho_0$.

Les fonctions E et E_1 sont alors, pour chaque valeur de n, les séries limitées qui suivent : [A_j désignant toujours le produit $2j(2j+1)$]

$$(25)\qquad \begin{cases} E = \left(\frac{1}{\cos c\varepsilon}\right)^{2n} - \frac{(2n)^2}{A_n - A_{n-1}}\left(\frac{1}{\cos c\varepsilon}\right)^{2n-2} + \frac{(2n)^2(2n-2)^2}{(A_n - A_{n-1})(A_n - A_{n-2})}\left(\frac{1}{\cos c\varepsilon}\right)^{2n-4} - \ldots \\ \qquad (-1)^n \frac{(2n)^2(2n-2)^2\ldots 4^2.2^2}{(A_n - A_{n-1})\ldots(A_n - A_1)A_n}, \\ E_1 = \left(\frac{2}{e^{c\varepsilon_1}+e^{-c\varepsilon_1}}\right)^{2n} - \frac{(2n)^2}{A_n - A_{n-1}}\left(\frac{2}{e^{c\varepsilon_1}+e^{-c\varepsilon_1}}\right)^{2n-2} + \frac{(2n)^2(2n-2)^2}{(A_n - A_{n-1})(A_n - A_{n-2})}\left(\frac{2}{e^{c\varepsilon_1}+e^{-c\varepsilon_1}}\right)^{2n-4} - \ldots \\ \qquad (-1)^n \frac{(A_n - A_{n-1})\ldots(A_n - A_1)A_n}{(2n)^2(2n-2)^2\ldots 4^2.2^2}. \end{cases}$$

lesquelles vérifient respectivement les deux équations différentielles

$$(26)\qquad \frac{d^2E}{d\varepsilon^2} - \frac{2n(2n+1)c^2}{(\cos c\varepsilon)^2}E = 0, \quad \frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2} + \frac{2n(2n+1).4c}{(e^{c\varepsilon_1}+e^{-c\varepsilon_1})^2}E_1 = 0.$$

Toutes ces formules se simplifient quand on suppose la constante c égale à l'unité de longueur, ou quand on remplace $c\varepsilon$ et $c\varepsilon_1$ par de nouvelles variables.

§ IX.

Si l'on pose $c\varepsilon_1 = x$, $f(\varepsilon_1) = F(x)$, il résultera du paragraphe précédent un théorème d'analyse dont voici l'énoncé : n étant un nombre entier; $E_n(x)$ étant la série suivante de $n+1$ termes,

$$\left(\frac{2}{e^x+e^{-x}}\right)^{2n} - \frac{(2n)^2}{A_n - A_{n-1}}\left(\frac{2}{e^x+e^{-x}}\right)^{2n-2} + \frac{(2n)^2(2n-2)^2}{(A_n-A_{n-1})(A_n-A_{n-2})}\left(\frac{2}{e^x+e^{-x}}\right)^{2n-4} - \ldots$$
$$(-1)^n \frac{(2n)^2(2n-2)^2\ldots 4^2 \cdot 2^2}{(A_n - A_{n-1})\ldots(A_n - A_1)A_n} = E_n(x),$$

dans laquelle le symbole A_j représente le produit $2j(2j+1)$, et qui vérifie l'équation

$$\frac{d^2E_n(x)}{dx^2} + \frac{4A_n}{(e^x+e^{-x})^2}E_n(x) = 0;$$

enfin $F(x)$ représentant une fonction de x telle que $F(-x) = F(x)$; on aura identiquement

$$(27) \qquad F(x) = \sum_0^{n=\infty} \frac{\int_0^\infty \frac{F(\alpha)E_n(\alpha)\,d\alpha}{(e^\alpha+e^{-\alpha})^2}}{\int_0^\infty \frac{[E_n(\alpha)]^2\,d\alpha}{(e^\alpha+e^{-\alpha})^2}} E_n(x).$$

Ainsi une fonction paire d'une seule variable se trouve développée par la formule (27) en une série d'exponentielles réelles. La solution d'un autre cas particulier va nous conduire à une formule analogue à celle (27), pour une fonction impaire, ou qui change de signe avec sa variable en conservant la même valeur absolue.

§ X.

Lorsqu'à la surface de l'ellipsoïde, les températures données, toujours distribuées de la même manière sur tous les méridiens, sont positives au-dessus de l'équateur, négatives au-dessous, en conservant la même valeur absolue pour deux points symétriques par rapport à ce plan, la température V doit être exprimée par la série

$R_0\sqrt{\rho^2-c^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}$ du développement (10). Il résulte des §§ III et IV que cette série sera aussi de la forme (13); mais alors E et E_1 devront contenir respectivement les facteurs $\sqrt{\rho^2-c^2}$ et $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$. Le produit EE_1 doit toujours vérifier séparément l'équation (12); ce qui exige que E et E_1 satisfassent encore à des équations de la forme (15).

Soit posé $E=Q\sqrt{\rho^2-c^2}$, $E_1=Q_1\sqrt{c^2-\rho_1^2}$; Q et Q_1 seront nécessairement des polynomes entiers et rationnels en ρ^2 et ρ_1^2. On a successivement [relations (6)]:

$$\frac{dE}{d\varepsilon}=\frac{dQ}{d\varrho}\varrho(\varrho^2-c^2)+Q\varrho^2,\quad \frac{d^2E}{d\varepsilon^2}=\left[\frac{d^2Q}{d\varrho^2}(\varrho^4-c^2\varrho^2)+(4\varrho^3-c^2\varrho)\frac{dQ}{d\varrho_1}+2\varrho^3Q\right]\sqrt{c^2-\varrho^2},$$

$$\frac{dE_1}{d\varepsilon_1}=\frac{dQ_1}{d\varrho_1}\varrho_1(c^2-\varrho_1^2)-Q_1\varrho_1^2,\quad \frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2}=\left[\frac{d^2Q_1}{d\varrho_1^2}(c^2\varrho_1^2-\varrho_1^4)+(c^2\varrho_1-4\varrho_1^3)\frac{dQ_1}{d\varrho_1}-2\varrho_1^2Q_1\right]\sqrt{c^2-\varrho_1^2};$$

et les équations différentielles (15) deviennent, en changeant les signes de la seconde, et supprimant les facteurs communs $\sqrt{\rho^2-c^2}$ et $\sqrt{c^2-\rho_1^2}$:

$$(28)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2Q}{d\varrho^2}(\rho^4-c^2\rho^2)+\dfrac{dQ}{d\varrho}(4\rho^3-c^2\rho)=(A-2)\rho^2Q,\\[2mm] \dfrac{d^2Q_1}{d\varrho_1^2}(\rho_1^4-c^2\rho_1^2)+\dfrac{dQ_1}{d\varrho_1}(4\rho_1^3-c^2\rho_1]=(A-2)\rho_1^2Q_1. \end{cases}$$

D'après la symétrie de ces équations, si l'on trouve un polynome Q en ρ^2, et une valeur correspondante de A qui vérifient la première, il suffira de changer dans Q, ρ^2 en ρ_1^2, pour avoir son conjugué Q_1; cette similitude de forme était prévue.

Soit posé $Q=\alpha_0\rho^{2n}+\alpha_1\rho^{2n-2}+\ldots+\alpha_n$, dans la première des équations, (28) il viendra, en divisant par ρ^2 et ordonnant le premier membre,

$$\begin{aligned} 2n(2n+3)\alpha_0\varrho^{2n}&+[(2n-2)(2n+1)\alpha_1-(2n)^2c^2\alpha_0]\varrho^{2n-2}\\ &+[(2n-4)(2n-1)\alpha_2-(2n-2)^2c^2\alpha_1]\varrho^{2n-4}+\ldots\\ &=(A-2)\alpha_0\varrho^{2n}+(A-2)\alpha_1\varrho^{2n-2}+(A-2)\alpha_2\varrho^{2n-4}+\ldots \end{aligned}$$

L'identification de ces deux polynomes donne $(A-2)=2n(2n+3)$, et les n relations

$$(A-2)\alpha_1=(2n-2)(2n+1)\alpha_1-(2n)^2c^2\alpha_0,\quad (A-2)\alpha_2=(2n-4)(2n-1)\alpha_2-(2n-2)^2c^2\alpha_1,$$
$$(A-2)\alpha_3=(2n-6)(2n-3)\alpha_3-(2n-4)^2c^2\alpha_2,\ldots$$

d'où l'on conclut d'abord $A=2n(2n+3)+2=(2n+2)(2n+1)$

Ajoutons respectivement aux deux membres des n relations précédentes $2\alpha_1$, $2\alpha_2$, $2\alpha_3$;... remarquons que

$$(2n-2)(2n+1)+2=2n(2n-1),\quad (2n-4)(2n-1)+2=(2n-2)(2n-3),$$
$$(2n-6)(2n-3)+2=(2n-4)(2n-5)\ldots;$$

enfin convenons que le symbole A'_j désignera, pour simplifier, le produit $2j(2j-1)$, d'un nombre pair $2j$ par l'impair qui le précède; on aura plus simplement

$$A=A'_{n+1},\quad (A'_{n+1}-A'_n)\alpha_1+(2n)^2c^2\alpha_0=0,\quad (A'_{n+1}-A'_{n-1})\alpha_2+(2n-2)^2c^2\alpha_1=0,$$
$$(A'_{n+1}-A'_{n-2})\alpha_3+(2n-4)^2c^2\alpha_2=0,\ldots$$

relations d'où l'on déduit pour les valeurs des n coefficients α_1, α_2, $\alpha_3,\ldots\alpha_n$:

$$\alpha_1=-\frac{(2n)^2}{A'_{n+1}-A'_n}c^2\alpha_0,$$
$$\alpha_2=+\frac{(2n)^2(2n-2)^2}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A'_{n-1})}c^4\alpha_0,$$
$$\alpha_3=-\frac{(2n)^2(2n-2)^2(2n-4)^2}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A'_{n-1})(A'_{n+1}-A'_{n-2})}c^6\alpha_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_n=(-1)^n\frac{(2n)^2(2n-2)^2(2n-4)^2\ldots4^2.2^2}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A'_{n-1})(A'_{n+1}-A'_{n-2})\ldots(A'_{n+1}-A'_1)}c^{2n}\alpha_0,$$

et l'on pourra supposer $\alpha_0=1$.

§ XI.

Ainsi, dans le cas actuel, chaque terme de la série (13) est le produit des deux fonctions E et E_1, données pour chaque valeur du nombre pair $2n$, par les séries limitées qui suivent :

$$(29)\quad \begin{cases} E=\Big[\rho^{2n}-\dfrac{(2n)^2}{A'_{n+1}-A'_n}c^2\rho^{2n-2}+\dfrac{(2n)^2(2n-2)^2}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A'_{n-1})}c^4\rho^{2n-4}-\ldots \\ \qquad (-1)^n\dfrac{(2n)^2(2n-2)^2\ldots4^2.2^2}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A'_{n-1})\ldots(A'_{n+1}-A'_1)}c^{2n}\Big]\sqrt{\rho^2-c^2}, \\ E_1=\Big[\rho_1^{2n}-\dfrac{(2n)^2}{A'_{n+1}-A'_n}c^2\rho_1^{2n-2}+\dfrac{(2n)^2(2n-2)^2}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A'_{n-1})}c^4\rho_1^{2n-4}-\ldots \\ \qquad (-1)^n\dfrac{(2n)^2(2n-2)^2\ldots4^2.2^2}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A'_{n-1})\ldots(A'_{n+1}-A'_1)}c^{2n}\Big]\sqrt{c^2-\rho_1^2}; \end{cases}$$

dans lesquelles le symbole A'_j désigne le produit $2j(2j-1)$, et qui vérifient respectivement les deux équations différentielles

$$\frac{d^2E}{d\varepsilon^2} - (2n+2)(2n+1)\rho^2 E = 0, \quad \frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2} + (2n+2)(2n+1)\rho_1 E_1 = 0.$$

On peut remarquer de suite que la fonction E_1 (29) s'évanouit à la limite c de ρ_1, et que $\frac{dE_1}{d\varepsilon_1}$, ou $\left[\frac{dQ_1}{d\varepsilon_1}\rho_1(c^2-\rho_1^2) - Q\rho_1^2\right]$, est nul pour $\rho_1 = 0$. D'où il suit que E_1 et E'_1 désignant deux polynomes E_1 différents, donnés par la même formule (29), l'expression.... $\left(E_1\frac{dE'_1}{d\varepsilon_1} - E'_1\frac{dE_1}{d\varepsilon_1}\right)$, est nulle pour les deux limites de ρ_1. Ce théorème permet d'appliquer au cas actuel les raisonnements du § VII. On démontre ainsi que l'équation (19) a lieu lorsque E_1 et E'_1 sont donnés par les formules (29). Les séries (20) comprennent donc aussi la nouvelle solution, en choisissant les valeurs de E et E_1, non plus dans les formules (17), mais dans celles (29).

Les séries (23) et (24), aux paramètres ε et ε_1, restent aussi les mêmes; mais les formules qui déterminent les fonctions E et E_1 de ces séries, diffèrent de celles (25) : on déduit des équations (22)

$$(30) \quad \sqrt{\rho^2 - c^2} = c\frac{\sin c\varepsilon}{\cos c\varepsilon}, \quad \sqrt{c^2 - \rho_1^2} = c\frac{e^{c\varepsilon_1} - e^{-c\varepsilon_1}}{e^{c\varepsilon_1} + e^{-c\varepsilon_1}};$$

et les quatre valeurs (22) et (30) transforment ainsi en ε et ε_1, les fonctions E et E_1 (29) (en supprimant le facteur commun constant c^{2n+1}, comme inutile) :

$$(31)\quad \begin{cases} E = \left[\left(\frac{1}{\cos c\varepsilon}\right)^{2n} - \frac{(2n)^2}{A'_{n+1}-A'_n}\left(\frac{1}{\cos c\varepsilon}\right)^{2n-2} + \frac{(2n)^2(2n-2)^2}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A'_{n-1})}\left(\frac{1}{\cos c\varepsilon}\right)^{2n-4} - \ldots \right. \\ \qquad \left. (-1)^n \frac{(2n)^2(2n-2)^2\ldots 4^2.2^2}{(A'_{n+1}-A'_n)\ldots(A'_{n+1}-A'_1)}\right] \frac{\sin c\varepsilon}{\cos c\varepsilon}, \\ E_1 = \left[\left(\frac{2}{e^{c\varepsilon_1}+e^{-c\varepsilon_1}}\right)^{2n} - \frac{(2n)^2}{A'_{n+1}-A'_n}\left(\frac{2}{e^{c\varepsilon_1}+e^{-c\varepsilon_1}}\right)^{2n-2} + \frac{(2n)^2(2n-2)^2}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A'_1)}\left(\frac{2}{e^{c\varepsilon_1}+e^{-c\varepsilon_1}}\right)^{2n-4} - \ldots \right. \\ \qquad \left. (-1)^n \frac{(2n)^2(2n-2)^2\ldots 4^2.2^2}{(A'_{n+1}-A'_n)\ldots(A'_{n+1}-A'_{n-1})}\right] \frac{e^{c\varepsilon_1} - e^{-c\varepsilon_1}}{e^{c\varepsilon_1}+e^{-c\varepsilon_1}}. \end{cases}$$

Ces fonctions, qu'il faut introduire dans les séries (23) et (24), pour le cas actuel, vérifient respectivement les deux équations différen-

tielles

$$\frac{d\,E}{d\varepsilon^2} - \frac{(2n+1)(2n+2)c^2}{(\cos c\varepsilon)^2}\,E = 0, \quad \frac{d^2E_1}{d\varepsilon_1^2} + \frac{(2n+1)(2n+2)4c^2}{(e^{c\varepsilon_1}+e^{-c\varepsilon_1})^2}\,E_1 = 0.$$

Les séries (23) et (24) et les formules (31) peuvent toujours être simplifiées en remplaçant $c\varepsilon$ et $c\varepsilon_1$ par de nouvelles variables.

§ XII.

Si l'on pose $c\varepsilon_1 = x$, $f(\varepsilon_1) = F(x)$, il résultera de la série (23), et des dernières formules du § XI, un théorème d'analyse dont voici l'énoncé : n étant un nombre entier; A'_j désignant généralement le produit $2j(2j-1)$, $\mathcal{E}_n(x)$ étant la série suivante, de $(n+1)$ termes,

$$\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)\left[\left(\frac{2}{e^x+e^{-x}}\right)^{2n} - \frac{(2n)^2}{A'_{n+1}-A'_n}\left(\frac{2}{e^x+e^{-x}}\right)^{2n-2} + \frac{(2n)^2(2n-2)^2}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A'_{n-1})}\left(\frac{2}{e^x+e^{-x}}\right) - \ldots\right.$$
$$\left. (-1)^n\frac{(2n)^2(2n-2)^2\ldots 4^2.2^2}{(A'_{n+1}-A'_n)\ldots(A'_{n+1}-A'_{n-1})}\right] = \mathcal{E}_n(x),$$

qui vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d\,\mathcal{E}_n(x)}{dx} + \frac{4A_{n+1}}{(e^x+e^{-x})^2}\,\mathcal{E}_n(x) = 0;$$

enfin $F(x)$ étant une fonction telle que $F(-x) = -F(x)$; on a identiquement

$$(32) \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\displaystyle\int_0^\infty \frac{F(\alpha)\,\mathcal{E}_n(\alpha)\,d\alpha}{(e^\alpha+e^{-\alpha})^2}}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{[\mathcal{E}_n(\alpha)]^n\,d\alpha}{(e^\alpha+e^{-\alpha})^2}}\,\mathcal{E}_n(x).$$

La formule (32) donne ainsi le développement d'une fonction impaire en série d'exponentielles réelles; elle est analogue à celle (27) du § IX, qui suppose la fonction paire.

Les deux cas simples traités dans les §§ V, VI, ... X, XI, avaient pour but de conduire aux formules nouvelles (27) et (32), en éloignant la variable θ, à laquelle correspond un genre de développement connu depuis long-temps, et qui eût compliqué les calculs, sans rien ajouter à la rigueur de la démonstration. Mais pour trouver la solution du problème général qui fait l'objet de ce Mémoire, et dont l'énoncé se trouve à la fin du § I, il faut reprendre la question au point où la laissait le § IV, et conserver toute sa généralité à la loi donnée des températures de l'ellipsoïde.

§ XIII.

Les deux paragraphes V et VI donnent la forme essentielle de la série P_0 qui correspond à $i = 0$, dans le premier groupe du développement (8); des calculs analogues conduisent à la détermination de la série P_i qui multiplie $\cos 2i\theta$ dans le même groupe, lorsque le nombre entier i n'est pas zéro. Cette série P_i est de la forme ΣMEE_1, comme on l'a vu au § IV; E et E_1 doivent être essentiellement des polynomes en ρ^2 et ρ_1^2, du même degré et ayant les mêmes coefficients; ces fonctions doivent être déterminées par la condition que chaque produit $EE_1 \cos 2i\theta$ vérifie séparément l'équation aux différences partielles (7), afin que les coefficients M, restant arbitraires, puissent être employés à l'introduction des températures données de la surface.

Si dans l'équation (7) on pose $V = EE_1 \cos 2i\theta$, il vient, en supprimant le facteur $\cos 2i\theta$,

$$(33) \qquad \rho_1 E_1 \frac{d^2 E}{d\rho^2} + \rho^2 E \frac{d^2 E_1}{d\rho_1^2} = 4i^2 c^2 (\rho^2 - \rho_1^2) EE_1;$$

d'où il est facile de conclure qu'on doit avoir séparément

$$\frac{d^2 E}{d\rho^2} = (A\rho^2 - 4i^2 c^2) E, \quad \frac{d^2 E_1}{d\rho_1^2} = (4i^2 c^2 - A\rho_1^2) E_1;$$

A étant un coefficient constant, le même dans les deux équations. Ou bien, remplaçant les transcendantes ε et ε_1 par leurs valeurs (6), il

faut que E et E_1, fonctions de ρ^2 et ρ_1^2, vérifient les deux équations différentielles

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2E}{d\xi^2}(\rho^4 - c^2\rho^2) + \dfrac{dE}{d\xi}(2\rho^3 - c^2\rho) = (A\rho^2 - (2i)^2c^2)E, \\ \dfrac{d^2E_1}{d\xi_1^2}(\rho_1^4 - c^2\rho_1^2) + \dfrac{dE_1}{d\xi_1}(2\rho_1^3 - c^2\rho_1) = (A\rho_1^2 - (2i)^2c^2)E_1, \end{cases}$$

que l'on déduit des précédentes par le calcul qui transformait plus haut les équations (15) en celles (16). La symétrie des formules (34) indique que si l'on trouve un polynome E en ρ^2, et une valeur de A, qui vérifient la première, il suffira de changer ρ^2 en ρ_1^2 dans E, pour obtenir le polynome conjugué E_1 qui pour la même valeur de A doit vérifier la seconde.

D'après la forme assignée à E par les considérations des paragraphes III et IV, $\dfrac{dE}{d\xi}$ est nécessairement divsible par ρ; le premier membre de l'équation (34) en E, sera donc divisible par ρ^2, et comme dans le second membre i n'est pas nul, il s'ensuit que E doit être divisible par une certaine puissance ρ^{2k} de ρ. D'après cela, soit pris pour E le polynome incomplet

$$E = \alpha\rho^{2n} + \beta\rho^{2n-2} + \ldots + \lambda\rho^{2k-2} + \mu\rho^{2k};$$

sa substitution dans la première des équations (34) donnera, en ordonnant le premier membre,

$$\begin{aligned} &(2n+1)(2n)\alpha\xi^{2n+2} + [(2n-2)(2n-1)\beta - (2n)^2c^2\alpha]\xi^{2n} + [(2n-4)(2n-3)\gamma - (2n-2)^2c^2\beta]\xi^{2n-2} + \ldots \\ &\quad \ldots + [(2k)(2k+1)\mu - (2k+2)^2c^2\lambda]\xi^{2k+2} - (2k)^2c^2\mu\xi^{2k} \\ &= A\alpha\xi^{2n+2} + [A\beta - (2i)^2c^2\alpha]\xi^{2n} + [A\gamma - (2i)^2c^2\beta]\xi^{2n-2} + \ldots + [A\mu - (2i)^2c^2\lambda]\xi^{2k+2} - (2i)^2c^2\mu\xi^{2k}. \end{aligned}$$

et l'identification de ces polynomes exigera que l'on ait : par les premiers termes $A = 2n(2n+1)$, et par les derniers $k = i$; puis, en reprenant la notation $A_j = 2j(2j+1)$, les coefficients seront déterminés par les relations

$$(A_n - A_{n-1})\beta + [(2n)^2 - (2i)^2]c^2\alpha = 0, \quad (A_n - A_{n-2})\gamma + [(2n-2)^2 - (2i)^2]c^2\beta = 0 \ldots$$

qui conduisent aux valeurs suivantes :

$$\beta = -\frac{(2n)^2-(2i)^2}{A_n - A_{n-1}} c^2\alpha,$$

$$\gamma = +\frac{[(2n)^2-(2i)^2][(2n-2)^2-(2i)^2]}{(A_n-A_{n-1})(A_n-A_{n-2})} c^4\alpha,$$

. . . . . .

$$u = (-1)^{n-i}\frac{[(2n)^2-(2i)^2][(2n-2)^2-(2i)^2]\ldots[(2i+2)^2-(2i)^2]}{(A_n-A_{n-1})(A_n-A_{n-2})\ldots(A_n-A_i)} c^{2(n-i)}\alpha.$$

dans lesquelles on pourra supposer $\alpha = 1$.

Ainsi chaque terme de P_i contiendra le produit des deux fonctions suivantes :

$$(35)\quad \begin{cases} E = \xi^{2n} - \dfrac{(2n)^2-(2i)^2}{A_n-A_{n-1}} c^2\xi^{2n-2} + \dfrac{[(2n)^2-(2i)^2][(2n-2)^2-(2i)^2]}{(A_n-A_{n-1})(A_n-A_{n-2})} c^4\xi^{2n-4} - \ldots \\ \qquad (-1)^{n-i}\dfrac{[(2n)^2-(2i)^2]\ldots[(2i+2)^2-(2i)^2]}{(A_n-A_{n-1})\ldots(A_n-A_i)} c^{2(n-i)}\xi^{2i}. \\ E_1 = \xi_1^{2n} - \dfrac{(2n)^2-(2i)^2}{A_n-A_{n-1}} c^2\xi_1^{2n-2} + \dfrac{[(2n)^2-(2i)^2][(2n-2)^2-(2i)^2]}{(A_n-A_{n-1})(A_n-A_{n-2})} c^4\xi_1^{2n-4} - \ldots \\ \qquad (-1)^{n-i}\dfrac{[(2n)^2-(2i)^2]\ldots[(2i+2)^2-(2i)^2]}{(A_n-A_{n-1})\ldots(A_n-A_i)} c^{2(n-i)}\xi_1^{2i}. \end{cases}$$

et la série P_i s'étendra à toutes les valeurs déduites des formules précédentes, en prenant pour n les nombres entiers plus grands que i.

Il est évident que la série P'', dans le quatrième groupe du développement (10), ne pourra différer que par ses coefficients arbitraires de celle P_i dans le premier; car on retomberait sur les mêmes équations (33) et (34), en introduisant la vérification nécessaire de l'équation (7). On peut donc poser généralement

$$(36)\qquad P''_i = P_i = \sum_{n=i}^{n=\infty} MEE_1,$$

en prenant pour composer cette série tous les groupes de valeurs des polynomes E et E_1 correspondant à la même valeur de i, et donnés par les formules (35), lesquelles comprennent celles (17) lorsque $i = 0$.

§ XIV.

Les séries P'_i, P''_i, qui correspondent au sinus et au cosinus du même multiple $(2i+1)\theta$, dans le second et le troisième groupe du développement (10), ont aussi la même composition. On a vu, §§ III et IV, que ces séries doivent être de la forme ΣMEE_1, E et E_1 étant des polynomes qui ne contiennent que des puissances impaires de ρ et ρ_1, du même degré, et ayant mêmes coefficients. La vérification nécessaire de l'équation (7) par chaque terme séparé $EE_1 \sin(2i+1)\theta$, ou $EE_1 \cos(2i+1)\theta$, exige que les deux fonctions E et E_1, satisfassent aux deux équations,

$$(37)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2E}{d\rho^2}(\rho^4 - c^2\rho^2) + \dfrac{dE}{d\rho}(2\rho^3 - c^2\rho) = [A\rho^2 - (2i+1)^2c^2]E, \\ \dfrac{d^2E_1}{d\rho_1^2}(\rho_1^4 - c^2\rho_1^2) + \dfrac{dE_1}{d\rho_1}(2\rho_1^3 - c^2\rho_1) = [A\rho_1^2 - (2i+1)^2c^2]E_1, \end{cases}$$

lesquelles remplacent ici celles (34), et qu'on obtient par le même calcul. Il suffit encore de chercher le polynome E et la valeur de A qui doivent vérifier la première des équations (37); le polynome E_1 se déduisant de celui E en y changeant ρ en ρ_1.

Soit pris pour E le polynome impair et incomplet..... $\alpha\rho^{2n+1} + \beta\rho^{2n-1} + \ldots + \lambda\rho^{2k+3} + \mu\rho^{2k+1}$; sa substitution dans la première des équations (37) conduit encore à identifier deux polynomes; pour que leurs premiers termes soient les mêmes, il faut que l'on ait $A = (2n+1)(2n+2)$; pour que leurs derniers termes se détruisent, il faut que $k = i$; puis en reprenant la notation $A' = 2j(2j-1)$, l'identification des termes intermédiaires donne les relations suivantes :

$$(A'_{n+1} - A'_n)\beta + [(2n+1)^2 - (2i+1)^2]c^2\alpha = 0,\quad (A'_{n+1} - A'_{n-1})\gamma + [(2n-1)^2 - (2i+1)^2]c^2\beta = 0,$$
$$\ldots (A'_{n+1} - A'_{i+1})\mu + [(2i+3)^2 - (2i+1)^2]c^2\lambda = 0;$$

d'où l'on conclut, pour les coefficients du polynome E, les valeurs

$$\beta = -\frac{(2n+1)^2-(2i+1)^2}{A'_{n+1}-A'_n}\, c^2\alpha,$$

$$\gamma = +\frac{[(2n+1)^2-(2i+1)^2]\,[(2n-1)^2-(2i+1)^2]}{(A'_{n+1}-A'_n)\,(A'_{n+1}-A'_{n-1})}\, c^4\alpha,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varkappa = (-1)^{n-i}\frac{[(2n+1)^2-(2i+1)^2][(2n-1)^2-(2i+1)^2]\ldots[(2i+3)^2-(2i+1)^2]}{(A'_{n+1}-A'_n)\,(A'_{n+1}-A'_{n-1})\ldots(A'_{n+1}-A'_{i+1})}\, c^{2n-2i}\alpha.$$

dans lesquelles on peut supposer $\alpha = 1$.

Ainsi les séries P'_i, P''_i, seront encore représentées par la serie symbolique (36), avec les mêmes indices au sigma ; mais les fonctions conjuguées E et E_1 de chaque terme, au lieu d'être données par les formules (35), le seront par celles-ci :

$$(38)\quad \begin{cases} E = \varrho^{2n+1} - \dfrac{(2n+1)^2-(2i+1)^2}{A'_{n+1}-A'_n}\, c\,\varrho^{2n-1} + \ldots \\ \qquad + (-1)^{n-i}\dfrac{[(2n+1)^2-(2i+1)^2]\ldots[(2i+3)^2-(2i+1)^2]}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A'_{n-1})\ldots(A'_{n+1}-A'_{i+1})}\, c^{2n-2i}\varrho^{2i+1} \\ E_1 = \varrho_1^{2n+1} - \dfrac{(2n+1)^2-(2i+1)^2}{A'_{n+1}-A'_n}\, c\,\varrho^{2n-1} + \ldots \\ \qquad + (-1)^{n-i}\dfrac{[(2n+1)^2-(2i+1)^2]\ldots[(2i+3)^2-(2i+1)^2]}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A'_{n-1})\ldots(A'_{n+1}-A'_{i+1})}\, c^{2n-2i}\varrho_1^{2i+1}, \end{cases}$$

en prenant successivement pour n tous les nombres entiers plus grands que i.

§ XV.

Les séries qui multiplient le cosinus et le sinus de $2i\theta$, dans le cinquième et le huitième groupe du développement (10), ont la même composition. D'après les §§ III et IV, ces séries sont nécessairement de la forme $\sum MEE_1$, dans laquelle $E = Q\sqrt{\rho^2-c^2}$, $E_1 = Q_1\sqrt{c^2-\rho}$, Q et Q_1 étant des polynomes en ρ^2 et ρ_1^2, du même degré, et ayant mêmes coefficients. Ces polynomes doivent être déterminés par la condition que chaque produit $QQ_1\sqrt{\rho^2-c^2}\sqrt{c^2-\rho_1}\cos 2i\theta$, ou $QQ_1\sqrt{\rho^2-c^2}\sqrt{c^2-\rho_1^2}\sin 2i\theta$, vérifie l'équation (7); ce qui conduit aux deux équations séparées :

$$(39)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2Q}{d\varrho^2}(\rho^4-c^2\rho^2)+\dfrac{dQ}{d\varrho}(3\rho^3-c^2\rho)=[(A-2)\rho^2-(2i)^2c^2]Q, \\ \dfrac{d^2Q_1}{d\varrho_1^2}(\rho_1^4-c^2\rho_1^2)+\dfrac{dQ_1}{d\varrho_1}(3\rho_1^3-c^2\rho_1)=[(A-2)\rho_1^2-(2i)^2c^2]Q_1, \end{cases}$$

qu'on obtient en combinant les calculs des §§ XIII et X.

Si l'on substitue à Q, dans la première équation (39), un polynome incomplet du degré n en ρ^2, et que l'on identifie les deux membres, on trouve que A doit être égal à $(2n+2)(2n+1)$; que Q ne doit pas contenir de puissances de ρ^2 intérieures à ρ^{2i}; et l'on obtient en outre un nombre suffisant de relations qui donnent les valeurs des coefficients du polynome Q, par des calculs analogues à ceux du § X.

On démontre ainsi que la valeur de V (10), limitée au cinquième ou au huitième groupe, est de la forme

$$V=\sum_{i=0}^{i=\infty}\begin{pmatrix}\cos 2i\vartheta\\ \text{ou}\\ \sin 2i\vartheta\end{pmatrix}\sum_{n=1}^{n=\infty}MEE_1,$$

les fonctions conjuguées E et E_1 étant données par les formules

$$(40)\quad \begin{cases} E=\Bigg[\varrho^{2n}-\dfrac{(2n)^2-(2i)^2}{A'_{n+1}-A'_n}c^2\varrho^{2n-2}+\ldots \\ \qquad (-1)^{n-i}\dfrac{[(2n)^2-(2i)^2][(2n-2)^2-(2i)^2]\ldots[(2i+2)^2-(2i)^2]}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A'_{n-1})\ldots(A'_{n+1}-A'_{i+1})}c^{2n-2i}\varrho^{2i}\Bigg]\sqrt{\varrho^2-c^2}, \\ E_1=\Bigg[\varrho_1^{2n}-\dfrac{(2n)^2-(2i)^2}{A'_{n+1}-A'_n}c^2\varrho_1^{2n-2}+\ldots \\ \qquad (-1)^{n-i}\dfrac{[(2n)^2-(2i)^2][(2n-2)^2-(2i)^2]\ldots[(2i+2)^2-(2i)^2]}{(A'_{n+1}-A'_n)(A'_{n+1}-A_{n-1})\ldots(A'_{n+1}-A'_{i+1})}c^{2n-2i}\varrho_1^{2i}\Bigg]\sqrt{c^2-\varrho_1^2}, \end{cases}$$

lesquelles donnent celles (29) lorsque $i=0$; le symbole A'_j représentant toujours le produit $2j(2j-1)$.

Enfin on démontre, de la même manière, que la fonction V(10), limitée au sixième, ou au septième groupe, est de la forme

$$V=\sum_{i=0}^{i=\infty}\begin{pmatrix}\sin(2i+1)\vartheta\\ \text{ou}\\ \cos(2i+1)\vartheta\end{pmatrix}\sum_{n=1}^{n=\infty}MEE_1,$$

les facteurs conjugués E et E_1 étant déduits des formules

$$(41)\begin{cases} E = \left[\varrho^{2n+1} - \dfrac{(2n+1)^2-(2i+1)^2}{A_{n+1}-A_n}\,\varrho^{2n-1} + \dots \right. \\ \qquad \left. (-1)^{n-i}\dfrac{[(2n+1)^2-(2i+1)^2][(2n-1)^2-(2i+1)^2]\dots[(2i+3)^2-(2i+1)^2]}{(A_{n+1}-A_n)(A_{n+1}-A_{n-1})\dots(A_{n+1}-A_{i+1})}\,\varrho^{2n-1}\varrho^{2i+1}\right]\sqrt{\varrho^2-\varrho_1^2} \\ E_1 = \left[\varrho^{2i+1} - \dfrac{(2n+1)^2-(2i+1)^2}{A_{n+1}-A_n}\,\varrho^{2n-1} + \dots \right. \\ \qquad \left. (-1)^{n-i}\dfrac{[(2n+1)^2-(2i+1)^2][(2n-1)^2-(2i+1)^2]\dots[(2i+3)^2-(2i+1)^2]}{(A_{n+1}-A_n)(A_{n+1}-A_{n-1})\dots(A_{n+1}-A_{i+1})}\,\varrho^{2n-1}\varrho^{2i+1}\right]\sqrt{\varrho^2-\varrho_1^2}, \end{cases}$$

le symbole A_j représentant toujours le produit $2j(2j+1)$.

§ XVI.

En résumé : si l'on ne désigne par la caractéristique E que les polygones (35) et (38) qui sont totalement rationnels en ρ et ρ_1, en adoptant la nouvelle caractéristique $\mathcal{E}$ pour représenter les fonctions (40) et (41) qui contiennent un facteur radical ; si en outre on convient d'affecter d'un accent, placé en haut, les polynomes (38) et (40), dont les coefficients présentent le symbole $A'_j = 2j(2j-1)$, et de laisser sans accent les fonctions (35) et (41) qui s'expriment à l'aide du symbole $A_j = 2j(2j+1)$; la série générale V(10), déterminée par la condition que tous les termes vérifient séparément l'équation aux différences partielles (7), sera

$$(42)\begin{cases} V = \sum_{i=0}^{i=\infty}\cos 2i\theta \sum_{n=i}^{n=\infty} ME_1F_1 + \sum_{i=0}^{i=\infty}\sin(2i+1)\theta \sum_{n=i}^{n=\infty} M'E'E'_1 + \sum_{i=0}^{i=\infty}\cos(2i+1)\theta \sum_{n=i}^{n=\infty} M'E'E_1 + \sum_{i=0}^{i=\infty}\sin 2i\theta \sum_{n=i}^{n=\infty} M'EE \\ + \sum_{i=0}^{i=\infty}\cos 2i\theta \sum_{n=i}^{n=\infty} \mathfrak{M}\mathcal{E}'\mathcal{E}'_1 + \sum_{i=0}^{i=\infty}\sin(2i+1)\theta \sum_{n=i}^{n=\infty} \mathfrak{M}'\mathcal{E}\mathcal{E}_1 + \sum_{i=0}^{i=\infty}\cos(2i+1)\theta \sum_{n=i}^{n=\infty} \mathfrak{M}\mathcal{E}\mathcal{E}_1 + \sum_{i=0}^{i=\infty}\sin 2i\theta \sum_{n=i}^{n=\infty} \mathfrak{M}'\mathcal{E}'\mathcal{E} \end{cases}$$

Et cette série (42) aura la forme, essentielle et suffisante, qui convient à la loi des températures permanentes de l'ellipsoïde de révolution aplati, quand sa surface est en contact avec des sources de chaleur et de froid, de quelque manière que ces sources soient distribuées.

Il suit de la composition même des polynomes E_1, E'_1, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}'_1$, que la fonction V (42) ne contient plus que le paramètre ρ quand $\rho_1 = 0$;

c'est-à-dire que les deux variables θ et ρ_1 disparaissent à la fois. Ce résultat pouvait être prévu : car l'équation $\rho_1 = 0$ appartient à l'axe polaire, et sur cet axe, intersection commune de tous les plans méridiens, la température doit être nécessairement indépendante de θ, et ne peut varier qu'avec le paramètre de l'ellipsoïde.

Pour compléter la solution générale du problème que nous nous sommes proposé, il faut trouver une méthode qui puisse servir à déterminer les coefficients M, M',...$\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{M}'''$, de la série (42), à l'aide de la loi des températures connues de la surface. Nous supposerons, comme au § III, que la fonction de ρ_1 et θ qui exprime cette loi, ait été partagée en huit fonctions partielles, jouissant respectivement des conditions de symétrie qui particularisent les huit groupes du développement (10), ou de la série complète (42). Il suffit alors de considérer un seul de ces groupes, et de déterminer ses coefficients à l'aide de la fonction partielle qui lui correspond; on reconnaîtra facilement que la même méthode serait applicable à tout autre groupe.

§ XVII.

L'état partiel que nous choisissons, pour le traiter seul complétement, est celui défini par la première des doubles séries qui composent la valeur générale de V (42), laquelle se réduit alors à

$$(43) \qquad V = \sum_{i=0}^{i=\infty} \cos 2i\theta \sum_{n=1}^{n=\infty} MEE_1.$$

E et E_1 sont les polynomes en ρ^2 et ρ_1^2 déduits des formules (35), lesquels vérifient les équations différentielles

$$\frac{d^2E}{d\rho^2} = [2n(2n+1)\rho^2 - 4i^2c^2]E, \quad \frac{d^2E_1}{d\rho_1^2} = [4i^2c^2 - 2n(2n+1)\rho_1^2]E_1,$$

ou celles (34) en y posant $A = 2n(2n+1)$. Comme les polynomes des formules (38), (40) et (41) sont maintenant étrangers, il faut oublier la notation du § XVI, et les accents pourront être employés pour distinguer les unes des autres les diverses fonctions E et E_1 (35), les seules que nous devions considérer.

La série (43) prise pour exprimer la température permanente dans l'ellipsoïde, suppose que les sources calorifiques sont distribuées symétriquement, au-dessus et en-dessous de l'équateur, à droite et à gauche du méridien de départ, et en outre de part et d'autre de l'axe polaire sur un méridien quelconque. Si l'on désigne par $\psi(\rho_1, \theta)$ la fonction partielle qui exprime dans ces circonstances les températures connues de la surface, cette fonction pourra avoir des valeurs quelconques de $\rho_1 = 0$ à $\rho_1 = c$, et de $\theta = 0$ à $\theta = \frac{\pi}{2}$; mais ces valeurs devront se reproduire dans le même ordre de $\theta = 0$ à $\theta = -\frac{2}{\pi}$, de $\frac{\pi}{2}$ à π, de $-\pi$ à $-\frac{\pi}{2}$, d'après les conditions de symétrie exigées par la série (43).

Si, $E(\rho_0)$ étant la constante à laquelle se réduit E quand $\rho = \rho_0$, on pose $ME(\rho_0) = N$, puisque V(43) doit se réduire à $\psi(\rho_1, \theta)$ pour $\rho = \rho_0$, il faut que l'on ait

$$(44) \qquad \sum_{i=0}^{i=\infty} \cos 2i\theta \sum_{n=1}^{n=\infty} N_i E_i = \psi(\rho_1, \theta);$$

et il s'agit de déterminer le coefficient général N_i, de telle manière que la série (44) soit un des développements possibles de la fonction ψ.

Si l'on multiplie l'équation (44) par $d\theta$, et qu'on intègre les deux membres de $\theta = 0$ à $\theta = \frac{\pi}{2}$, comme $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}$ et que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2i\theta d\theta = 0$, pour toute valeur du nombre entier i autre que zéro, on aura simplement

$$(45) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} N_0 E_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(\rho_1, \theta) d\theta,$$

E_1 ayant ici toutes les valeurs (35) pour lesquelles $i = 0$, ou toutes celles données par la seconde des formules (17). Le coefficient général N_0 de la série (45) se déterminera donc par la méthode développée au § VII, qui donnera

$$(46)\qquad N_0 = \frac{2}{\pi}\frac{\int_0^c \frac{\varrho_1 E_1 d\varrho_1}{\sqrt{c^2-\varrho_1^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(\varrho_1, \theta)\, d\theta}{\int_0^c \frac{\varrho_1 E_1' d\varrho_1}{\sqrt{c^2-\varrho_1^2}}}.$$

Pour déterminer le coefficient N_i du sigma qui multiplie $\cos 2i\theta$, dans l'équation (44), il faut d'abord isoler cette série partielle, comme il vient d'être fait pour le sigma dont le coefficient est N_0 (45). On remplit ce but, en multipliant l'équation (44) par $\cos 2i\theta d\theta$, et en intégrant les deux membres depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \frac{\pi}{2}$; car on a, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2i\theta d\theta = 0$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2i'\theta \cos 2i\theta d\theta = 0$ quand i' diffère de i, et enfin $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2i\theta d\theta = \frac{\pi}{4}$; on obtient donc simplement

$$(47)\qquad \sum N_i E_i = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(\rho_1, \theta) \cos 2i\theta d\theta,$$

E_i ayant ici toutes les valeurs (35) qui correspondent à la même valeur de i.

§ XVIII.

Soient maintenant désignés par E_i et E_i' deux polynomes (35) correspondant à la même valeur de i, et à deux nombres n et n', ou à deux valeurs différentes $A = 2n(2n+1)$ et $A' = 2n'(2n'+1)$. Ces deux polynomes vérifieront les deux équations

$$\frac{d^2 E_i}{d\varrho_1^2} = (4i^2c^2 - A\rho_1^2) E_i, \quad \frac{d^2 E_i'}{d\varrho_1^2} = (4i^2c^2 - A'\rho_1^2) E_i'.$$

qui donnent par une combinaison facile

$$E_i \frac{d^2 E_i'}{d\varrho_1^2} - E_i' \frac{d^2 E_i}{d\varrho_1^2} = (A - A')\rho_1^2 E_i E_i';$$

si l'on multiplie cette dernière équation par $d\varrho_1 = \frac{d\varrho_1}{\varrho_1\sqrt{c^2-\varrho^2}}$, et

qu'on intègre ensuite entre les limites, zéro et c, de ρ_1, le premier membre disparaîtra, car son intégrale indéfinie $\left(E_1 \frac{dE'_1}{d\rho_1} - E'_1 \frac{dE_1}{d\rho_1}\right)$, ou $\left(E_1 \frac{dE'_1}{d\rho_1} - E'_1 \frac{dE_1}{d\rho_1}\right) \rho_1 \sqrt{c^2 - \rho_1^2}$, est nulle pour $\rho_1 = 0$ et $\rho_1 = c$: on aura donc

$$0 = (A - A') \int_0^c \frac{\rho_1 E_1 E'_1 d\rho_1}{\sqrt{c^2 - \rho_1^2}}.$$

D'où il suit que, excepté lorsque $A' = A$, on a nécessairement

$$\int_0^c \frac{\rho_1 E_1 E'_1 d\rho_1}{\sqrt{c^2 - \rho_1^2}} = 0;$$

c'est-à-dire que la relation (19) s'étend au cas où E_1 et E'_1 représentent deux polynomes (35) correspondant à la même valeur de i, mais à des valeurs différentes de n.

Le théorème qui vient d'être démontré conduit, comme au § VII, à la valeur du coefficient N_i de la série (47); cette valeur est

$$(48) \qquad N_i = \frac{4}{\pi} \frac{\int_0^c \frac{\rho_1 E_1 d\rho_1}{\sqrt{c^2 - \rho_1^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(\rho_1, \theta) \cos 2i\theta d\theta}{\int_0^c \frac{\rho_1 E_1^2 d\rho_1}{\sqrt{c^2 - \rho_1}}}.$$

Les coefficients N_0 (46) et N_i (48) étant substitués dans la série (44), donneront le développement cherché de la fonction ψ.

Enfin, remplaçant dans l'équation (43) le coefficient M par $\frac{N}{E'_\rho}$, la valeur de V qui satisfait à toutes les conditions posées, est définitivement

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} V = {} & \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\int_0^c \left[\frac{\rho_1 E_1 d\rho_1}{\sqrt{c^2 - \rho_1^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(\rho_1, \theta) d\theta \right]}{\int_0^c \frac{\rho_1 E_1^2 d\rho_1}{\sqrt{c^2 - \rho_1^2}}} \frac{E}{E(\rho_0)} E_1 \\ & + \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{i=\infty} \cos 2i\theta \sum_{n=i}^{n=\infty} \frac{\int_0^c \left[\frac{\rho_1 E_1 d\rho_1}{\sqrt{c^2 - \rho_1^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(\rho_1, \theta) \cos 2i\theta d\theta \right]}{\int_0^c \frac{\rho_1 E_1^2 d\rho_1}{\sqrt{c^2 - \rho_1^2}}} \frac{E}{E(\rho_0)} E_1 \end{aligned} \right.$$

E et E_1 étant donnés par les formules (17) sous le premier sigma, et par celles (35) pour la série qui multiplie $\cos 2i\theta$.

Il est aisé de voir que la détermination des coefficients pour les sept groupes de la valeur générale (42), autres que celui qui vient d'être traité, se ferait absolument de la même manière. Les développements des huit fonctions partielles, et les séries (49) qui donnent la température dans l'ellipsoïde de révolution aplati, peuvent être transformés en ε et ε_1, à l'aide des relations (6), (22) et (30). Mais il n'y aurait intérêt à présenter ici tous les détails de la solution trouvée, que s'ils étaient accompagnés de développements analytiques, qui permissent de calculer numériquement les températures; et ces développements seraient trop étendus pour trouver place dans ce second Mémoire.

§ XIX.

La solution générale qui vient d'être exposée, concerne seulement l'ellipsoïde aplati, ou celui dans lequel le diamètre de l'équateur surpasse l'axe polaire. Supposons maintenant que l'ellipsoïde soit au contraire allongé, c'est-à-dire formé par la révolution d'une ellipse autour de son grand axe. Il semblerait que ce nouveau cas, très différent du premier, dût nécessiter de nouvelles recherches, aussi étendues que celles qui précèdent; mais fort heureusement il n'en est pas ainsi, car, comme on va le voir, toutes les formules démontrées plus haut, sont applicables au nouvel ellipsoïde avec de légers changements. Et cet accord inattendu est par lui-même un résultat remarquable.

L'ellipsoïde actuel est compris parmi les surfaces au paramètre ρ représentées par l'équation

$$(50) \qquad \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2 + z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

lesquelles sont toutes des ellipsoïdes de révolution autour du grand axe, ayant les deux mêmes foyers, et composant un système de surfaces isothermes. Ces ellipsoïdes sont conjugués à deux autres systèmes de surfaces, pareillement isothermes, qui les coupent à angle

droit, et qui sont représentés par les équations

$$(51)\qquad \theta = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{y}{z}\right),\quad \frac{x^2}{\varrho_2^2} - \frac{y^2+z^2}{c^2-\varrho_2^2} = 1;$$

le premier système se compose des plans méridiens, le second des hyperboloïdes de révolution à deux nappes ayant les deux mêmes foyers géométriques que l'ellipsoïde donné.

Si l'on prend pour coordonnées nouvelles les paramètres ρ, θ, ρ_2, des surfaces (50) et (51), on aura pour formules de transformation

$$(52)\quad cx = \rho\rho_2,\ cy = \sqrt{\rho^2-c^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}\sin\theta,\ cz = \sqrt{\rho^2-c^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}\cos\theta.$$

Si l'on désigne par h, h_1, h_2, les valeurs de l'expression différentielle $\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}$, pour f successivement égal à ρ, θ, ρ_2, le calcul donne

$$(53)\qquad h = \frac{\sqrt{\varrho^2-c^2}}{\sqrt{\varrho^2-\varrho_2^2}},\quad h_1 = \frac{c}{\sqrt{\varrho^2-c^2}\sqrt{c^2-\varrho_2^2}},\quad h_2 = \frac{\sqrt{c^2-\varrho_2^2}}{\sqrt{\varrho^2-\varrho_2^2}}.$$

Enfin le symbole $\Delta_2 f$ ayant la signification indiquée au § I, on a

$$(54)\quad \Delta_2\rho = \frac{d\log(\varrho^2-c^2)}{d\varrho}h^2,\quad \Delta_2\theta = 0,\quad \Delta_2\rho_2 = \frac{d\log(c^2-\varrho_2^2)}{d\varrho_2}h_2^2.$$

Les formules (53) et (54) doivent être employées pour transformer en coordonnées ρ, θ et ρ_2, l'équation générale $\Delta_2 V = 0$, qui appartient à l'état permanent des températures V, dans tout corps solide homogène; si l'on introduit, pour simplifier, les transcendantes

$$(55)\qquad \varepsilon = \int\frac{d\varrho}{\varrho^2-c^2},\quad \varepsilon_2 = \int\frac{d\varrho_2}{c^2-\varrho_2^2},$$

cette équation transformée peut être écrite ainsi

$$(56)\quad (c^2-\rho_2^2)\frac{d^2V}{d\varepsilon^2} + (\rho^2-c^2)\frac{d^2V}{d\varepsilon_2^2} + (\rho^2-\rho_2^2)c^2\frac{d^2V}{d\theta^2} = 0;$$

ρ et ρ_2 étant des fonctions de ε et ε_2 que l'on déduit des équations (55), et qui sont

$$(57)\qquad \rho = -c\,\frac{e^{c\varepsilon}+e^{-c\varepsilon}}{e^{c\varepsilon}-e^{-c\varepsilon}},\quad \rho_2 = c\,\frac{e^{c\varepsilon_2}-e^{-c\varepsilon_2}}{e^{c\varepsilon_2}+e^{-c\varepsilon_2}}.$$

§ XX.

Pour simplifier l'équation aux différences partielles (56), au lieu des fonctions ρ et ρ_2, il est préférable d'introduire celles γ et γ_2, données par les relations suivantes

$$(58)\quad \gamma = \sqrt{\rho^2 - c^2} = \frac{2c}{e^{c\varepsilon} - e^{-c\varepsilon}},\quad \gamma_2 = \sqrt{c^2 - \rho_2^2} = \frac{2c}{e^{c\varepsilon_2} + e^{-c\varepsilon_2}},$$

d'où l'on déduit $\rho = \sqrt{c^2 + \gamma^2}$, $\rho_2 = \sqrt{c^2 - \gamma_2^2}$, et par suite, d'après les valeurs (55),

$$(59)\qquad \varepsilon = \int \frac{d\gamma}{\gamma\sqrt{\gamma^2 + c^2}},\quad \varepsilon_2 = \int \frac{d\gamma_2}{\gamma_2\sqrt{c^2 - \gamma_2^2}}.$$

L'équation (56) devient, en employant les fonctions γ et γ_2, au lieu de ρ et ρ_2, et remarquant que $\rho^2 - \rho_2^2 = \gamma^2 + \gamma_2^2$, d'après les relations (58) :

$$(60)\qquad \gamma_2^2 \frac{d^2V}{d\varepsilon^2} + \gamma^2 \frac{d^2V}{d\varepsilon_2^2} + (\gamma^2 + \gamma_2^2)\, c^2 \frac{d^2V}{d\theta^2} = 0.$$

La solution générale de l'ellipsoïde, à trois axes inégaux, indique que la fonction V, que nous cherchons, devra être composée d'une somme de termes de la forme $EE_2 \cos k\theta$, ou $EE_2 \sin k\theta$, dans laquelle k représente un nombre entier; E et E_2 étant des polynomes rationnels, le premier en γ et $\sqrt{\gamma^2 + c^2}$, le second en γ_2 et $\sqrt{c^2 - \gamma_2^2}$, qui doivent être déterminés par la condition que chaque terme simple vérifie l'équation (60).

Or, si l'on pose dans cette équation (60), $V = EE_2 \cos k\theta$, ou $V = EE_2 \sin k\theta$, la ligne trigonométrique disparaît comme facteur commun, et il vient

$$\gamma^2 E_2 \frac{d^2E}{d\varepsilon^2} + \gamma^2 E \frac{d^2E_2}{d\varepsilon_2^2} = (\gamma^2 + \gamma_2^2)\, k^2 c^2 E E_2,$$

ce qui exige que l'on ait séparément

$$(61)\qquad \frac{d^2E}{d\varepsilon^2} = (A\gamma^2 + k^2c^2)\, E,\quad \frac{d^2E_2}{d\varepsilon_2^2} = (k^2c^2 - A\gamma_2^2)\, E_2;$$

A étant un coefficient constant, le même dans les deux équations. Si l'on considère E et E_2 comme des fonctions de γ et γ_2, en prenant pour les transcendantes ε et ε_2 leurs valeurs (59), ces équations (61) deviennent

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2E}{d\gamma^2}(\gamma^4 + c^2\gamma^2) + \frac{dE}{d\gamma}(2\gamma^3 + c^2\gamma) = (A\gamma^2 + k^2c^2)\,E,\\ &\frac{d^2E_2}{d\gamma_2^2}(\gamma_2^4 - c^2\gamma_2^2) + \frac{dE_2}{d\gamma_2}(2\gamma_2^3 - c^2\gamma_2) = (A\gamma_2^2 - k^2c^2)\,E_2.\end{aligned}\right.$$

Quand on compare ces équations (62) à celles (34) ou (37), on reconnaît de suite que les valeurs de E_2 ne différeront de celles qui donnaient E, dans le cas précédent, qu'en ce que γ_2 doit y être substitué à ρ_1, et que les valeurs de E se déduiront de celles de l'ancien cas en y changeant c^2 en $-c^2$, et ρ en γ.

Il est donc inutile de pousser plus loin la solution de l'équilibre des températures dans l'ellipsoïde de révolution allongé, puisqu'elle conduirait à des formules analogues à celle de l'ellipsoïde aplati, et qui se déduiraient facilement de ces dernières par quelques changements de signe.

Sur le centre de gravité d'une portion quelconque de surface sphérique, et de quelques autres surfaces;

PAR CH.-IGN. GIULIO,

Professeur à l'Université de Turin.

I. Une surface étant rapportée à trois plans rectangulaires de coordonnées x, y, z, le centre de gravité d'une portion quelconque de la surface se trouve à une hauteur Z au-dessus du plan des x et des y, dont l'expression générale est

$$Z = \frac{\int\int z \,.\, dx \,.\, dy \,.\, \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{\int\int dx \,.\, dy \,.\, \sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \qquad (a)$$

en écrivant, pour abréger, p et q au lieu de $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ et de $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, et en étendant les intégrations à tous les points de la portion donnée de surface. Si celle-ci appartient à une sphère de rayon égal à l'unité et ayant son centre à l'origine des coordonnées, on aura $p = -\frac{x}{z}$, $q = -\frac{y}{z}$, et par suite

$$Z = \frac{\int\int dx\, dy}{\int\int dx \,.\, dy \,.\, \sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Or, il est évident qu'entre les limites données le dénominateur de cette valeur de Z exprime l'aire de la portion donnée de surface, tandis que le numérateur exprime l'aire de la projection de cette même portion, faite sur le plan des x et des y. Ainsi :

« La hauteur du centre de gravité d'une portion quelconque de » la surface d'une sphère, au-dessus du plan d'un de ses grands cer- » cles, est quatrième proportionnelle après l'aire de la portion » même, celle de sa projection sur ce plan, et le rayon. »

L'analogie est évidente entre cette proposition et celle qui déter-

mine la position du centre de gravité d'un arc de cercle ou d'un segment de la surface d'un cylindre droit; ce qui tient à ce que la propriété exprimée par l'équation aux différences partielles..... $z\sqrt{1+p^2+q^2}=1$ n'est point particulière à la sphère, et appartient tout aussi bien au cylindre et à la classe entière des surfaces engendrées par le mouvement d'une sphère de rayon égal à l'unité, et dont le centre décrit une courbe plane tracée arbitrairement dans le plan des x et des y. On étendra donc la proposition précédente à toutes ces surfaces en l'énonçant ainsi :

« Sur une surface quelconque, engendrée par le mouvement d'une » sphère dont le centre ne quitte point un plan donné, soit tracé » un périmètre quelconque fermé, qui embrasse la portion S de » surface, et soit A la projection de S sur le plan donné; la hauteur » du centre de gravité de S au-dessus de ce plan sera quatrième » proportionnelle après S, A, et le rayon de la sphère génératrice. »

En appliquant cette proposition aux surfaces des *voûtes d'arête* et des *voûtes en arc de cloître* de plein cintre sur base carrée, on voit que le centre de gravité des premières est à la moitié de la hauteur, et celui des secondes aux sept onzièmes environ.

II. Dans tout triangle sphérique, en nommant a, b, c les côtés opposés aux angles A, B, C, les distances du centre de gravité du triangle à chacun des plans des côtés a, b, c, sont

$$Z_a=\frac{1}{2}\cdot\frac{a-b\cos C-c\cos B}{A+B+C-180},\quad Z_b=\frac{1}{2}\cdot\frac{b-c\cos A-a\cos C}{A+B+C-180},\quad Z_c=\frac{1}{2}\cdot\frac{c-a\cos B-b\cos A}{A+B+C-180},$$

les côtés et les angles étant exprimés en degrés. En effet,..... $\frac{\pi}{180}(A+B+C-180)$ est l'aire du triangle, et celle de sa projection sur le plan du côté c, par exemple, est égale au secteur $\frac{\pi c}{360}$ construit sur l'angle au centre C, moins les projections des deux secteurs $\frac{\pi a}{360}$, $\frac{\pi b}{360}$, dont les plans font les angles B et A avec celui du premier secteur, sur lequel on les projette.

On peut aussi déterminer la position du centre de gravité d'un triangle sphérique, moyennant ses distances aux plans des grands cercles perpendiculaires aux arêtes de la pyramide sphérique cor-

respondante. Si l'on nomme D_A, D_B, D_C, ces distances, on trouve

$$D_A = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \sin B \sin c}{A+B+C-180}, \quad D_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{b . \sin C \sin a}{A+B+C-180}, \quad D_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{c . \sin A \sin b}{A+B+C-180},$$

en observant que la projection du triangle sur le plan du grand cercle perpendiculaire au rayon conduit au sommet de l'angle A, est identiquement la même que la projection faite sur le même plan, du secteur compris entre le côté a du triangle et les deux rayons conduits à ses deux extrémités; or, le plan de ce secteur fait avec celui de projection un angle dont le cosinus est égal à $\sin B \sin c$.

Enfin, si l'on veut fixer la position du centre de gravité du triangle au moyen de trois coordonnées rectangulaires x, y, z, on prendra le plan du côté c pour plan des x et des y, et le rayon conduit au sommet de l'angle A pour axe des x, et l'on aura d'abord, d'après ce qui précède,

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \sin B \sin c}{A+B+C-180}, \quad z = \frac{c - b\cos A - a\cos B}{A+B+C-180};$$

on trouvera ensuite sans peine, $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{b \sin A - a \sin B . \cos c}{A+B+C-180}$.

Pour un triangle rectangle en A ces formules donnent

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \sin B \sin c}{B+C-90}, \quad y = \frac{1}{2} \cdot \frac{b - a \cos C}{B+C-90}, \quad z = \frac{1}{2} \cdot \frac{c - a \cos B}{B+C-90}.$$

Si le triangle était isoscèle, en supposant que les côtés égaux soient a et b, on prendrait le plan du côté inégal c pour plan des x, y, et le rayon qui divise ce même côté en parties égales pour axe des x, et l'on aurait

$$x = \frac{a \sin A . \sin \frac{1}{2} c}{A+B+C-180}, \quad y = 0, \quad z = \frac{1}{2} \frac{c - 2a \cos A}{A+B+C-180};$$

enfin dans le triangle birectangle il viendra

$$x = \frac{90 . \sin \frac{1}{2} c}{C}, \quad y = 0, \quad z = \frac{1}{2}.$$

III. La formule générale (a) nous fournit la proposition suivante :

« Sur la surface [A], engendrée par la révolution de la courbe » d'équilibre d'une chaînette homogène autour de la verticale qui » passe par son point le plus bas, traçons arbitrairement un périmètre » fermé qui embrasse la portion S de surface; projetons ce périmètre » sur un plan horizontal qui coupe l'axe de révolution en un point » situé au-dessous de la surface, et à une distance c de son point le » plus bas égale à la tension horizontale de la chaînette, divisée par » le poids de l'unité de longueur de la chaînette même; soit V le » volume compris entre la surface S, sa projection, et la surface » cylindrique formée par l'ensemble des perpendiculaires abaissées » du périmètre de S sur le plan de projection. La hauteur du centre » de gravité de S au-dessus de ce plan sera double de celle du centre » de gravité de V. »

En effet, le plan tangent à la surface [A] en un point situé à la hauteur z au-dessus du plan de projection, que nous prendrons pour plan des x et des y, fait avec celui-ci un angle dont le cosinus est $\frac{c}{z}$, ce qui donne l'équation $\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{z}{c}$; et partant la valeur (a) de Z devient

$$Z=\frac{\int\int .z^2.dx.dy}{\int\int z.dx.dy}.$$

Mais en nommant Z_1 la hauteur du centre de gravité de V au-dessus du même plan, on a $Z_1=\frac{\int\int .\frac{1}{2}z.z\,dx\,dy}{\int\int .z.dx.dy}$, et les limites des intégrations étant les mêmes dans les valeurs de Z et de Z_1, on en conclura $Z=2Z_1$.

La propriété exprimée par l'équation aux différences partielles $\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{z}{c}$ étant commune à toutes les surfaces engendrées par la surface [A] lorsqu'elle se meut de manière que son axe demeure toujours vertical, et qu'un de ses points décrit une courbe plane tracée arbitrairement sur un plan horizontal, la proposition que l'on vient de démontrer est susceptible de la même extension que celle du § I.

Sur l'intégration de l'équation $\frac{d^n y}{dx^n} = x^m . y$;

PAR M. KUMMER.

Dans un des derniers cahiers du Journal de M. Crelle (tome XIX, page 286), M. Kummer s'est occupé de l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = x^m . y,$$

et il a donné le moyen d'en trouver l'intégrale complète (exprimée par des quadratures définies) toutes les fois que m est un nombre entier positif. Nous indiquerons en deux mots la méthode élégante dont il a fait usage.

En différenciant l'équation (1), l'on a

$$(2) \qquad \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = x^m . \frac{dy}{dx} + m x^{m-1} . y.$$

Or il est aisé de vérifier que l'équation (2) est satisfaite en posant

$$(3) \qquad y = \int_0^\infty u^{m-1} . e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} . \psi(xu)\, du,$$

la fonction $\psi(x)$ étant définie par l'équation

$$(4) \qquad \frac{d^{n+1} \psi(x)}{dx^{n+1}} = x^{m-1} . \psi(x).$$

Comme la fonction $\psi(x)$ contient $(n+1)$ constantes arbitraires, la formule (3) fournit l'intégrale complète de l'équation (2); par con-

séquent elle exprimera aussi l'intégrale complète de l'équation (1), si les $(n+1)$ constantes dont nous venons de parler satisfont à une certaine équation de condition qu'on trouvera aisément dans chaque cas particulier. L'application répétée de ce théorème donne successivement les intégrales de l'équation (1) pour les cas de $m=1$, $m=2$, etc., au moyen de l'intégrale connue relative au cas ou $m=0$. Il nous semble que l'artifice dont M. Kummer s'est servi, pourrait être employé avec succès pour la recherche des intégrales de beaucoup d'autres équations.

Sur le nombre des Polygones déterminés par n *points pris pour sommets ;*

PAR AD. GUIBERT.

On donne n points, situés ou non situés dans un même plan, mais tels que trois quelconques ne soient pas en ligne droite ; on joint par une droite l'un de ces points à un second, celui-ci à un troisième, et ainsi de suite jusqu'au dernier que l'on unit de même au premier point de départ ; cet assemblage forme ce que nous nommons un polygone ; il s'agit de connaître le nombre des lignes de cette espèce dont les n points donnés peuvent être les sommets.

Si l'on indique l'un quelconque des polygones en question, en désignant les sommets par des lettres, et dans leur ordre successif, on détermine ainsi une permutation correspondante de ces lettres ; or, pour un même polygone, il y a évidemment $2n$ indications semblables ; d'ailleurs, il est clair que par toutes les indications de tous les polygones, on aurait des permutations différentes, et qu'on obtiendrait justement de cette manière celles auxquelles n lettres peuvent donner lieu : le nombre des permutations de n lettres est donc égal à celui des polygones cherchés, multiplié par $2n$; par conséquent le nombre demandé est

$$\frac{1.2\ldots\ldots(n-1)n}{2n} = \frac{1.2\ldots\ldots(n-1)}{2} ;$$

il est comme on voit la moitié du nombre des permutations de $n-1$ lettres.

DÉMONSTRATION DE CETTE PROPOSITION :

Toute progression arithmétique dont le premier terme et la raison sont des entiers sans diviseur commun, contient une infinité de nombres premiers;

PAR M. G. LEJEUNE-DIRICHLET.

(Lue à l'Académie des Sciences de Berlin, le 27 juillet 1837) (*).

Il suffit de considérer attentivement la suite naturelle des nombres premiers pour y découvrir, par voie d'induction, une foule de propriétés dont la généralité sera rendue d'autant plus probable que l'induction aura été poussée plus loin. Mais la démonstration rigoureuse de ces propriétés est ordinairement sujette aux plus grandes difficultés. Un des résultats les plus remarquables en ce genre est celui que l'on obtient en divisant chaque terme de la suite naturelle des nombres premiers par un même nombre quelconque. Exceptant les nombres premiers qui sont facteurs du diviseur, tous les autres laisseront des restes premiers à l'égard du diviseur. Or, on remarque d'abord que tout reste de cette espèce revient indéfiniment, et ensuite, prenant le rapport entre les nombres qui désignent combien de fois deux de ces restes ont reparu jusqu'à un terme quelconque de la suite, ce rapport a pour limite l'unité, la division étant continuée indéfiniment. Mettons de côté cette dernière circonstance, et ne faisons attention qu'au retour indéfini de chaque reste : alors le résultat de l'observation peut s'énoncer ainsi : toute progression

(*) Nous devons à l'obligeance de M. Terquem la traduction de cet excellent Mémoire imprimé en allemand dans le Recueil de l'Académie de Berlin. (J. L.)

arithmétique dont le premier terme et la raison sont des entiers sans diviseur commun contient une infinité de nombres premiers. Il n'existe pas de démonstration rigoureuse du théorème qui vient d'être énoncé ; et toutefois de nombreuses applications rendent une telle démonstration très désirable. Legendre est, que je sache, le seul analyste qui ait essayé de le démontrer. Ce théorème avait pour lui, outre l'attrait de la difficulté, un intérêt tout particulier, puisqu'il s'en était servi comme lemme dans ses travaux précédents (*). L'illustre géomètre fait dépendre sa démonstration de la solution de cette question : étant donnée une suite quelconque de nombres premiers impairs, trouver le plus grand nombre des termes consécutifs d'une progression arithmétique qui seraient divisibles par quelqu'un des nombres de la suite ; mais la solution qu'il donne n'est fondée que sur une induction. En essayant de prouver l'exactitude de cette solution, d'une simplicité si remarquable, on rencontre des difficultés qu'il m'a été impossible de surmonter. Ce n'est qu'après avoir abandonné cette voie, que je suis parvenu à la démonstration rigoureuse du théorème. Elle n'est pas purement *arithmétique*, puisqu'elle est fondée en partie sur la considération de grandeurs *continues*. A raison de la nouveauté des principes sur lesquels elle repose, j'ai cru, avant d'en venir au cas général, devoir considérer le cas particulier où la raison de la progression arithmétique est un nombre premier impair.

§ Ier.

Soit p un nombre premier impair,
c une de ses racines primitives :

de sorte qu'en divisant par p la progression géométrique

$$c^0,\ c^1,\ c^2,\ c^3, \ldots . c^{p-2},$$

on trouve pour restes les nombres $1, 2, 3 \ldots . p-1$, dans un ordre quelconque.

(*) *Théorie des Nombres*, 4e partie, § IX, p. 399, seconde édition.

Soit la congruence $c^\gamma \equiv n \pmod{p}$: γ étant supposé $< p-1$, nous l'appellerons, avec M. Gauss, l'indice du nombre n et nous le désignerons au besoin par γ_n. Le choix de la racine primitive est indifférent; mais une fois adoptée, on ne doit plus en changer. Cette définition de l'indice étant admise, on démontre facilement que l'indice d'un produit est égal au reste qu'on obtient en divisant par $p-1$ la somme des indices des facteurs. Observons de plus qu'on a toujours $\gamma_1 = 0$, $\gamma_{p-1} = \frac{p-1}{2}$, et que γ_n est pair ou impair, selon que n est ou n'est pas résidu quadratique de p, ou bien, en employant la notation de Legendre, selon qu'on aura

$$\left(\frac{n}{p}\right) = +1 \text{ ou } \left(\frac{n}{p}\right) = -1.$$

Soit maintenant q un nombre premier pair ou impair différent de p, et s un nombre positif plus grand que l'unité. Désignons par ω une racine de l'équation

$$\omega^{p-1} - 1 = 0, \qquad (1)$$

et formons la progression géométrique

$$\frac{1}{1 - \omega^\gamma \cdot \frac{1}{q^s}} = 1 + \omega^\gamma \cdot \frac{1}{q^s} + \omega^{2\gamma} \cdot \frac{1}{q^{2s}} + \omega^{3\gamma} \cdot \frac{1}{q^{3s}} + \ldots \qquad (2)$$

γ étant l'indice de q, en sorte que l'on a $c^\gamma \equiv q \pmod{p}$.

En donnant à q toutes les valeurs dont il est susceptible, et multipliant ensemble toutes les équations résultantes, le produit des seconds membres donne une série dont la loi est facile à trouver. En effet, soit $n = q'^{m'} \cdot q''^{m''} \ldots$, où q', q'', ... désignent divers nombres premiers, alors le terme $n^{\text{ième}}$ aura la forme

$$\omega^{m'\gamma_{q'} + m''\gamma_{q''} + \ldots} \cdot \frac{1}{n^s};$$

mais on a

$$m'\gamma_{q'} + m''\gamma_{q''} + \ldots \equiv \gamma_n \pmod{p-1};$$

donc en vertu de l'équation (1),

$$\omega^{m'\gamma_{q'}+m''\gamma_{q''}+\cdots} = \omega^{\gamma_{n}}.$$

Ainsi, l'on a l'équation

$$\Pi.\frac{1}{1-\omega^{\gamma}.\frac{1}{q^{s}}} = \Sigma\omega^{\gamma}.\frac{1}{n^{s}} = \mathrm{L}. \qquad (3)$$

Le signe de multiplication Π s'étend à toutes les valeurs que peut prendre q, tandis que le signe sommatoire s'étend à tous les nombres entiers positifs n non divisibles par p. Dans le premier membre γ est l'indice de q ou γ_q; dans le second membre il désigne l'indice de n ou γ_n.

L'équation (3) renferme $p-1$ équations que l'on obtient en mettant pour ω ses $p-1$ valeurs. On sait que ces valeurs peuvent se représenter par les puissances d'une seule d'entre elles convenablement choisie. Soit Ω cette valeur; on aura donc

$$\Omega^{0},\ \Omega^{1},\ \Omega^{2},\ \Omega^{3}\ldots\ldots\Omega^{p-2},$$

pour les $p-1$ valeurs de ω; et nous désignerons les valeurs correspondantes de L par

$$\mathrm{L}_{0},\ \mathrm{L}_{1},\ \mathrm{L}_{2},\ldots\ldots\mathrm{L}_{p-2}. \qquad (4)$$

Il est évident qne L_{0} et $\mathrm{L}_{\frac{p-1}{2}}$ correspondent aux valeurs de $\omega=1$, $\omega=-1$ et sont indépendantes de Ω.

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de dire pourquoi s doit être plus grande que l'unité. La nécessité de cette restriction est fondée sur la diversité qu'on remarque entre les séries infinies. En considérant les valeurs numériques des termes d'une série, ou les valeurs de leurs modules si les termes sont imaginaires, il peut se présenter deux cas : ou bien la somme d'un nombre quelconque de ces valeurs numériques reste toujours inférieure à une certaine limite finie, ou bien elle est susceptible de croître jusqu'à l'infini. Dans le premier cas, la série est convergente et a une somme complétement déterminée et indépendante de l'ordre des termes, soit qu'ils procèdent d'après une dimension, ou d'après une ou plusieurs dimen-

sions, et forment une suite simple, double ou multiple. Dans le second cas, la série *peut* encore être convergente; mais cette convergence, ainsi que la valeur de la somme, dépendent de l'ordre suivant lequel les termes se succèdent. Si la convergence a lieu pour un certain ordre de succession, elle peut cesser pour un ordre différent, ou bien la somme peut devenir autre. Ainsi, par exemple, les deux séries suivantes sont formées des mêmes termes :

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \ldots\ldots$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots\ldots$$

La première est convergente, la seconde ne l'est pas; tandis que les deux séries

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots\ldots,$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots,$$

quoique convergentes toutes deux, n'ont pas la même somme.

Revenant à la série infinie L, il est facile de voir qu'elle appartient aux séries de la première espèce en prenant $s > 1$. Faisons $L = \lambda + \mu\sqrt{-1}$; λ et μ seront des quantités finies déterminées. Quant au premier membre de l'équation (3), si l'on désigne par $f_m + g_m\sqrt{-1}$ le produit des m premiers facteurs de la forme $\frac{1}{1 - \omega^q \frac{1}{q^s}}$, ces facteurs étant pris dans un ordre quelconque, on pourra toujours prendre m assez grand pour que parmi les m premiers facteurs se trouvent tous ceux pour lesquels on a $q < h$, h désignant un nombre entier quelconque. Dès que m aura atteint ce degré de grandeur, chacune des deux différences $f_m - \lambda$, $g_m - \mu$, abstraction faite du signe, restera toujours plus petite que..... $\frac{1}{h^s} + \frac{1}{(h+1)^s} + \ldots\ldots$ quelque accroissement ultérieur que prenne m. Mais dans la supposition de $s > 1$, et dans celle-là seulement, la somme $\frac{1}{h^s} + \frac{1}{(h+1)^s} + \ldots\ldots$ devient plus petite qu'aucune quantité

donnée, en attribuant à h une valeur suffisamment grande. Il est donc démontré que le produit infini (3), quel que soit l'ordre des facteurs, est égal à la série infinie L; mais pour $s = 1$ ou < 1, cette démonstration cesse d'avoir lieu; en effet dans ce cas le produit infini n'a plus, en général, une valeur déterminée, indépendamment de l'ordre de multiplication. Lors même qu'on serait sûr que le produit infini a une valeur déterminée pour un certain ordre de multiplication, l'équation (3) ne serait d'aucune utilité pour trouver cette valeur, quoique, convenablement interprétée, elle subsistât toujours. Dans ce cas, q', q'', q''',... étant les valeurs de q correspondant à l'ordre adopté, il faudrait considérer L comme une série multiple composée d'abord des termes dans lesquels n ne contient que le facteur q', puis des termes où n contient seulement les facteurs q' et q'', et ainsi de suite. La nécessité de donner cette forme à la série rendrait sa sommation aussi pénible que la recherche directe du produit infini: la série ne présente de l'avantage sous le rapport de la simplicité, que lorsque l'ordre des termes peut être quelconque ou du moins ne dépend pas des facteurs premiers de n.

§ II.

Faisant donc $s = 1 + \rho$, quelque petite que soit la quantité positive ρ, l'équation (3) subsistera. Cherchons ce que devient la série L, lorsque ρ devient infiniment petit. Nous commencerons par le cas où $\omega = +1$, L étant alors $L_{(0)}$. Considérons la suite

$$S = \frac{1}{k^{1+\rho}} + \frac{1}{(k+1)^{1+\rho}} + \frac{1}{(k+2)^{1+\rho}} + \ldots,$$

dans laquelle k est une constante positive.

Si dans la formule connue

$$\int_0^1 x^{\rho-1} \log^p\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{\Gamma(1+p)}{k^{1+\rho}},$$

on met pour k successivement k, $k+1$, $k+2$,... et qu'on ajoute les résultats, il vient

$$S = \frac{1}{\Gamma(1+\rho)} \int_0^1 \log^\rho\left(\frac{1}{x}\right) \frac{x^{b-1}}{1-x}\, dx :$$

on a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\Gamma\rho}{\Gamma(1+\rho)} = \frac{1}{\Gamma(1+\rho)} \int_0^1 \log^{\rho-1}\left(\frac{1}{x}\right) dx ;$$

donc

$$S = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\Gamma(1+\rho)} \int_0^1 \left(\frac{x^{b-1}}{1-x} - \frac{1}{\log\frac{1}{x}}\right) \log^\rho\left(\frac{1}{x}\right) dx ,$$

et lorsque ρ devient infiniment petit, le second terme a pour limite finie

$$\int_0^1 \left(\frac{x^{b-1}}{1-x} - \frac{1}{\log\frac{1}{x}}\right) dx.$$

Considérons la suite plus générale

$$\frac{1}{b^{1+\rho}} + \frac{1}{(b+a)^{1+\rho}} + \frac{1}{(b+2a)^{1+\rho}} + \ldots ,$$

contenant les deux constantes a et b ; mettant cette suite sous la forme

$$\frac{1}{a^{1+\rho}} \left[\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{1+\rho}} + \frac{1}{\left(\frac{b}{a}+1\right)^{1+\rho}} + \frac{1}{\left(\frac{b}{a}+2\right)^{1+\rho}} + \ldots \right],$$

et la comparant avec S, on voit immédiatement qu'elle est égale à une expression de cette forme

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\rho} + \varphi(\rho),$$

$\varphi(\rho)$ ayant une limite finie, pour ρ infiniment petit.

La suite $L_{(0)}$ est la réunion de $p-1$ suites partielles, que l'on obtient en mettant pour m les valeurs $1, 2, 3, \ldots p-1$ dans la suite

$$\frac{1}{m^{1+\rho}} + \frac{1}{(p+m)^{1+\rho}} + \frac{1}{(2p+m)^{1+\rho}} + \ldots :$$

$L_{(\omega)}$ a donc une valeur de la forme

$$L_{(\omega)} = \frac{p-1}{p} \cdot \frac{1}{\rho} + \varphi(\rho); \qquad (5)$$

ρ étant infiniment petit, $\varphi(\rho)$ a une limite finie, qu'on peut facilement, d'après ce qui précède, exprimer par une intégrale définie, ce qui toutefois n'est pas nécessaire pour notre but. L'équation (5) montre que pour ρ infiniment petit, $L_{(\omega)}$ est infiniment grand; mais que $L_{(\omega)} - \frac{p-1}{p}\frac{1}{\rho}$ a une valeur finie.

§ III.

Passons maintenant aux cas où ω a une valeur différente de l'unité. Quoique la valeur de la série L, pour $s > 1$, ne dépende point de l'ordre de ses termes, il est toutefois avantageux dans notre recherche, d'adopter l'ordre où n va en croissant : dans cette supposition $\Sigma\omega^{\gamma}\frac{1}{n^s}$ est une fonction de s, qui conserve une valeur finie et continue pour toute valeur positive de s, de sorte qu'en faisant $s = 1 + \rho$ et ρ infiniment petit, la série a pour limite $\Sigma\omega^{\gamma} \cdot \frac{1}{n}$; ce qui n'arrive pas nécessairement lorsque n ne suit pas un ordre ascendant, car alors $\Sigma\omega^{\gamma}\frac{1}{n}$ peut différer de $\Sigma\omega^{\gamma}\frac{1}{n^{1+\rho}}$ d'une quantité finie, ou même n'avoir aucune valeur déterminable. Pour démontrer cette dernière assertion, désignons par h un nombre entier positif; la somme des $h(p-1)$ premiers termes de la suite L est

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 \frac{\frac{1}{x}f(x)}{1-x^p}\log^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right)dx - \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 \frac{\frac{1}{x}f(x)}{1-x^p}\log^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right)x^{hp}dx,$$

où pour abréger, l'on a mis

$$f(x) = \omega^{\gamma^1}x + \omega^{\gamma^2}x^2 + \omega^{\gamma^3}x^3 + \ldots \omega^{\gamma^{p-1}}x^{p-1}.$$

Cette expression de la somme est une conséquence de l'équation

donnée ci-dessus, et qui existe pour toute valeur positive de s,

$$\int_0^1 x^{n-1} \log^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{\Gamma(s)}{n^s}.$$

Or l'on a

$$f(1) = \omega^{\gamma_1} + \omega^{\gamma_2} + \ldots \omega^{\gamma_{p-1}} = 1 + \omega + . \quad \omega^{p-2} = 0$$

lorsque ω n'est pas l'unité; donc le polynome $\frac{1}{x} f(x)$ sera divisible par $1 - x$; débarrassant la fraction qui est sous le signe d'intégration du facteur commun $1 - x$, cette fraction devient

$$\frac{t + u\sqrt{-1}}{1 + x + x^2 + \ldots x^{p-1}};$$

t et u sont des polynomes à coefficients réels. Si nous désignons par T et U, les valeurs maxima de t et u, dans l'intervalle de $x = 0$ à $x = 1$, alors les parties réelle et imaginaire de l'intégrale affectée du signe — seront respectivement plus petites que

$$\frac{T}{\Gamma(s)} \int_0^1 x^{hp} \log^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{T}{(hp+1)^s},$$
$$\frac{U}{\Gamma(s)} \int_0^1 x^{hp} \log^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{U}{(hp+1)^s};$$

ainsi cette seconde intégrale disparaît pour $h = \infty$; donc la série, en adoptant l'ordre croissant de n, est convergente, et l'on a

$$\sum \omega^{\gamma} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \frac{\frac{1}{x} f(x)}{1 - x^p} \log^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Cette fonction de s, tant que l'on a $s > 0$, reste finie et continue, et cette propriété appartient même à son coefficient différentiel. Pour s'en assurer, il suffit de différentier par rapport à s, puis de faire attention que $\Gamma(s)$ et $\frac{d\Gamma(s)}{ds}$ sont également finies et continues, et que $\Gamma(s)$ ne peut devenir nulle tant que s est positive.

Faisant donc

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 \frac{\frac{1}{x}f(x)}{1-x^p}\log^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right)dx = \psi(s)+\chi(s)\sqrt{-1},$$

$\psi(s)$ et $\chi(s)$ étant des fonctions réelles, on aura pour $\rho > 0$, d'après un théorème connu,

$$(6)\quad \psi(1+\rho)=\psi(1)+\rho\psi'(1+\delta\rho),\quad \chi(1+\rho)=\chi(1)+\rho\chi'(1+\varepsilon\rho),$$

où δ et ε sont des fractions positives dépendant de ρ, et où

$$\psi'(s) = \frac{d\psi(s)}{ds},\quad \chi'(s) = \frac{d\chi(s)}{ds}.$$

Pour $\omega = -1$, on a évidemment $\chi(s) = 0$, et en passant d'une racine ω à sa conjuguée $\frac{1}{\omega}$, $\psi(s)$ conserve la même valeur, mais $\chi(s)$ prend une valeur de signe opposé.

§ IV.

Il nous reste à faire voir que la limite finie vers laquelle s'approche $\sum \omega^\gamma \frac{1}{n^{1+\rho}}$, lorsque ρ devient infiniment petit et que ω n'est pas l'unité, ne se réduit pas à zéro. D'après le paragraphe précédent, cette limite est donnée par l'intégrale

$$\sum \omega^\gamma \frac{1}{n} = -\int_0^1 \frac{\frac{1}{x}f(x)}{x^p-1}dx,$$

intégrale qui peut s'exprimer aisément en fonctions logarithmiques et circulaires. En effet, soit $x - e^{\frac{2m\pi}{p}\sqrt{-1}}$ un facteur linéaire du dénominateur $x^p - 1$: m est un des nombres de la suite $0, 1, 2, \ldots p-1$. Soit A_m le numérateur de la fraction partielle correspondant à ce facteur; on aura, d'après les formules connues

$$A_m = \frac{1}{p}f\left(e^{\frac{2m\pi}{p}\sqrt{-1}}\right);$$

lorsque $m = 0$, $A = 0$; donc

$$\sum \omega^{\gamma} \frac{1}{n} = -\frac{1}{p} \sum f\left(e^{\frac{2m\pi}{p}\sqrt{-1}}\right) \int_0^1 \frac{dx}{x - e^{\frac{2m\pi}{p}\sqrt{-1}}},$$

le signe $\sum$ dans le second membre s'étend de $m = 1$ à $m = p - 1$.

La fonction $f\left(e^{\frac{2m\pi}{p}\sqrt{-1}}\right)$ est connue; c'est celle qu'on rencontre dans la division du cercle : elle se réduit facilement à la forme $f\left(e^{\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}\right)$. On a en effet

$$f\left(e^{\frac{2m\pi}{p}\sqrt{-1}}\right) = \sum \omega^{\gamma_g} e^{gm\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}},$$

en prenant g depuis 1 jusqu'à $p - 1$. Soit h le reste de la division de gm par p; les diverses valeurs de h seront $1, 2 \ldots p - 1$; et à cause de la congruence $gm \equiv h (\text{mod. } p)$, l'on a $\gamma_g \equiv \gamma_h - \gamma_m (\text{mod. } p - 1)$; si l'on remplace γ_g par $\gamma_h - \gamma_m$, ce qui est permis à cause de l'équation $\omega^{p-1} - 1 = 0$, il vient

$$f\left(e^{\frac{2m\pi}{p}\sqrt{-1}}\right) = \omega^{-\gamma_m} \sum \omega^{\gamma_h} e^{h\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}} = \omega^{-\gamma_m} f\left(e^{\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}\right);$$

on a donc

$$\sum \omega^{\gamma} \cdot \frac{1}{n} = -\frac{1}{p} f\left(e^{\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}\right) \sum \omega^{-\gamma_m} \int_0^1 \frac{dx}{x - e^{\frac{2m\pi}{p}\sqrt{-1}}};$$

mais α étant une fraction positive, on a

$$\int_0^1 \frac{dx}{x - e^{2\alpha\pi\sqrt{-1}}} = \log(2 \sin \alpha\pi) + \frac{\pi}{2}(1 - 2\alpha)\sqrt{-1};$$

par conséquent

$$\sum \omega^{\gamma} \cdot \frac{1}{n} = -\frac{1}{p} f\left(e^{\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}\right) \sum \omega^{-\gamma_m} \left[\log\left(2 \sin \frac{m\pi}{p}\right) + \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2m}{p}\right)\sqrt{-1}\right].$$

Quoique cette expression de $\sum \omega^{\gamma} \frac{1}{n}$ soit très simple, on ne peut pas en conclure en général, que cette quantité ne puisse devenir zéro. Il nous manque encore les principes nécessaires pour établir les conditions auxquelles doivent satisfaire des relations transcendantes, renfermant des nombres entiers indéterminés, pour pouvoir s'anéantir. Cependant, on peut montrer l'impossibilité de la réduction à zéro pour le cas où $\omega = -1$; mais le raisonnement n'est pas applicable aux valeurs imaginaires de ω pour lesquelles nous donnerons une démonstration spéciale dans le paragraphe suivant. Soit donc $\omega = -1$: en observant que γ_m est pair si $\left(\frac{m}{p}\right) = +1$, et impair si $\left(\frac{m}{p}\right) = -1$, on en conclut $(-1)^{-\gamma_m} = \left(\frac{m}{p}\right)$, $(-1)^{\gamma_n} = \left(\frac{n}{p}\right)$; donc pour ρ infiniment petit, la limite de $L_{\frac{-1}{2}}$ sera

$$\sum \left(\frac{n}{p}\right)^1_n = -\frac{1}{p} f\left(e^{\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}\right) \sum \left(\frac{m}{p}\right) \left[\log\left(2 \sin \frac{m\pi}{p}\right) + \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2m}{p}\right)\sqrt{-1}\right],$$

ou, plus simplement

$$\sum \left(\frac{n}{p}\right) \frac{1}{n} = -\frac{1}{p} f\left(e^{\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}\right) \sum \left(\frac{m}{p}\right) \left[\log\left(2 \sin \frac{m\pi}{p}\right) - \frac{\pi}{p} m \sqrt{-1}\right];$$

car dans l'intervalle de $m = 1$ à $m = p - 1$, on a $\sum \left(\frac{n}{p}\right) = 0$.

Il faut maintenant distinguer deux cas, selon que le nombre premier p est de la forme $4\mu + 3$ ou $4\mu + 1$; dans le premier cas, l'on a

$$\left(\frac{m}{p}\right) = -\left(\frac{p-m}{p}\right) \quad \text{et} \quad \sin \frac{m\pi}{p} = \sin \frac{(p-m)\pi}{p},$$

par conséquent la partie réelle de la somme disparaît. Et si l'on désigne par a les valeurs de m correspondant à $\left(\frac{m}{p}\right) = +1$ et par b celles qui répondent à $\left(\frac{m}{p}\right) = -1$, en d'autres termes si a et b sont

les résidus quadratiques et non quadratiques de p, plus petits que p, on aura

$$\sum\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}=\frac{\pi}{p^2}f\left(e^{\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}\right)(\Sigma a-\Sigma b)\sqrt{-1}.$$

Si $p=4\mu+1$, alors $\left(\frac{m}{p}\right)=\left(\frac{p-m}{p}\right)$; et la partie imaginaire disparaissant, l'on a

$$\sum\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}=\frac{1}{p}f\left(e^{\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}\right)\log\frac{\Pi\sin\frac{b\pi}{p}}{\Pi\sin\frac{a\pi}{p}};$$

le signe multiplicateur Π s'étend à toutes les valeurs de a et de b.

D'après des formules connues (*),

$$f\left(e^{\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}\right)=\sqrt{p}.\sqrt{-1}\quad\text{si}\quad p=4\mu+3,$$
$$f\left(e^{\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}\right)=\sqrt{p}\quad\text{si}\quad p=4\mu+1;$$

on obtient donc respectivement

$$\sum\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}=\frac{\pi}{p\sqrt{p}}(\Sigma b-\Sigma a),\quad \sum\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}=\frac{1}{\sqrt{p}}\log\frac{\Pi\sin\frac{b\pi}{p}}{\Pi\sin\frac{a\pi}{p}},$$

suivant que $p=4\mu+3$ ou $=4\mu+1$.

Lorsque $p=4\mu+3$, on a $\Sigma a+\Sigma b=\frac{p(p-1)}{2}=$ un nombre impair; donc dans ce cas on ne peut avoir $\Sigma a=\Sigma b$; par conséquent $\sum\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}$ ne peut pas devenir nulle.

Lorsque $p=4\mu+1$, on a recours à deux équations connues, et qu'on rencontre dans la division du cercle (**), savoir

$$2\Pi\left(x-e^{\frac{2a\pi}{p}\sqrt{-1}}\right)=Y-Z\sqrt{p},\quad 2\Pi\left(x-e^{\frac{2b\pi}{p}\sqrt{-1}}\right)=Y+Z\sqrt{p},$$

(*) *Comment. Gotting. rec. vol.* I, ou *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1835.
(**) *Disq. arith.* art. 357.

où Y et Z représentent des polynomes à coefficients entiers : de ces deux équations, on déduit

$$4 \cdot \frac{x^p - 1}{x - 1} = Y^2 - pZ^2;$$

si dans les trois équations précédentes, on fait $x = 1$, et qu'on désigne par g et h les valeurs de Y et Z, on obtient, réduction faite,

$$2^{\frac{p+1}{2}} \Pi \sin \frac{a\pi}{p} = g - h\sqrt{p},$$

$$2^{\frac{p+1}{2}} \Pi \sin \frac{b\pi}{p} = g + h\sqrt{p},$$

$$g^2 - ph^2 = 4p.$$

Cette dernière équation montre que g est divisible par p; faisant donc $g = pk$, il vient

$$\frac{\Pi \sin \frac{b\pi}{p}}{\Pi \sin \frac{a\pi}{p}} = \frac{k\sqrt{p} + h}{k\sqrt{p} - h}, \quad h^2 - pk^2 = -4:$$

la seconde de ces équations fait voir que h ne peut être égal à zéro; par conséquent, les deux membres de la première équation sont chacun différents de l'unité; d'où l'on conclut, d'après l'expression donnée ci-dessus, que $\sum \left(\frac{n}{p}\right) \frac{1}{n}$ ne peut avoir une valeur nulle. C. Q. F. D.

On peut ajouter à cela que $\sum \left(\frac{p}{n}\right) \frac{1}{n}$, étant pour ρ infiniment petit, la limite de $\Pi \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right) \frac{1}{q^{1+\rho}}}$, produit entièrement formé de facteurs positifs, ne peut devenir négative, et par conséquent a toujours une valeur positive.

De cette observation découlent immédiatement deux propositions importantes, et qu'il serait probablement très difficile de démontrer par une autre voie. Celle qui est relative au cas de $p = 4\mu + 3$ consiste en ce que pour les nombres premiers de cette forme, on a

toujours $\Sigma b > \Sigma a$. Toutefois, nous n'insisterons pas ici sur ces conséquences de notre méthode; nous nous proposons d'y revenir dans une autre occasion.

§ V.

Il nous reste à démontrer que la limite de L_m, pour ρ infiniment petit, est différente de zéro, lors même que l'on n'a pas $m = 0$ ou $m = \frac{p-1}{2}$. A cet effet, prenons le logarithme de $\Pi \frac{1}{1 - \omega^{\gamma} \frac{1}{q^{1+\rho}}}$, et développons le logarithme de chaque facteur, d'après la formule

$$-\log(1 - x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots :$$

il vient ainsi

$$\Sigma\omega^{\gamma} \frac{1}{q^{1+\rho}} + \frac{1}{2}\Sigma\omega^{2\gamma} \frac{1}{(q^{\gamma})^{1+\rho}} + \frac{1}{3}\Sigma\omega^{3\gamma} \frac{1}{(q^{\gamma})^{1+\rho}} + \ldots = \log L;$$

le signe sommatoire est relatif à q, et γ est l'indice de q. Remplaçons ω successivement par ses valeurs $1, \Omega, \Omega^2, \ldots \Omega^{p-2}$, ajoutons tous les résultats et observons que la somme

$$1 + \Omega^{h\gamma} + \Omega^{2h\gamma} + \ldots + \Omega^{(p-2)h\gamma},$$

est nulle, excepté quand on a $h\gamma \equiv 0 \pmod{p-1}$, auquel cas cette somme devient égale à $p-1$; remarquons de plus que cette dernière congruence équivaut à celle-ci $q^h \equiv 1 \pmod{p}$; nous obtiendrons

$$(p-1)\left(\Sigma\frac{1}{q^{1+\rho}} + \frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{q^{2+2\rho}} + \frac{1}{3}\Sigma\frac{1}{q^{3+3\rho}} + \ldots\right) = \log(L_0 L_1 \ldots L_{p-2}),$$

la sommation est relative aux valeurs de q dont la première, seconde... puissance est contenue dans la forme $Mp + 1$. Le premier membre étant réel, il s'ensuit qu'il faut prendre dans le second membre, le logarithme *arithmétique* du produit $L_0 L_1 \ldots L_{p-2}$. Quelle que

soit la valeur de ρ, le premier membre est toujours positif; or nous allons démontrer que si l'on suppose une limite nulle à L_m pour ρ infiniment petit, le second membre devient $-\infty$, tandis que le premier reste toujours positif; donc la supposition est inadmissible. En effet, on peut donner au second membre cette forme

$$\log L_{(0)} + \log L_{\frac{p-1}{2}} + \log L_1 L_{p-1} + \log L_2 L_{p-2} + \ldots$$

On a, d'après l'équation (5),

$$\log L_{(0)} = \log\left(\frac{p-1}{p} \cdot \frac{1}{\xi} + \varphi(\rho)\right) = \log\frac{1}{\xi} + \log\left(\frac{p-1}{p} + \rho\varphi(\rho)\right),$$

le second terme du second membre a pour limite la quantité finie $\log\left(\frac{p-1}{p}\right)$; $\log L_{\frac{p-1}{2}}$ reste aussi une quantité finie, car, d'après le paragraphe 4, la limite de $L_{\frac{p-1}{2}}$ est une quantité différente de zéro. Or, d'après le paragraphe 3, l'on a

$$\log L_m L_{p-1-m} = \log[\psi^2(1+\rho) + \chi^2(1+\rho)]:$$

si pour ρ infiniment petit, L_m et par conséquent L_{p-1-m} devenait nul, on devrait donc avoir $\psi(1) = 0$ et $\chi(1) = 0$, et alors d'après les équations (6) il viendrait

$$\log L_m L_{p-1-m} = \log\xi^2[\psi'^2(1+\delta\xi) + \psi'^2(1+\varepsilon\xi)] = -2\log\frac{1}{\xi} + \log[\psi'^2(1+\delta\xi) + \chi'^2(1+\varepsilon\xi)].$$

Si l'on ajoute le terme $-2\log\frac{1}{\xi}$, au premier terme de $\log L_{(0)}$, on a $-\log\left(\frac{1}{\xi}\right)$, qui devient $-\infty$ pour ρ infiniment petit, et il est evident que cette valeur négative infinie ne sera pas détruite par l'expression $\log[\psi'^2(1+\delta\rho) + \chi'^2(1+\varepsilon\rho)]$; car cette expression reste finie, ou bien devient elle-même $-\infty$ si l'on a simultanément $\psi'^2(1) = 0$ et $\chi'^2(1) = 0$. Il est tout aussi clair, qu'en considérant comme devenant nuls d'autres couples que L_m et L_{p-1-m}, la contradiction n'en sera que plus forte. Il est donc démontré que la li-

mite de L_m est finie et différente de zéro pour $m > 0$, et que dans le cas où $m = 0$, cette limite devient infinie; ainsi la suite

$$\sum \omega^{\gamma} \frac{1}{q^{1+\rho}} + \frac{1}{2} \sum \omega^{2\gamma} \frac{1}{q^{2+2\rho}} + \frac{1}{3} \sum \omega^{3\gamma} \frac{1}{q^{3+3\rho}} + \ldots = \log L \quad (7)$$

s'approche toujours, lorsque ω n'est pas $= 1$, d'une limite finie, et devient infinie pour $\omega = 1$ et ρ infiniment petit.

Si l'on voulait avoir cette limite, dont la connaissance d'ailleurs n'est pas nécessaire pour notre but, sa détermination au moyen de l'expression $\log[\psi(1) + \chi(1)\sqrt{-1}]$, serait sujette à une ambiguité qu'on peut faire facilement disparaître dans chaque cas particulier, c'est-à-dire lorsque p et ω sont donnés numériquement: soit

$$\log L = u + v\sqrt{-1} = \log[\psi(1+\rho) + \sqrt{-1}\,\chi(1+\rho)],$$

on en tire

$$u = \frac{1}{2}\log[\psi^2(1+\rho) + \chi^2(1+\rho)],$$

$$\cos v = \frac{\psi(1+\rho)}{\sqrt{\psi^2(1+\rho) + \chi^2(1+\rho)}}, \quad \sin v = \frac{\chi(1+\rho)}{\sqrt{\psi^2(1+\rho) + \chi^2(1+\rho)}},$$

et par conséquent la limite de u est sans aucune ambiguité

$$= \frac{1}{2}\log[\psi^2(1) + \chi^2(1)]:$$

pour avoir celle de v, il faut remarquer que la suite (7), quelle que soit la petitesse de ρ, varie d'une manière continue avec cette grandeur, ce qui est facile à démontrer; donc v est aussi une fonction continue de ρ. Comme $\psi(1)$ et $\chi(1)$ ne peuvent s'anéantir simultanément, on pourra au moyen des expressions de $\psi(1+\rho)$ et $\chi(1+\rho)$, données ci-dessus sous forme d'intégrales définies, déduire une valeur finie positive R, telle que pour toutes les valeurs de ρ plus petites que R l'une au moins des deux fonctions ne change pas de signe. Dès que ρ sera devenu plus petit que R, $\cos v$ ou $\sin v$ ne changera plus de signe, et par conséquent l'arc variable v ne pourra plus croître ou décroître que d'une quantité $< \pi$. La série (7) pour toute valeur finie de ρ appartient à la première espèce, dont il a été question au paragraphe 1er; sa

somme a donc toujours une valeur déterminée. Si l'on calcule numériquement au moyen de cette série la valeur de v qui correspond à $\rho = R$, et qu'on désigne cette valeur par V, la limite v_0 de v sera complétement déterminée au moyen des deux équations

$$\cos v_0 = \frac{\psi(1)}{\sqrt{\psi^2(1) + \chi^2(1)}}, \quad \sin v_0 = \frac{\chi(1)}{\sqrt{\psi^2(1) + \chi^2(1)}},$$

en se rappelant qu'on doit avoir $V - v_0 < \pi$, abstraction faite du signe.

§ VI.

Nous sommes maintenant en état de démontrer que toute progression arithmétique dont la raison est le nombre premier p, et dont le premier terme est un entier non divisible par p, renferme une infinité de nombres premiers, ou en d'autres termes, qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $\mu p + m$, où μ est un nombre entier indéterminé, et m l'un des nombres de la suite $1, 2, 3, \ldots p-1$. En effet, l'équation (7) représente $p-1$ équations, correspondant aux racines $1, \Omega, \Omega^2, \Omega^3, \ldots \Omega^{p-2}$; si l'on multiplie la première de ces équations par 1, la seconde par $\Omega^{-\gamma_m}$, la troisième par $\Omega^{-2\gamma_m} \ldots$, la dernière par $\Omega^{-(p-2)\gamma_m}$, et qu'on ajoute ensuite leurs premiers membres, il vient

$$\begin{aligned}
&\sum \left[1 + \Omega^{\gamma-\gamma_m} + \Omega^{2(\gamma-\gamma_m)} + \ldots + \Omega^{(p-2)(\gamma-\gamma_m)}\right] \frac{1}{q^{1+p}} \\
&+ \frac{1}{2}\sum \left[1 + \Omega^{2\gamma-\gamma_m} + \Omega^{2(2\gamma-\gamma_m)} + \ldots + \Omega^{(p-2)(2\gamma-\gamma_m)}\right] \frac{1}{q^{2+2p}} \\
&+ \frac{1}{3}\sum \left[1 + \Omega^{3\gamma-\gamma_m} + \Omega^{2(3\gamma-\gamma_m)} + \ldots + \Omega^{(p-2)(3\gamma-\gamma_m)}\right] \frac{1}{q^{3+3p}} \\
&+ \ldots,
\end{aligned}$$

où les sommations sont relatives à q, γ étant l'indice de q.

Mais chacune des sommes entre parenthèses est nulle, excepté lorsqu'on a $h\gamma - \gamma_m \equiv 0 \pmod{p-1}$; alors la somme est égale à $p-1$:

cette congruence équivaut à celle-ci $q^h \equiv m \pmod{p}$; on a donc l'équation

$$\sum \frac{1}{q^{1+\rho}} + \frac{1}{2}\sum \frac{1}{q^{2+2\rho}} + \frac{1}{3}\sum \frac{1}{q^{3+3\rho}} + \ldots$$

$$= \frac{1}{p-1}\left[\log L_0 + \Omega^{-\gamma m}\log L_1 + \Omega^{-2\gamma m}\log L_2 + \ldots \Omega^{-(p-2)\gamma m}\log L_{p-2}\right],$$

où la première sommation est relative à tous les nombres premiers q de la forme $\mu p + m$; la seconde sommation est relative aux nombres premiers dont le carré est de cette forme; la troisième aux nombres premiers dont le cube est de cette forme, et ainsi de suite. Lorsque ρ s'approche d'être nul, le second membre, à raison de $L_{(0)}$ qu'il contient, devient infiniment grand; donc le premier doit aussi devenir infiniment grand. Or on sait que la somme

$$\frac{1}{2}\sum \frac{1}{q^2} + \frac{1}{3}\sum \frac{1}{q^3} + \ldots$$

reste une quantité finie, lors même qu'on prend pour q tous les nombres entiers qui sont > 1; *à fortiori* restera-t-elle finie lorsqu'on ne prend pour q que les nombres premiers; conséquemment c'est la suite $\sum \frac{1}{q^{1+\rho}}$ qui doit dépasser une quantité positive quelconque; elle doit donc renfermer une infinité de termes, c'est-à-dire qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $\mu p + m$. C. Q. F. D.

§ VII.

Pour étendre la démonstration précédente à une progression arithmétique où la raison n'est pas un nombre premier, il est nécessaire d'avoir recours à quelques propositions fondées sur la théorie des restes; nous réunissons ici ces propositions succinctement, afin de pouvoir plus facilement en faire usage: on en trouvera la démonstration dans la troisième section de l'ouvrage de M. Gauss (*Disq. arith.*) où ce sujet est traité à fond.

I. L'existence des racines primitives n'est pas bornée aux nombres premiers impairs, mais ces racines ont aussi lieu pour la puissance p^τ

de ces nombres. Ainsi, c étant une racine primitive pour le module p^π, les restes des puissances

$$c^0,\ c^1,\ c^2, \ldots\ c^{(p-1)p^{\pi-1}-1},$$

pris d'après ce module, sont tous différents entre eux, et coïncident avec les nombres $< p^\pi$ et premiers à p^π. Si l'on a un nombre n, non divisible par p, alors l'exposant $\gamma_n < (p-1)p^{\pi-1}$, qui correspond à la congruence

$$c^{\gamma_n} \equiv n \,(\text{mod. } p^\pi),$$

sera complétement déterminé, et nous le nommerons l'*indice* de n. On démontre encore ici facilement que l'indice d'un produit est égal au reste de la division de la somme des indices des facteurs par $(p-1)p^{\pi-1}$ et que γ_n est pair ou impair selon qu'on a $\left(\frac{n}{p}\right)$ égal à $+1$ ou à -1.

II. Dans la théorie des racines primitives, le nombre premier 2 se comporte tout autrement que les nombres premiers impairs; ce nombre premier 2 donne lieu aux observations suivantes, en faisant abstraction de la première puissance de 2, qu'il n'est pas nécessaire de considérer ici.

(1). Au module 2^2 correspond la racine primitive -1. Soit n un nombre impair quelconque et α_n son indice, de sorte que l'on ait $(-1)^{\alpha_n} \equiv n \,(\text{mod. } 4)$; selon que n sera de la forme $4\mu+1$ ou $4\mu+3$, α_n sera $=0$ ou $=1$; l'on obtient l'indice d'un produit, en prenant le reste de la division par 2 de la somme des indices des facteurs.

(2). Si le module est de la forme 2^λ où $\lambda \geqq 3$, il n'existe plus de racine primitive, c'est-à-dire il n'existe pas de nombre, dont la période des restes, d'après le diviseur 2^λ, donne tous les nombres impairs $< 2^\lambda$; mais on peut représenter ainsi la moitié de ces nombres : en effet, soit un nombre de la forme $8\mu+5$ ou simplement 5; si l'on divise par 2^λ la suite des puissances

$$5^0,\ 5^1,\ 5^2, \ldots\ 5^{2^{\lambda-2}-1},$$

on aura $2^{\lambda-2}$ restes différents, tous de la forme $4\mu+1$ et $<2^\lambda$. Ainsi si n est de la forme $4\mu+1$, on peut toujours satisfaire à la congruence

$$5^{\beta_n} \equiv n \,(\text{mod. } 2^\lambda),$$

l'indice β_n devant être $<2^{\lambda-2}$; mais si n est de la forme $4\mu+3$, la congruence est impossible; dans cette dernière supposition $-n$ étant de la forme $4\mu+1$, on a donc la double congruence

$$5^{\beta_n} \equiv \pm n \,(\text{mod. } 2^\lambda):$$

nous appellerons d'une manière générale l'indice du nombre impair n, l'exposant $\beta_n < 2^{\lambda-2}$, qui satisfait à cette double congruence. D'après ce double signe, le reste de n divisé par 2^λ, n'est pas complétement déterminé par l'indice β_n auquel correspondent deux restes complémentaires, relativement à 2^λ. Il est évident que les propositions ci-dessus citées sont également applicables aux indices ainsi définis, savoir, que l'indice d'un produit est égal au reste qu'on obtient en divisant la somme des indices des facteurs par $2^{\lambda-2}$, et que β_n est pair ou impair selon que n est de la forme $8m\pm1$ ou $8m\pm5$. Pour faire disparaître l'ambiguité, il suffit de considérer à la fois les deux congruences $(-1)^{\alpha_n} \equiv n$ (mod. 4) et $5^{\beta_n} \equiv \pm n$ (mod. 2^λ); si $\alpha_n = 0$, on prend le signe supérieur, et si $\alpha_n = 1$, on prend le signe inférieur; on peut réunir les deux indices en cette unique congruence

$$(-1)^{\alpha_n}.5^{\beta_n} \equiv n \,(\text{mod. } 2^\lambda),$$

qui détermine complétement le reste de la division de n par 2^λ.

III. Soit $k = 2^\lambda.p^\pi.p'^{\pi'}\ldots$ et $\lambda \geqq 3$; $p, p', \ldots$ sont des nombres premiers impairs; soit n un nombre premier avec $2, p, p', \ldots$: si nous représentons par α_n, β_n, γ_n, $\gamma'_n, \ldots$ les indices correspondants respectivement aux racines primitives -1, 5, c, $c', \ldots$

et aux modules 4, 2^λ, p^π, $p'^{\pi'}$,... on aura les congruences

$$(-1)^{\alpha_n} \equiv n \,(\text{mod. } 4),\ 5^{\beta_n} \equiv \pm n \,(\text{mod. } 2^\lambda),\ c^{\gamma_n} \equiv n \,(\text{mod. } p^\pi),$$
$$c^{\gamma'_n} \equiv n \,(\text{mod. } p'^{\pi'}),\ldots$$

D'après des théorèmes connus, l'ensemble de ces congruences suffit pour déterminer le reste de la division de n par k, en observant que le signe de la seconde congruence est fixé par la première.

Nous appellerons les indices α_n, β_n, γ_n, γ'_n,... ou simplement les indices α, β, γ, γ',... le *système des indices*, relativement au nombre n. Or α est susceptible de deux valeurs, β de $2^{\lambda-}$ valeurs, γ de $(p-1)p^{\pi-1}$ valeurs, etc.; ainsi le nombre total des systèmes d'indices est

$$2.2^{\lambda-2}.(p-1)p^{\pi-1}.(p'-1)p'^{\pi'-1}\ldots = k\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p'}\right)\ldots = \mathrm{K}, \quad (8)$$

ce qui coïncide avec le théorème connu où K exprime combien il existe de nombres entiers plus petits que k et premiers à k.

§ VIII.

Venant maintenant à notre démonstration générale du théorème sur les progressions arithmétiques, nous ferons observer qu'on ne restreint pas cette généralité en admettant que la raison k de la progression est divisible par 8, et qu'elle est par conséquent comprise dans la forme de k du paragraphe précédent; car il est évident que si le théorème existe dans cette supposition, à plus forte raison existera-t-il lorsque k est impair ou divisible seulement par 2 ou 4.

Soit donc θ, φ, ω, ω',... une racine quelconque des équations

$$\theta^2-1=0;\ \varphi^{2^{\lambda-2}}-1=0,\ \omega^{(p-1)p^{\pi-1}}-1=0,\ \omega'^{(p'-1)p'^{\pi'-1}}-1=0,\ldots \quad (9)$$

et q un nombre premier différent de 2, p, p',...; formons l'équation

$$\frac{1}{1-\theta^\alpha\varphi^\beta\omega^\gamma\omega'^{\gamma'}\ldots\frac{1}{q^s}} = 1+\theta^\alpha\varphi^\beta\omega^\gamma\omega'^{\gamma'}\ldots\frac{1}{q^s}+\theta^{2\alpha}\varphi^{2\beta}\omega^{2\gamma}\omega'^{2\gamma'}\ldots\frac{1}{q^{2s}}+\ldots,$$

dans laquelle $s > 1$, et où le système des indices est relatif à q; si l'on met pour q toutes les valeurs dont il est susceptible, et si l'on multiplie ensemble toutes les équations résultantes, en ayant égard aux propriétés des indices énoncées ci-dessus, et aux équations (9), on aura

$$\Pi \cdot \frac{1}{1 - \theta^{\alpha} \varphi^{\beta} \omega^{\gamma} \omega'^{\gamma'} \frac{1}{q^s}} = \Sigma \theta^{\alpha} \varphi^{\beta} \omega^{\gamma} \omega'^{\gamma'} \ldots \frac{1}{n^s} = \mathrm{L}; \qquad (10)$$

le signe de multiplication Π s'étend à tous les nombres premiers autres que $2, p, p', \ldots$ et le signe sommatoire à tous les nombres entiers positifs, non divisibles par $2, p, p' \ldots\ldots$; dans le premier membre le système des indices $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ se rapporte au nombre q et dans le second membre au nombre n. L'équation générale (10), où les diverses racines $\theta, \varphi, \omega, \omega', \ldots$ peuvent être combinées entre elles d'une manière quelconque, contient évidemment K équations particulières. Afin de pouvoir désigner commodément les diverses suites L, correspondant à ces combinaisons, il faut concevoir les racines des équations (9), comme étant les puissances de l'une d'entre elles $\Theta, \Phi, \Omega, \Omega', \ldots\ldots$ où $\Theta = -1$; on aura ainsi

$$\theta = \Theta^{\mathrm{a}}, \quad \varphi = \Phi^{\mathrm{b}}, \quad \omega = \Omega^{\mathrm{c}}, \quad \omega' = \Omega^{\mathrm{c}'}, \ldots$$

où

$$\mathrm{a} < 2, \quad \mathrm{b} < (p - 1)p^{\pi - 1}, \quad \mathrm{c} < (p' - 1)p'^{\pi' - 1}, \ldots$$

et la suite L correspondant à ces valeurs sera désignée par

$$\mathrm{L}_{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{c}', \ldots} \qquad (11)$$

La nécessité de la restriction $s > 1$ dans l'équation (10) repose sur les raisons déjà développées dans le premier paragraphe.

§ IX.

On peut diviser en trois *classes* les suites L, au nombre de K, produites par les combinaisons des racines $\theta, \varphi, \omega, \omega' \ldots$: la *première* classe ne contient qu'une série, savoir $L_{0,0,0,0,\ldots}$ pour laquelle on a

$$\theta = 1, \quad \varphi = 1, \quad \omega = 1, \quad \omega' = 1 \ldots.$$

La *seconde* classe contient toutes les suites où il ne se présente que des racines *réelles* des équations (3), de sorte qu'on a

$$\theta = \pm 1, \quad \varphi = \pm 1, \quad \omega = \pm 1, \quad \omega' = \pm 1 \ldots;$$

on combinera ces racines de toutes les manières possibles, en exceptant seulement la combinaison qui constitue la première classe. Enfin la *troisième* classe renferme toutes les suites où l'une au moins des racines $\varphi, \omega, \omega', \ldots$ est imaginaire. Il est évident que les suites de cette classe sont conjuguées par couples; car les combinaisons des racines

$$\theta, \varphi, \omega, \omega' \ldots, \quad \text{et} \quad \frac{1}{\theta}, \frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\omega}, \frac{1}{\omega'}, \ldots$$

donnent des résultats différents, dans l'hypothèse qu'au moins une racine est imaginaire.

Nous avons maintenant à chercher ce que deviennent ces séries, lorsqu'on y fait $s = 1 + \rho$ et que la quantité positive ρ devient infiniment petite. Occupons-nous d'abord de la première classe : il est évident que cette série peut être considérée comme composée de K séries partielles dont chacune a la forme

$$\frac{1}{m^{1+\rho}} + \frac{1}{(k+m)^{1+\rho}} + \frac{1}{(2k+m)^{1+\rho}} + \ldots,$$

où m est $< k$ et premier à k; par conséquent d'après le paragraphe II, cette série a pour expression

$$\frac{K}{k}\frac{1}{\rho} + \varphi(\rho), \tag{12}$$

$\varphi(\rho)$ conservant une valeur finie, pour ρ infiniment petit.

En concevant les séries de la seconde et troisième classe ordonnées suivant l'ordre ascendant de n, et se rappelant que $s > 0$, on obtient pour elles l'équation

$$\sum \theta^{\alpha} \varphi^{\beta} \omega^{\gamma} \omega'^{\gamma'} \ldots \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \frac{\Sigma \theta^{\alpha} \varphi^{\beta} \omega^{\gamma} \omega'^{\gamma'} \ldots x^{n-1}}{1 - x^k} \log^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right) dx : \quad (13)$$

le signe Σ du second membre s'étend à toutes les valeurs positives de n plus petites que k et premières à k; α, β, γ, γ',... est un système d'indice relatif à n; on démontre facilement que le second membre a une valeur finie. En effet, le polynome $\Sigma\theta\, \varphi^{\beta} \omega^{\gamma} \omega'^{\gamma'} \ldots x^{n-1}$ renferme le facteur $1 - x$; car, en faisant $x = 1$, ce polynome se change dans le produit

$$(1+\theta)\left[1+\varphi+\ldots+\varphi^{2^{\lambda-2}-1}\right]\left[1+\omega+\ldots+\omega^{(p-1)p^{\gamma-1}-1}\right]\left[1+\omega'+\ldots\omega'^{(p'-1)p'^{\gamma'-1}-1}\right],\ldots$$

dont un au moins des facteurs s'anéantit, puisque la combinaison

$$\theta = 1, \quad \varphi = 1, \quad \omega = 1, \quad \omega' = 1, \ldots$$

est exclue, comme appartenant à la première classe.

On se convaincra, d'une manière aussi facile, que le second membre de l'équation (13), et son coefficient différentiel pris par rapport à s, sont des fonctions continues de s; de là on conclut que chaque série de la deuxième et troisième classe, pour des valeurs de ρ infiniment petites, a une limite finie, exprimée par

$$\sum \theta^{\alpha} \varphi^{\beta} \omega^{\gamma} \omega'^{\gamma'} \ldots \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{\Sigma \theta^{\alpha} \varphi^{\beta} \omega^{\gamma} \omega'^{\gamma'} \ldots x^{n-1}}{1 - x^k} dx; \quad (14)$$

il reste à démontrer que cette limite n'est jamais nulle.

§ X.

La limite de L pour la deuxième et troisième classe peut bien s'exprimer facilement, par la méthode du paragraphe 4, en fonctions logarithmiques et circulaires; mais cette expression n'est d'au-

cune utilité pour notre but, même pour le cas de la seconde classe, quoique ce cas ait une grande analogie avec celui qu'on a traité dans la seconde moitié du quatrième paragraphe. Regardons la propriété dont nous nous occupons comme démontrée pour les séries de la seconde classe (c'est-à-dire admettons que les limites de ces séries ne sont pas nulles), et nous allons faire voir qu'elle existe aussi dans la troisième classe : à cet effet développons les logarithmes des deux membres de l'équation (10); nous obtiendrons

$$\Sigma\theta^{\beta}\varphi^{\beta}\omega^{\gamma}\omega'^{\gamma'}\ldots\frac{1}{q^{1+\beta}}+\frac{1}{2}\Sigma\theta^{2\alpha}\varphi^{2\beta}\omega^{2\gamma}\omega'^{2\gamma'}\ldots\frac{1}{q^{2+2\beta}}+\ldots=\log L:$$

les indices α, β, γ, γ',... et le signe Σ se rapportent à q. Si l'on représente les racines θ, φ, ω, ω',... comme il a été dit à la fin du paragraphe 8, le terme général du premier membre devient

$$\frac{1}{h}\Sigma\Theta^{h\alpha a}\Phi^{h\beta b}\Omega^{h\gamma c}\Omega'^{h\gamma' c'}\ldots\frac{1}{q^{h+h\beta}},$$

tandis que, d'après la formule (11), le second membre devient

$$\log L_{a,b,c,c',\ldots}$$

Soit maintenant m un nombre entier $<k$ et n'ayant aucun facteur commun avec k. Si l'on multiple les deux membres par

$$\Theta^{-\alpha m a}\Phi^{-\beta m b}\Omega^{-\gamma m c}\Omega'^{-\gamma' m c'}\ldots;$$

et si, pour abréger, on écrit seulement le terme général du premier membre, il vient

$$\ldots\frac{1}{h}\Sigma\Theta^{(h\alpha-\alpha m)a}\Phi^{(h\beta-\beta m)b}\Omega^{(h\gamma-\gamma m)c}\Omega'^{(h\gamma'-\gamma' m)c'}\ldots\frac{1}{q^{h+h\beta}}+\ldots$$
$$=\Theta^{-\alpha m a}\Phi^{-\beta m b}\Omega^{-\gamma m c}\Omega'^{-\gamma' m c'}\ldots\log L_{a,b,c,c',\ldots},$$

si l'on somme, pour embrasser toutes les combinaisons des racines, depuis $a=0$, $b=0$, $c=0$, $c'=0$,.... jusqu'à $a=1$,..... $b=2^{\lambda-1}-1$, $c=(p-1)p^{\gamma-1}-1$, $c'=(p'-1)p'^{\gamma'-1}-1$....,

alors on a pour le terme général du premier membre

$$\frac{1}{h}\Sigma W \frac{1}{q^{h+hz}};$$

le signe Σ est relatif à q, W est le produit des sommes,

$$\Sigma\Theta^{(h\alpha-\alpha_m)a}, \quad \Sigma\Phi^{h\beta-\beta_m b}, \quad \Sigma\Omega^{h\gamma-\gamma_m c}, \quad \Sigma\Omega^{h\gamma'-\gamma'_m c'}, \ldots$$

les sommes étant prises par rapport aux racines a, b, c, c',... et entre les limites ci-dessus énoncées. Maintenant, en se rappelant les propositions du paragraphe 7, il est facile de voir : 1° que la première somme est 2 ou zéro, selon qu'on a ou qu'on n'a pas la congruence $h\alpha - \alpha_m \equiv 0 \pmod{2}$, ou, ce qui revient au même, selon qu'on a ou qu'on n'a pas la congruence $q^h \equiv m \pmod{4}$; 2° que la seconde somme se réduit à $2^{\lambda-2}$ ou à 0, selon qu'on a ou qu'on n'a pas la congruence $h\beta - \beta_m \equiv 0 \pmod{2^{\lambda-2}}$, ou bien selon qu'on a ou non la congruence $q^h \equiv \pm m \pmod{2^\lambda}$, 3° que la troisième somme se réduit à $(p-1)p^{\tau-1}$ ou à 0, selon que la congruence $h\gamma - \gamma_m \equiv 0$ $[\text{mod. } (p-1)p^{\pi-1}]$ a lieu ou non, ou ce qui revient au même, selon que la congruence $q^h \equiv m \pmod{p^\pi}$ a lieu ou non; et ainsi de suite. Il s'ensuit que W est toujours nulle, excepté lorsqu'on a simultanément les congruences $q^h \equiv m$, pour les modules $2^\lambda, p^\tau, p'^{\tau'}; \ldots$ ou ce qui revient au même, lorsqu'on a la congruence $q^h \equiv m \pmod{k}$, et dans ce cas $W = K$; ainsi notre équation devient

$$\left.\begin{aligned}\sum \frac{1}{q^{1+p}} + \frac{1}{2}\sum \frac{1}{q^{2+2p}} + \frac{1}{3}\sum \frac{1}{q^{3+3p}} + \ldots \\ = \frac{1}{K}\sum \Theta^{-\alpha_m a}\Phi^{-\beta_m b}\Omega^{-\gamma_m c}\Omega'^{-\gamma'_m c'} \ldots \log L_{a,b,c,c',\ldots}\end{aligned}\right\} (15)$$

où les sommations dans le premier membre sont relatives à tous les nombres premiers dont la première, ou la seconde, ou la troisième puissance, etc., est de la forme $\mu k + m$, tandis que la sommation dans le second membre se rapporte aux racines a, b, c, c',... prises entre les limites indiquées. Si l'on fait spécialement $m = 1$, alors

$\alpha_m = 0$, $\beta_m = 0$, $\gamma_m = 0$, $\gamma'_m = 0$;... et le second membre se réduit à

$$\frac{1}{K} \Sigma \log . L_{a, b, c, c', \ldots}$$

Le terme de cette somme qui correspond à la série L de la première classe ou à $L_{0, 0, 0, 0, \ldots}$ contiendra (d'après la formule 12) $\log \frac{1}{\rho}$. D'après l'hypothèse ci-dessus énoncée, les termes qui répondent aux diverses séries L de la seconde classe restent finis pour des valeurs de ρ infiniment petites. Maintenant, si la valeur de la limite pour une série L de la troisième classe pouvait devenir nulle, alors, en raisonnant comme dans le paragraphe V, l'expression (13) donnerait pour le logarithme de cette série L, combinée avec l'autre série L qui lui est conjuguée, le terme $-2 \log\left(\frac{1}{\rho}\right)$, lequel s'ajouterait à $\log\left(\frac{1}{\rho}\right)$, fourni par $L_{0, 0, 0, 0, \ldots}$; il resterait ainsi $-\log\left(\frac{1}{\rho}\right)$ qui devient infini négatif, pour ρ infiniment petit, tandis que le premier membre de l'équation (15), ne contient que des termes positifs; ainsi aucune série L de la troisième classe ne peut avoir zéro pour valeur de sa limite, et nous sommes en possession de ce résultat (sous la réserve d'une démonstration à donner pour les séries de la deuxième classe), que

$$\log L_{a, b, c, c', \ldots}$$

pour une valeur de ρ infiniment petite, conserve toujours une limite finie, excepté, lorsqu'on a simultanément $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $c' = 0, \ldots$ dans lequel cas, ce logarithme acquiert une valeur infiniment grande. Si l'on applique ce résultat à l'équation générale (15), on voit de suite que le second membre devient infini pour ρ infiniment petit, et cela par le terme $\frac{1}{K} \log L_{0, 0, 0, 0, \ldots}$ qui croît au-delà de toute limite, tandis que les autres termes restent finis. Il faut donc aussi que le premier membre dépasse toute grandeur finie; d'où il suit, comme au paragraphe VI, que la série

$\sum \frac{1}{q^{1+\mu}}$ contient un nombre infini de termes, ou ce qui revient au même, qu'il existe un nombre infini de nombres premiers de la forme $k\mu + m$, où μ est un nombre entier indéterminé, et m est un nombre n'ayant aucun facteur commun avec k. C. Q. F. D.

§ XI.

Pour compléter cette démonstration, il reste à montrer d'après la valeur de la limite des séries L de la seconde classe donnée par l'équation (14), que pour une combinaison des racines de la forme ± 1, ± 1, ± 1, ± 1,... en n'exceptant que la forme $+1$, $+1$, $+1$, $+1$,..., que pour une telle combinaison, dis-je, la somme

$$\Sigma(\pm 1)^{\alpha}(\pm 1)^{\beta}(\pm 1)^{\gamma}(\pm 1)^{\gamma'}\ldots \frac{1}{n}, \qquad (16)$$

a toujours une valeur différente de zéro, α, β, γ, γ',... étant un système d'indices relatif à n pour lequel il faut prendre, suivant leur ordre de grandeur, tous les nombres entiers positifs et non divisibles par les nombres premiers $2, p, p'$.... Dans le Mémoire que j'ai eu l'honneur de soumettre en premier lieu à l'Académie, j'avais démontré cette propriété par des considérations indirectes, et assez compliquées. Depuis, je me suis assuré qu'on peut arriver au même but par un chemin plus court.

Les principes dont j'ai fait usage s'appliquent en effet à d'autres problèmes dont on ne soupçonnerait pas d'abord la connexion avec celui qui est l'objet de ce Mémoire. On résout nommément à l'aide de ces principes cette question intéressante : trouver le nombre de formes quadratiques qui répondent à un *déterminant* donné soit positif, soit négatif; et l'on prouve que ce nombre (ce qui toutefois n'est pas la forme finale de cette recherche) peut être représenté par le produit de deux facteurs, dont l'un est une fonction très simple du déterminant et conserve une valeur finie pour chaque déterminant, et dont l'autre est une suite qui coïncide avec la suite (16) donnée ci-dessus. Il suit immédiatement de ce résultat, que la somme (16) ne peut jamais devenir nulle; car, si cela pouvait avoir

lieu, le nombre des formes quadratiques relatives au déterminant correspondant serait aussi zéro, ce qui est impossible, puisque ce nombre est toujours $\geqq 1$.

Par ce motif j'ai supprimé ici ma première démonstration relative à la propriété énoncée de la suite (16); et je renvoie pour cet objet à mes recherches sur les formes quadratiques, qui paraîtront incessamment (*), et d'où découle, comme un simple corollaire, la proposition nécessaire pour compléter le présent Mémoire.

(*) Ces recherches ont paru dans le Journal de M. Crelle, tome XIX : voir aussi, dans le même Journal (tome XVIII, une notice préliminaire sur le même objet, écrite en français, sous ce titre : *sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres*. (J. L.)

MÉMOIRE

Sur l'intégration d'une classe d'Équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites;

PAR J. LIOUVILLE.

INTRODUCTION.

Étant donnée une équation différentielle d'un ordre quelconque entre deux variables y et x, on peut se demander s'il existe ou non une intégrale particulière de la forme $y =$ *une fonction finie explicite* de x, c'est-à-dire une intégrale où la valeur de y en x se trouve écrite à l'aide d'un nombre limité de signes algébriques, exponentiels et logarithmiques. La solution de cette question paraît offrir de grandes difficultés. Les méthodes proposées par Condorcet pour y parvenir indiquent sans doute le génie pénétrant de cet illustre géomètre; mais elles sont loin d'être fondées sur des principes tout-à-fait rigoureux. Les raisonnements de l'auteur sont en général incomplets ou obscurs, et les conclusions qui en dérivent manquent quelquefois d'exactitude.

Mes recherches sur la classification des transcendantes (*) m'ayant naturellement conduit à m'occuper de l'intégration des équations différentielles en quantités finies, j'ai obtenu quelques résultats dignes, si je ne me trompe, de l'attention des géomètres. Je me bornerai dans ce Mémoire à traiter le cas particulier où l'équation dont y dépend est de la forme

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{P}y,$$

(*) Tome II de ce Journal, page 56, et tome III, page 523.

P désignant un polynome entier $ax^{\varepsilon} + bx^{\varepsilon-1} + \ldots + hx + k$.

Je prouve que si l'équation (1) possède une intégrale exprimable en fonction finie explicite de x, on devra pouvoir y satisfaire en prenant

$$y = e^{\int t dx},$$

et désignant par t une fonction de x algébrique et rationnelle déterminée par l'équation

$$\frac{dt}{dx} + t^2 = \mathrm{P}.$$

Pour qu'une telle valeur de t ait lieu, il faut d'abord que le degré du polynome P soit un nombre pair 2ν. Cela étant j'extrais autant que possible la racine carrée de P; je représente cette racine par Q et le reste par R, ou autrement dit, je mets P sous la forme $\mathrm{Q}^2 + \mathrm{R}$, Q étant un polynome de degré ν dont le premier terme est $x^{\nu}\sqrt{a}$ et R un polynome de degré $(\nu - 1)$ tout au plus. La valeur de t, si elle existe, se composera de deux parties, l'une entière et égale soit à Q, soit $-\mathrm{Q}$, l'autre fractionnaire et de la forme

$$\frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-q} + \ldots + \frac{1}{x-r}.$$

Dans le cas où Q forme la partie entière de t, on fera

$$\int \mathrm{Q} dx = \lambda, \quad \text{et} \quad (x-p)(x-q)\ldots(x-r) = \mathrm{Y},$$

et l'on aura

$$y = \mathrm{Y} e^{\int \mathrm{Q} dx} = \mathrm{Y} e^{\lambda},$$

valeur qui substituée dans l'équation (1) donne

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2\mathrm{Y}}{dx^2} + 2\mathrm{Q}\frac{d\mathrm{Y}}{dx} + \left(\frac{d\mathrm{Q}}{dx} - \mathrm{R}\right)\mathrm{Y} = 0.$$

Si la partie entière de t est au contraire égale à $-\mathrm{Q}$, on changera Q en $-\mathrm{Q}$ et λ en $-\lambda$, puis en nommant Z un polynome entier, on trouvera

$$y = \mathrm{Z} e^{-\int \mathrm{Q} dx} = \mathrm{Z} e^{-\lambda}$$

et

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^2Z}{dx^2} - 2Q\frac{dZ}{dx} - \left(\frac{dQ}{dx} + R\right)Z = 0.$$

Tout se réduit donc à chercher un polynome entier Y ou Z qui vérifie l'équation (A) ou l'équation (B).

Soit a' le coefficient du terme de R où x est élevée à la puissance $(\nu - 1)$, a' se réduisant à zéro quand ce terme manque dans R. Pour que le polynome Y existe, il faut que

$$\frac{a' - \nu\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$$

soit un nombre entier nul ou positif; de même pour que le polynome Z existe, il faut que

$$-\frac{a' + \nu\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$$

soit un nombre entier nul ou positif. Mais la somme de ces deux quantités est égale à $-\nu$. En exceptant donc le cas où $\nu = 0$, on voit que l'une au moins des deux quantités écrites ci-dessus sera nécessairement négative, et que la fonction Y ou Z qui lui correspond sera impossible sous forme entière. Afin de pouvoir continuer le calcul, admettons que l'une d'elles, la première par exemple, remplisse la condition exigée; c'est elle qui représentera le degré i du polynome Y : on posera donc

$$Y = A_i x^i + A_{i-1}x^{i-1} + \ldots\ldots + A_0,$$

et la méthode des coefficients indéterminés suffira pour fournir les valeurs de A_i, $A_{i-1}, \ldots A_0$, ou pour montrer qu'elles sont impossibles. Dans ce dernier cas, l'équation (1) n'a pas d'intégrale qui puisse s'exprimer en fonction finie explicite de x : dans le premier on satisfait à cette équation (1) en prenant $y = Ye^{\lambda}$, mais l'intégrale complète, savoir

$$y = AYe^{\lambda} + BYe^{\lambda}\int \frac{e^{-2\lambda}dx}{Y^2},$$

ne se réduit pas à une fonction finie explicite de x; elle n'est exprimable sous forme finie qu'à l'aide du signe $\int$ dont on ne peut pas la débarrasser. Le seul cas où $\nu = 0$ fait exception; l'équation devenant alors

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ay,$$

son intégrale

$$y = Ae^{x\sqrt{a}} + Be^{-x\sqrt{a}}$$

ne renferme que des exponentielles.

Les théorèmes que je viens d'énoncer sont démontrés en détail dans mon Mémoire. Pour suivre avec facilité les raisonnements que je développe, il faut avoir lu les premiers numéros du Mémoire sur la classification des transcendantes que j'ai rappelé plus haut, et où j'ai posé les bases de la théorie des fonctions finies : surtout il est nécessaire de se rappeler la signification constante que nous donnons aux mots *fonction algébrique* et *fonction finie explicite*. Nous répéterons donc ici qu'une fonction y de x est dite *algébrique*, lorsqu'elle peut être regardée comme la racine d'une équation de la forme

$$y^m - Ly^{m-1} - \ldots - My - N = 0,$$

L,....M, N étant des polynomes entiers ou des fractions rationnelles en x : il importe peu que cette racine soit exprimable ou non par radicaux : en adoptant généralement le signe $\varpi(x)$ pour la représenter, on voit que toutes les fonctions algébriques deviennent explicites. Il n'en est pas de même des fonctions finies qui peuvent être implicites ou explicites. Les fonctions finies explicites (les seules que je considère dans le présent Mémoire) comprennent toutes les fonctions qui peuvent s'écrire en employant un nombre limité de fois les signes algébriques, exponentiels et logarithmiques, c'est-à-dire les signes $\varpi(x)$, e^x, $\log x$. Les plus simples d'entre elles sont algébriques. On nomme *fonctions transcendantes* celles qui ne sont pas algébriques. Lorsque dans l'expression d'une fonction non algébrique les caractéristiques transcendantes ne portent que sur des quantités algébriques, la fonction est dite de *première espèce*. Lorsque dans

l'expression d'une fonction qui n'est ni algébrique ni réductible à la première espèce, les caractéristiques transcendantes ne portent que sur des transcendantes de première espèce, la fonction est dite de *deuxième espèce*, et ainsi de suite.

Telles sont les définitions dont nous faisons usage et que l'on ne doit jamais perdre de vue si l'on veut comprendre nos démonstrations.

---

1. Nous considérons dans ce Mémoire l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{P}y,$$

où P désigne une fonction rationnelle et entière

$$ax^\varepsilon + bx^{\varepsilon-1} + \ldots + hx + k:$$

ε est un nombre entier > 0 et $a, b, \ldots h, k$ sont des constantes dont la première diffère essentiellement de zéro tandis que les autres peuvent être nulles. Il s'agit de trouver une méthode certaine pour décider si l'on peut satisfaire à l'équation (1) par une intégrale particulière de la forme $y =$ *une fonction finie explicite de* x, et pour obtenir cette intégrale lorsqu'elle existe en effet sous la forme dont nous venons de parler. Mais avant d'entrer en matière, il importe de rappeler quelques propositions bien connues de calcul intégral dont nous ferons un fréquent usage.

2. Lorsqu'on connaît une fonction y_1 de x qui mise au lieu de y dans l'équation (1) vérifie cette équation, il devient facile de trouver la valeur complète de y. Si l'on combine en effet les deux équations

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{P}y, \quad \frac{d^2y_1}{dx^2} = \mathrm{P}y_1$$

de manière à éliminer P, on en déduit

$$y_1 \frac{d^2y}{dx^2} - y\frac{d^2y_1}{dx^2} = 0.$$

Intégrant et désignant par C une constante arbitraire, on a ensuite

$$(2) \qquad y_1 \frac{dy}{dx} - y \frac{dy_1}{dx} = C,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(3) \qquad d\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{C dx}{y_1^2}.$$

Une seconde intégration donnera donc

$$(4) \qquad y = C' y_1 + C y_1 \int \frac{dx}{y_1^2},$$

C′ étant une nouvelle constante arbitraire.

3. Soit y_2 une seconde valeur particulière de y : cette valeur devra vérifier l'équation (2) pourvu que l'on attribue à la constante arbitraire C une valeur convenable C″. Entre deux valeurs particulières de y, savoir y_1, y_2, on a donc toujours une relation de la forme

$$(5) \qquad y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = C''.$$

Quand la constante C″ est nulle, on a simplement

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{y_2}{y_1} = \text{constante}.$$

On dit alors que les deux intégrales y_1, y_2 rentrent l'une dans l'autre. Dans tout autre cas ces intégrales particulières sont distinctes, et l'on peut s'en servir pour former l'intégrale complète. Il suffit pour cela de mettre l'équation (5) sous la forme

$$d\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{C'' dx}{y_1^2}:$$

en la comparant à l'équation (3) et posant $\frac{C}{C''} = B$, on en conclut

$$d\left(\frac{y}{y_1}\right) = \mathrm{B}d\left(\frac{y_2}{y_1}\right),$$

ce qui, par une intégration, donne

$$(6) \qquad y = \mathrm{A}y_1 + \mathrm{B}y_2,$$

A étant aussi bien que B une constante arbitraire.

4. Représentons par $y_1, y_2, \ldots y_m$ des intégrales particulières de l'équation (1), et posons

$$u = y_1^\mu + y_2^\mu + \ldots + y_m^\mu = \Sigma(y^\mu).$$

Quel que soit le nombre m et quelle que soit la nature de ces intégrales particulières, si l'exposant μ est entier et positif, la valeur de u satisfera à une équation différentielle linéaire de l'ordre $\mu + 1$ qu'il est aisé de former. En différenciant la valeur de u et posant

$$\Sigma\left(\mu y^{\mu-1}\frac{dy}{dx}\right) = u',$$

on a d'abord

$$(a) \qquad \frac{du}{dx} = u'.$$

En différenciant la valeur de u' et posant

$$\Sigma\left[\mu(\mu-1)y^{\mu-2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = u'',$$

après avoir remplacé $\frac{d^2y}{dx^2}$ par sa valeur $\mathrm{P}y$, on a ensuite

$$(b) \qquad \frac{du'}{dx} = \mu\mathrm{P}u + u''.$$

Différencions de même la valeur de u'', remplaçons $\frac{d^2y}{dx^2}$ par $\mathrm{P}y$ et posons

$$\Sigma\left[\mu(\mu-1)(\mu-2)y^{\mu-3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right] = u''';$$

il nous viendra

$$(c) \qquad \frac{du''}{dx} = 2(\mu - 1)\mathrm{P}u' + u''',$$

et ainsi de suite, de sorte qu'en faisant

$$\sum\left[\mu(\mu-1)\ldots(\mu-i+1)y^{\mu-i}\left(\frac{dy}{dx}\right)^i\right] = u^{(i)},$$

on aura généralement

$$\frac{du^{(i+1)}}{dx} = (i+1)(\mu-i)\mathrm{P}u^{(i)} + u^{(i+2)}.$$

Les quantités $u^{(i)}$ seront d'ailleurs nulles dès que l'indice i atteindra ou surpassera la valeur $(\mu+1)$: donc entre les $(\mu+1)$ quantités $u, u', u'', \ldots u^{(\mu)}$, on aura $(\mu+1)$ équations linéaires du premier ordre (a), (b), (c),.... dont la dernière sera

$$\frac{du^{(\mu)}}{dx} = \mu\mathrm{P}u^{(\mu-1)}.$$

En éliminant $u', u'', \ldots u^{(\mu)}$ entre ces équations, ce qui est facile, on formera l'équation différentielle linéaire de l'ordre $(\mu+1)$ à laquelle u doit satisfaire. Si l'on a $\mu = 1$, cette équation sera l'équation (1) elle-même. Si l'on a $\mu = 2$, il faudra éliminer u', u'' entre les trois équations

$$\frac{du}{dx} = u', \quad \frac{du'}{dx} = 2\mathrm{P}u + u'', \quad \frac{du''}{dx} = 2\mathrm{P}u',$$

ce qui donnera

$$\frac{d^3u}{dx^3} - 4\mathrm{P}\frac{du}{dx} - 2\frac{d\mathrm{P}}{dx}u = 0.$$

En général, pour opérer l'élimination de u', u'', etc., on tirera la valeur de u' de l'équation (a) pour la reporter dans l'équation (b) : celle-ci fournira ensuite celle de u'' que l'on rapportera dans l'équation (c) ; et ainsi de suite. Ce mode d'élimination n'introduit jamais de

dénominateurs. Il est aisé de voir que dans l'équation finale en u le coefficient de $\frac{d^{\mu+1}u}{dx^{\mu+1}}$ sera égal à l'unité; les autres coefficients seront des fonctions rationnelles et entières de x, si P est, comme on le suppose, un polynome entier (*).

5. Si l'équation (1) a une intégrale de la forme $y =$ *une fonction finie explicite de* x, il faut que la valeur de y dont cette intégrale se compose soit purement algébrique, ou bien qu'elle contienne au contraire des transcendantes exponentielles et logarithmiques. Telle est l'alternative qui se présente *à priori*. Mais les équations (a), (b),

---

(*) Désignons à présent, par $Y_1, Y_2, \ldots Y_\mu$, μ intégrales particulières de l'équation (1), et posons $U = Y_1 Y_2 \ldots Y_\mu$; U satisfera aussi à une équation différentielle linéaire de l'ordre $(\mu + 1)$, et cette équation sera identique avec celle dont nous venons de nous occuper. C'est ce qui résulte de la nature même des intégrales de l'équation (1) et ce qu'il nous suffira de vérifier dans le cas particulier où $\mu = 2$. On a alors $U = Y_1 Y_2$, ce qui donne $\frac{dU}{dx} = Y_1 \frac{dY_2}{dx} + Y_2 \frac{dY_1}{dx}$; différenciant de nouveau et remplaçant d^2Y_1, d^2Y_2 par leurs valeurs $PY_1 dx^2$, $PY_2 dx^2$, il vient $\frac{d^2U}{dx^2} = 2PU + 2\frac{dY_1}{dx} \cdot \frac{dY_2}{dx}$. Enfin une troisième différenciation donne

$$\frac{d^3U}{dx^3} - 4P\frac{dU}{dx} - 2\frac{dP}{dx}U = 0,$$

équation toute semblable à celle que l'on a obtenue n° 4.

On prouve, dans les numéros suivants, que l'équation de l'ordre $(\mu + 1)$ dont u dépend n'a pas d'intégrale algébrique et rationnelle. De là et de ce que nous venons de dire il suit que le produit U ne peut pas non plus se réduire à une fonction algébrique et rationnelle. Ainsi en particulier la quantité $y_1^2 y_2^2$ n'est jamais une fonction algébrique et rationnelle de x.

Au reste, ces détails ont peu d'importance dans la question qui nous occupe. Nous ajouterons seulement que l'intégrale complète de l'équation en u ou U de l'ordre $\mu + 1$ est

$$u = A_1 y_1^\mu + A_2 y_1^{\mu-1} y_2 + \ldots + A_{\mu+1} y_2^\mu;$$

y_1 et y_2 désignent deux intégrales distinctes de l'équation (1); $A_1, A_2, \ldots A_{\mu+1}$ sont des constantes arbitraires. Le lecteur se rendra aisément compte de ce théorème dont nous ne ferons aucun usage dans tout ce qui va suivre.

(c), ... nous permettent de prouver que l'équation (1) n'a pas d'intégrale algébrique quand on met de côté, bien entendu, l'intégrale insignifiante $y = 0$ dont on doit toujours faire abstraction.

En effet, si l'on satisfait à l'équation (1) en prenant pour y une fonction algébrique de x, cette valeur algébrique de x pourra être regardée comme la racine d'une équation *irréductible* de la forme

$$y^m - Ly^{m-1} - \ldots - My - N = 0,$$

que nous représenterons pour abréger par $f = 0$, et dans laquelle L, ... M, N désignent des fonctions rationnelles de x. En différenciant deux fois, on aura

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dx\,dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d^2f}{dy^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{df}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Pour qu'une des racines y_1 de $f = 0$ satisfasse à l'équation (1), il faut et il suffit que l'équation

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dxdy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d^2f}{dy^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{df}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

soit satisfaite lorsqu'on y pose $y = y_1$ après avoir remplacé $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur

$$-\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{df}{dy}\right)}$$

et $\frac{d^2y}{dx^2}$ par Py. Mais après ces substitutions, l'équation dont nous parlons devient algébrique, et son premier membre est rationnel en x et y. Dès lors elle ne peut avoir la racine y_1 sans avoir aussi les autres racines y_2, y_3, ... y_m de l'équation irréductible $f = 0$. Donc, si la racine y_1 est une intégrale particulière de l'équation (1), il en sera de même des autres racines y_2, y_3, ... y_m.

Cela étant, faisons

$$u = y_1^\mu + y_2^\mu + \ldots + y_m^\mu,$$

μ étant un nombre entier positif : la valeur de u étant rationnelle et symétrique en $y_1, y_2, \ldots y_m$, s'exprimera rationnellement en fonction des coefficients L, M.....N, et sera par suite rationnelle en x. Pour certaines valeurs particulières de μ, il pourra arriver que l'on ait $u = 0$. Mais si l'on donne à μ successivement les m valeurs suivantes $\mu = 1$, $\mu = 2, \ldots \mu = m$, une au moins des m valeurs correspondantes de u sera rationnelle sans être nulle : autrement il faudrait que les coefficients L,....M, N fussent tous nuls, ce qui est absurde. Or, quel que soit l'exposant μ, je vais prouver que la valeur de u, supposée différente de zéro, ne peut jamais être rationnelle. Cela fait, il sera prouvé que l'équation (1) n'a pas d'intégrale algébrique.

6. La démonstration qu'il s'agit d'exposer prend deux formes distinctes suivant que μ est pair ou impair. Pour fixer les idées, je considérerai donc successivement le cas où l'on a $\mu = 4$ et celui où l'on a $\mu = 5$. On verra de suite que les mêmes raisonnements s'appliquent à tous les cas possibles. Mais il faut rappeler d'abord que la valeur de u satisfait à une équation différentielle linéaire de l'ordre $(\mu + 1)$ que nous avons enseigné à former (n° 4). Le coefficient de $\frac{d^{\mu+1}u}{dx^{\mu+1}}$ dans cette équation est toujours égal à l'unité, et les autres coefficients sont des fonctions entières de x. D'après la méthode que j'ai donnée dans mon second Mémoire *sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique* (*) pour trouver les intégrales rationnelles des équations linéaires d'ordre quelconque, on voit déjà que la fonction u réduite à sa plus simple expression n'a pas de dénominateur qui soit dépendant de x. A la seule inspection des équations (a), (b), (c),... on comprend qu'il en est de même des quantités u', u'', etc. Ainsi les valeurs de u, u', etc. ne peuvent être rationnelles sans se réduire à des polynomes entiers (**).

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, XXIIe cahier.

(**) La décomposition connue des fractions rationnelles en fractions simples suffit aussi pour montrer que u, u', etc., doivent se réduire à des polynomes entiers. En effet il résulte de cette décomposition et des équations (a), (b), (c),... que si un facteur linéaire $x - x_1$ entrait en dénominateur, dans la valeur de u réduite

7. Si l'on suppose $\mu = 4$, on aura les cinq équations suivantes :

$$(g)\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = u', \\ \dfrac{du'}{dx} = 4\mathrm{P}u + u'', \\ \dfrac{du''}{dx} = 6\mathrm{P}u' + u''', \\ \dfrac{du'''}{dx} = 6\mathrm{P}u'' + u^{\mathrm{IV}}, \\ \dfrac{du^{\mathrm{IV}}}{dx} = 4\mathrm{P}u'''. \end{cases}$$

Le premier terme du polynome P ordonné par rapport à x est ax^{ε}. Représentons par $\mathrm{A}x^{\alpha}$ le premier terme de u, en sorte que l'on ait

$$u = \mathrm{A}x^{\alpha} + \mathrm{B}x^{\alpha-1} + \text{etc.}$$

La première des équations (g) nous donnera

$$u' = \alpha\mathrm{A}x^{\alpha-1} + \text{etc.}$$

La seconde nous donnera ensuite

$$u'' = -4\mathrm{A}ax^{\alpha+\varepsilon} + \text{etc.}$$

On aura de même

$$u''' = -2\mathrm{A}a(5\alpha + 2\varepsilon)x^{\alpha+\varepsilon-1} + \text{etc.}$$
$$u^{\mathrm{IV}} = 24\mathrm{A}a^2x^{\alpha+2\varepsilon} + \text{etc.}$$

Or ces dernières valeurs ne peuvent s'accorder avec l'équation

$$\frac{du^{\mathrm{IV}}}{dx} = 4\mathrm{P}u''';$$

pour cela, en effet, il faudrait que l'on eût

$$24\mathrm{A}a^2(\alpha + 2\varepsilon) = -8\mathrm{A}a^2(5\alpha + 2\varepsilon),$$

à sa plus simple expression, avec l'exposant γ, il entrerait dans les dénominateurs de $u', \ldots u^{(\mu-1)}$, $u^{(\mu)}$, $\dfrac{du^{(\mu)}}{dx}$, avec les exposants respectifs $\gamma+1, \ldots \gamma+\mu-1$, $\gamma+\mu$, $\gamma+\mu+1$, ce qui ne peut pas être puisqu'on a $\dfrac{du^{(\mu)}}{dx} = \mu\mathrm{P}u^{\mu-1}$.

c'est-à-dire

$$\alpha + \varepsilon = 0,$$

ce qui est absurde, puisque l'exposant α est nul ou positif et l'exposant $\varepsilon > 0$. Donc la valeur de u qui répond à $\mu = 4$ ne peut être rationnelle sans se réduire à zéro. Une démonstration semblable s'applique à tous les cas où μ est pair. C'est uniquement pour abréger que nous avons posé en particulier $\mu = 4$.

8. Si l'on suppose $\mu = 5$, on aura les six équations suivantes :

$$(h)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= u', \\ \frac{du'}{dx} &= 5Pu + u'', \\ \frac{du''}{dx} &= 8Pu' + u''', \\ \frac{du'''}{dx} &= 9Pu'' + u^{\text{iv}}, \\ \frac{du^{\text{iv}}}{dx} &= 8Pu''' + u^{\text{v}}, \\ \frac{du^{\text{v}}}{dx} &= 5Pu^{\text{iv}}, \end{aligned}\right.$$

Représentons encore par Ax^α le premier terme de la fonction u supposée entière. A l'aide des cinq premières équations (h), on démontrera que les fonctions u', u'', u''', u^{iv}, u^{v} sont respectivement de degré $\alpha - 1$, $\alpha + \varepsilon$, $\alpha + \varepsilon - 1$, $\alpha + 2\varepsilon$, $\alpha + 2\varepsilon - 1$; le degré de u^{iv} surpasse ainsi d'une unité le degré de u^{v}, tandis qu'en vertu de l'équation $\frac{du^{\text{v}}}{dx} = 5Pu^{\text{iv}}$, il devrait au contraire lui être inférieur de $\varepsilon + 1$ unités. La même démonstration est applicable toutes les fois que μ est un nombre impair. Ainsi l'équation (1) n'a pas d'intégrale algébrique. C'est au reste ce que l'on aurait pu voir d'une manière très simple en essayant de représenter y par une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x. Mais bien que l'emploi des séries puisse être ici rendu rigoureux, nous avons cru devoir préférer la méthode précédente.

9. Maintenant, occupons-nous des intégrales qui peuvent s'exprimer sous forme finie, en joignant aux signes algébriques les signes expo-

nentiels et logarithmiques, et si l'équation (1) possède plusieurs intégrales de ce genre, considérons spécialement celle dont l'espèce est marquée par le plus petit indice. En désignant par n cet indice, il faudra que l'intégrale en question contienne au moins une transcendante monome de $n^{ième}$ espèce. Je dis que si l'on réduit à son *minimum* le nombre de ces transcendantes monomes de $n^{ième}$ espèce, aucune d'elles ne sera de la forme $\log v$.

En effet si l'on pose $\log v = \theta$ et si l'on représente par $y = F(x, \theta)$ l'intégrale dont nous parlons, la fonction $F(x, \theta)$ sera algébrique par rapport à θ et pourra contenir en outre d'autres transcendantes dont il est inutile de faire mention. En différenciant deux fois la valeur de y, on obtiendra un résultat de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F_1(x, \theta),$$

F_1 désignant une fonction du même genre que F : pour que l'équation (1) soit satisfaite, il faudra donc que l'on ait

$$F_1(x, \theta) = PF(x, \theta),$$

équation algébrique entre x, θ et toutes les transcendantes de $n^{ième}$ espèce dont $F(x, \theta)$ dépend, et qui par conséquent doit subsister si l'on remplace θ par $\mu + \theta$, μ étant une constante quelconque (*). On a donc

$$F_1(x, \mu + \theta) = PF(x, \mu + \theta).$$

Mais si l'on avait pris

$$y = F(x, \mu + \theta),$$

on aurait trouvé

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F_1(x, \mu + \theta) = Py;$$

c'est là un fait dont on peut s'assurer en exécutant le calcul, et qui tient à la nature logarithmique de la fonction θ, car il cesserait d'avoir lieu si θ était par exemple une exponentielle.

L'intégrale $F(x, \theta)$ nous en fait ainsi découvrir une infinité d'autres

(*) *Voyez* tome II de ce Journal, page 74.

comprises sous la forme $F(x, \mu+\theta)$ où μ est une constante arbitraire; et comme en différenciant l'équation (1) par rapport à μ, on a

$$\frac{d^2\left(\frac{dy}{d\mu}\right)}{dx^2} = P\frac{dy}{d\mu},$$

il s'ensuit que les dérivées de $F(x, \mu+\theta)$ par rapport à μ satisfont aussi à cette équation (1). En posant $\mu = 0$ après la différenciation, on obtient de la sorte les deux intégrales suivantes $F'_\theta(x, \theta)$, $F''(x, \theta)$ dont la considération nous sera très utile.

La dérivée $F'_\theta(x, \theta)$ ne peut pas être nulle, x restant indéterminée; car si l'on avait en général,

$$F'_\theta(x, \theta) = 0,$$

cette équation étant algébrique par rapport à θ devrait subsister en remplaçant θ par une lettre indéterminée i. Il viendrait ainsi $F'_i(x, i) = 0$, d'où $F(x, i) = F(x, i_0)$, i_0 étant une valeur particulière quelconque de i; par conséquent la fonction $F(x, \theta)$ serait égale à $F(x, i_0)$ et ne contiendrait pas θ contrairement à notre hypothèse.

Le rapport des deux intégrales $F(x, \theta)$, $F'_\theta(x, \theta)$ ne peut pas être une simple constante A, car si l'on avait

$$F'_\theta(x, \theta) = AF(x, \theta),$$

on pourrait dans cette équation, qui est algébrique par rapport à θ et par rapport aux transcendantes de $n^{\text{ième}}$ espèce, remplacer θ par une indéterminée i. On trouverait par là

$$F'_i(x, i) = AF(x, i),$$

et dès-lors en intégrant et désignant par i_0 une valeur particulière de la variable i, on obtiendrait

$$F(x, i) = F(x, i_0).e^{A(-i_0)},$$

ce qui est absurde, puisque $F(x, i)$ est une fonction algébrique de i.

Les deux intégrales $F(x, \theta)$, $F'_\theta(x, \theta)$ n'ayant pas entre elles un

rapport constant, la troisième intégrale $F''_\theta(x, \theta)$ doit nécessairement être de la forme

$$F''_\theta(x, \theta) = AF'_\theta(x, \theta) + BF(x, \theta),$$

A et B étant des constantes. Dans cette équation on peut remplacer θ par une variable indépendante i; elle est alors linéaire et à coefficients constants par rapport à l'inconnue F considérée comme fonction de i, et l'on en déduit

$$F(x, i) = \alpha e^{m_1 i} + \beta e^{m_2 i},$$

m_1, m_2 désignant les deux racines de l'équation $m^2 = Am + B$, et α, β étant deux quantités indépendantes de i, que l'on déterminerait, si l'on voulait, en attribuant à i deux valeurs particulières quelconques. Toutefois si l'on avait $m_2 = m_1$, la formule précédente se modifierait et deviendrait

$$F(x, i) = (\alpha + i\beta) e^{m_1 i},$$

et enfin on aurait

$$F(x, i) = \alpha + i\beta,$$

si les racines m_1, m_2, étaient à la fois égales entre elles et égales à zéro. Quelle que soit celle de ces trois formes que l'on adopte, on arrive à une absurdité. Les deux premières sont d'abord inadmissibles d'après un théorème que j'ai démontré à la page 69 du tome II de ce Journal; la dernière donnant

$$F(x, \theta) = \alpha + \beta\theta,$$

exigerait que l'équation (1) eût l'intégrale $F'_\theta(x, \theta) = \beta$, et cette intégrale dans laquelle θ n'entre plus, contiendrait une transcendante de moins que l'intégrale $F(x, \theta)$, ce qui est impossible.

De cette discussion complète, il résulte que nous ne devons dans la valeur de y la plus simple admettre aucune transcendante de $n^{ième}$ espèce de la forme $\log v$.

10. Les transcendantes de $n^{ième}$ espèce contenues dans y devant être, comme on le voit, de la forme $\theta = e^v$, représentons par

$$y = F(x, \theta)$$

la valeur de y où l'on a mis en évidence une seule de ces transcendantes. En différentiant deux fois cette expression, on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F_1(x, \theta),$$

F_1 désignant une fonction de même nature que la fonction F, et pour que l'équation (1) soit satisfaite, il viendra

$$F_1(x, \theta) = PF(x, \theta),$$

équation algébrique par rapport à x, θ, et par rapport aux diverses transcendantes contenues algébriquement dans F, en sorte que l'on pourra y remplacer θ par $\mu\theta$, μ étant une constante arbitraire. On a ainsi

$$F_1(x, \mu\theta) = PF(x, \mu\theta).$$

Mais si l'on avait posé

$$y = F(x, \mu\theta),$$

on aurait trouvé

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F_1(x, \mu\theta) = Py,$$

comme il est aisé de s'en assurer en effectuant les différentiations, et en se rappelant que $\frac{d\theta}{dx} = \theta\frac{du}{dx}$. Donc l'existence de l'intégrale $F(x, \theta)$ entraîne celle de l'intégrale $F(x, \mu\theta)$ et par suite celle des deux intégrales $\theta F'_\theta(x, \theta)$, $\theta^2 F''_\theta(x, \theta)$, que l'on obtient en différentiant $F(x, \mu\theta)$ par rapport à μ et faisant ensuite $\mu = 1$.

On ne peut pas avoir $F'_\theta(x, \theta) = 0$, tant que x reste indéterminée, car à cause de la forme de la fonction F qui est algébrique par rapport à θ, on pourrait dans cette équation traiter θ comme une variable indépendante, et il en résulterait que θ n'entre pas dans la fonction $F(x, \theta)$, ce qui est absurde.

Si le rapport des deux intégrales $\theta F'_\theta(x, \theta)$, $F(x, \theta)$ est une constante m, on aura

$$\theta F'_\theta(x, \theta) = mF(x, \theta),$$

et par suite

$$iF'_i(x, i) = mF(x, i).$$

En intégrant cette équation différentielle, et désignant par i_0 une

valeur particulière de la variable indépendante i, on a donc

$$F(x, i) = F(x, i_0) \cdot \frac{i^m}{i_0^m},$$

et par conséquent

$$F(x, \theta) = \alpha\theta^m,$$

α étant une fonction de x contenant une transcendante de moins que $F(x, \theta)$, savoir la transcendante θ.

On satisfera encore à l'équation (1) par une intégrale de la forme $\alpha\theta^m$ quand même le rapport des deux intégrales $\theta F'_\theta(x, \theta)$, $F(x, \theta)$ ne serait pas constant. Alors en effet il faudra que l'on ait

$$\theta^2 F''_\theta(x, \theta) = A\theta F'_\theta(x, \theta) + BF(x, \theta),$$

A et B étant des constantes. En remplaçant θ par une indéterminée i, on aura ensuite

$$i^2 F''_i(x, i) = AiF'_i(x, i) + BF(x, i),$$

équation différentielle du second ordre dont l'intégrale est de la forme

$$F(x, i) = \alpha i^m + \beta i^{m_1};$$

m et m_1 sont les deux racines de l'équation

$$m(m - 1) = Am + B;$$

α et β sont deux quantités indépendantes de i, mais fonctions de x; elles contiennent une transcendante de moins que $F(x, \theta)$, savoir la transcendante θ; on en déterminerait si on voulait les valeurs en donnant à i deux valeurs particulières quelconques i_0, i_1, puis résolvant les deux équations du premier degré

$$F(x, i_0) = \alpha i_0^m + \beta i_0^{m_1},$$
$$F(x, i_1) = \alpha i_1^m + \beta i_1^{m_1}.$$

En faisant $i = \theta$, on a maintenant

$$F(x, \theta) = \alpha\theta^m + \beta\theta^{m_1}.$$

Or, l'existence de cette intégrale entraîne celle de l'intégrale nouvelle

$$F(x, u\theta) = \alpha u^m \theta^m + \beta u^{m_1} \theta^{m_1},$$

où μ est une constante arbitraire, et la combinaison des deux précédentes en produit une troisième

$$\frac{F(x, \mu\theta) - \mu^{m_1} F(x, \theta)}{\mu^m - \mu^{m_1}} = \alpha\theta^m,$$

qui a la forme indiquée plus haut. On n'a pas d'ailleurs à craindre que la fonction α se réduise à zéro; car si cela était, on aurait

$$F(x, \theta) = \beta\theta^{m_1}.$$

et par suite le rapport de $\theta F'_\theta(x, \theta)$ à $F(x, \theta)$ serait une constante m_1 contrairement à l'hypothèse adoptée plus haut.

Si les deux racines m, m_1 étaient égales entre elles, l'intégrale de l'équation

$$i^2 F''_i(x, i) = A i F'_i(x, i) + B F(x, i)$$

changerait de forme et deviendrait

$$F(x, i) = \alpha i^m + \beta i^m \log i,$$

les coefficients α et β étant comme ci-dessus indépendants de i. Mais comme la fonction $F(x, i)$ est algebrique en i, il faudra que $\log i$ disparaisse du second membre et que l'on ait $\beta = 0$. En effet, si β n'est pas zéro et que l'exposant m soit rationnel, on tire de l'équation précédente

$$\log i = \frac{F(x, i) - \alpha i^m}{\beta i^m},$$

c'est-à-dire $\log i =$ *une fonction algébrique de* i, ce qui ne se peut. Et si m est irrationnel ou imaginaire, on en tire

$$i^m = \frac{F(x, i)}{\alpha + \beta \log i},$$

c'est-à-dire $i^m =$ *une fonction transcendante de première espèce*, ce qui n'est pas possible non plus puisque dans ce cas i^m est toujours une fonction transcendante de seconde espèce (*). Il est donc nécessaire

(*) *Voyez* tome II de ce Journal, page 94.

que β soit nul, et alors il reste simplement $F(x, i) = \alpha i^m$, d'où $F(x, \theta) = \alpha\theta^m$.

11. Cette discussion approfondie nous montre que si l'on peut satisfaire à l'équation (1) en prenant pour y une fonction transcendante de $n^{ième}$ espèce où le nombre des transcendantes monomes de $n^{ième}$ espèce est supposé réduit à son *minimum*, toutes ces transcendantes seront de la forme e^v; de plus si l'on désigne l'une d'elles par θ, on pourra toujours supposer l'intégrale mise sous la forme $\alpha\theta^m$, m étant une constante et α ne contenant plus θ. Si l'on désigne par $\theta_1 = e^{v_1}$, $\theta_2 = e^{v_2}$, etc., les autres transcendantes de $n^{ième}$ espèce, on pourra de même les mettre ainsi en facteurs dans l'expression de y qui deviendra par suite

$$y = \sigma\theta^m\theta_2^{m_1}\theta_1^{m_2}, \ldots = \sigma e^{m v + m_1 v_1 + \text{etc.}},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$y = \sigma e^{\omega},$$

σ et ω désignant des fonctions de $(n-1)^{ième}$ espèce seulement.

Actuellement posons

$$y = e^{\int t dx},$$

d'où

$$t = \frac{dy}{y dx} = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{d\sigma}{dx} + \sigma\frac{d\omega}{dx}\right):$$

t satisfera à l'équation

$$(2) \qquad \frac{dt}{dx} + t^2 = P,$$

et sera, comme les deux fonctions σ et ω, de $(n-1)^{ième}$ espèce tout au plus, en sorte que si l'on suppose t de $m^{ième}$ espèce, on aura $m < n$.

J'ajoute même que t se réduira à une simple fonction algébrique. Cette proposition sera démontrée si l'on fait voir qu'en supposant $m > 0$, la valeur de t conduit à une intégrale de l'équation (1) exprimée par une fonction transcendante de $m^{ième}$ espèce, ce qui est absurde, (m étant $< n$) puisque l'indice n a été pris le plus petit possible.

Admettons en effet que t soit une fonction transcendante de $m^{ième}$ espèce, m étant > 0, et réduisons à son *minimum* le nombre total des transcendantes monomes de $m^{ième}$ espèce qui s'y trouvent contenues,

puis supposons que l'une d'elles soit de la forme e^{v}, v désignant une fonction de $(m-1)^{\text{ème}}$ espèce. Pour mettre θ en évidence, posons

$$t = \varphi(x, \theta),$$

la fonction φ étant algébrique par rapport à θ et par rapport aux autres transcendantes de $m^{\text{ème}}$ espèce qui s'y trouvent sous-entendues. En différenciant, on a

$$\frac{dt}{dx} = \varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\theta\frac{dv}{dx}:$$

l'équation (α) devient ainsi

$$\varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\theta\frac{dv}{dx} + \varphi(x, \theta)^2 = \mathrm{P}.$$

Comme elle est algébrique par rapport aux transcendantes de $m^{\text{ème}}$ espèce dont le nombre a été réduit à son *minimum*, on peut y remplacer θ par $\mu\theta$, μ étant une indéterminée : cela donne

$$\varphi'_x(x, \mu\theta) + \varphi'_{\mu\theta}(x, \mu\theta)\mu\theta\frac{dv}{dx} + \varphi(x, \mu\theta)^2 = \mathrm{P}$$

ou

$$d\varphi(x, \mu\theta) + \varphi(x, \mu\theta)^2 dx = \mathrm{P}dx.$$

Il faut en conclure que l'équation (α) serait satisfaite aussi par $t = \varphi(x, \mu\theta)$. En d'autres termes, l'équation (1) aura cette intégrale

$$y = e^{\int \varphi(x, \mu\theta)dx}$$

dans laquelle μ est une constante arbitraire. Comme en différenciant par rapport à μ, on a d'ailleurs

$$\frac{d\left(\frac{dy}{d\mu}\right)}{dx^2} = \mathrm{P}\frac{dy}{d\mu},$$

il s'ensuit qu'on obtient encore une nouvelle intégrale en différenciant la précédente par rapport à μ et posant si l'on veut $\mu = 1$ après la différenciation. Nous vérifierons donc l'équation (1), soit en prenant

$$y = e^{\int \varphi(x, \mu\theta)dx} = y_1,$$

soit en prenant

$$y = e^{\int \varphi(x,\,\theta)\,dx} \int \theta \varphi'_\theta(x,\,\theta)\,dx = y_2.$$

A cause de la relation qui existe toujours entre deux intégrales y_1, y_2, nous pourrons donc écrire

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = y_1^2 . \theta \varphi'_\theta(x,\,\theta) = \mathrm{C},$$

C étant une constante.

Quand la constante C n'est pas nulle, il vient

$$y_1 = \frac{\sqrt{\mathrm{C}}}{\sqrt{\theta \varphi'_\theta(x,\,\theta)}},$$

c'est-à-dire $y_1 =$ une fonction transcendante de $m^{\text{ième}}$ espèce, comme nous l'avions annoncé. Si au contraire la constante C se réduit à zéro, c'est-à-dire si la fonction $\varphi'_\theta(x,\,\theta)$ est égale à zéro, cette conclusion n'est plus permise. Mais alors dans l'équation $\varphi'_\theta(x,\,\theta) = 0$, on peut traiter θ comme une variable indépendante; d'où il suit, comme on l'a déjà expliqué plusieurs fois, que $\varphi(x,\,\theta)$ ne contient pas θ. Pour que notre démonstration soit en défaut, il faut donc que t ne renferme aucune exponentielle de $m^{\text{ième}}$ espèce.

La fonction t étant de $m^{\text{ième}}$ espèce, elle doit nécessairement dans ce cas renfermer au moins un logarithme de $m^{\text{ième}}$ espèce. Soit $\theta = \log v$ ce logarithme que nous mettrons en évidence en posant $t = \varphi(x,\,\theta)$. Puisque la fonction t contient nécessairement θ, nous ne pourrons pas avoir cette fois $\varphi'_\theta(x,\,\theta) = 0$. En différenciant la valeur de t, on trouve

$$\frac{dt}{dx} = \varphi'_x(x,\theta) + \varphi'_\theta(x,\,\theta)\frac{dv}{v\,dx}:$$

l'équation (α) donne par suite

$$\varphi'_x(x,\,\theta) + \varphi'_\theta(x,\,\theta)\frac{dv}{v\,dx} + \varphi(x,\,\theta)^2 = \mathrm{P},$$

équation où l'on a le droit de remplacer θ par $\mu + \theta$, μ étant une constante arbitraire. Or l'équation nouvelle que l'on obtient

ainsi prend aisément cette forme

$$d\varphi(x, \mu + \theta) + \varphi(x, \mu + \theta)^2 dx = P dx,$$

et elle nous montre que l'équation (α) serait encore satisfaite en prenant $t = \varphi(x, \mu + \theta)$. De là résulte pour l'équation (1) cette intégrale

$$e^{\int \varphi(x, \mu + \theta) dx}$$

qui, différenciée par rapport à μ, donne naissance à une autre intégrale de cette même équation (1), savoir

$$e^{\int \varphi(x, \mu + \theta) dx} \int \varphi'_\theta(x, \mu + \theta) dx,$$

ou plus simplement,

$$e^{\int \varphi(x, \theta) dx} \int \varphi'_\theta(x, \theta) dx,$$

en faisant $\mu = 0$ après la différenciation. Ainsi l'équation (1) est satisfaite à la fois par l'intégrale

$$y = e^{\int \varphi(x, \theta) dx} = y_1$$

et par l'intégrale

$$y = e^{\int \varphi(x, \theta) dx} \int \varphi'_\theta(x, \theta) dx = y_2,$$

entre lesquelles on doit avoir une relation de la forme

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = C.$$

Mais en mettant pour y_1 et y_2 leurs valeurs, cette relation fournit

$$y_1 \varphi'_\theta(x, \theta) = C$$

Comme la dérivée $\varphi'_\theta(x, \theta)$ n'est pas nulle, la constante C ne le sera pas non plus. On aura donc

$$y_1 = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{\varphi'_\theta(x, \theta)}}.$$

Par suite l'équation (1) sera satisfaite en posant

$$y = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{\varphi'_\theta(x, \theta)}},$$

c'est-à-dire $y =$ *une fonction transcendante de* m^ième^ *espèce*, ce qu'il fallait démontrer.

12. Par ce qui précède, il est prouvé que s'il existe une intégrale de l'équation (1) exprimée par une fonction finie explicite de x, on pourra toujours satisfaire à cette même équation par une valeur de la forme

$$y = e^{\int t dx},$$

t étant une fonction algébrique telle que l'on ait

$$(\alpha) \qquad \frac{dt}{dx} + t^2 = P.$$

Désignons par

$$(\beta) \qquad \varpi(x, t) = 0$$

l'équation algébrique *irréductible* et à coefficients rationnels dont t dépend. En la différenciant elle nous donnera

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{\varpi'_x(x, t)}{\varpi'_t(x, t)},$$

$\varpi'_x(x, t)$, $\varpi'_t(x, t)$ représentant les dérivées de $\varpi(x, t)$ par rapport à x et par rapport à t. En substituant cette valeur dans (α), on aura donc

$$(\gamma) \qquad \varpi'_x(x, t) + (P - t^2)\varpi'_t(x, t) = 0.$$

Les équations (β) et (γ) doivent donc avoir une racine commune; et comme la première est irréductible, il suit de là, par un théorème connu, que toutes ses racines t_1, t_2, etc. appartiendront à la seconde. En d'autres termes l'équation (1) sera satisfaite par toutes les intégrales particulières

$$y_1 = e^{\int t_1 dx}, \quad y_2 = e^{\int t_2 dx}, \quad \text{etc.}$$

dont le nombre est égal au degré de l'équation (β).

On prouve aisément que ce nombre ne peut pas surpasser 2. En effet deux intégrales y_1, y_2, de l'équation (1) sont toujours liées par une relation de la forme

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = C_1,$$

et cette relation devient ici

$$e^{\int (t_1 + t_2)\,dx}(t_2 - t_1) = C_1,$$

ou

$$y_1 y_2 = \frac{C_1}{t_2 - t_1}.$$

Si la constante C_1 était nulle, on aurait $t_2 = t_1$, et l'équation (β) possédant des racines égales, ne serait plus irréductible : C_1 est donc une quantité essentiellement différente de zéro.

L'existence d'une troisième intégrale

$$y_3 = e^{\int t_3\,dx}$$

entraînera de même les deux équations

$$y_2 y_3 = \frac{C_2}{t_3 - t_2}, \quad y_3 y_1 = \frac{C_3}{t_1 - t_3},$$

qui divisées membre à membre donnent

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{C_2(t_1 - t_3)}{C_3(t_3 - t_2)}.$$

Le quotient et le produit des quantités y_1, y_2 étant algébriques, on voit que ces deux intégrales le seront aussi. Or cela est absurde, puisque l'équation (1) n'a pas d'intégrale algébrique.

13. L'équation (β) est donc ou du premier ou du second degré. Mais cette seconde hypothèse doit elle-même être rejetée, en sorte que t ne peut être qu'une fonction rationnelle de x. C'est ce que je vais démontrer (*).

(*) La démonstration donnée dans le texte est très simple, mais assez longue : on arrive plus vite au but en s'appuyant sur la note du n° 4, d'après laquelle $y_1 y_2$ ne peut jamais être une fonction rationnelle de x. En effet si l'équation (β) était du

Si l'équation (β) était du second degré la valeur de t serait de la forme

$$t = U + \sqrt{V},$$

U et V étant des fonctions rationnelles de x, et l'on en tirerait

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dU}{dx} + \frac{\sqrt{V}}{2V} \cdot \frac{dV}{dx}.$$

L'équation (α) deviendrait donc

$$\frac{dU}{dx} + U^2 + V - P + \sqrt{V}\left(\frac{1}{2V} \cdot \frac{dV}{dx} + 2U\right) = 0,$$

de sorte qu'à cause du radical $\sqrt{V}$, on devrait poser séparément

$$\frac{dU}{dx} + U^2 + V - P = 0,$$
$$\frac{dV}{dx} + 4UV = 0.$$

Toute fonction rationnelle V peut se mettre sous la forme

$$V = H(x-p)^\alpha (x-q)_\beta \ldots (x-r)^\gamma,$$

H, p, q, ... r étant des constantes, et α, β, ... γ des exposants entiers positifs, nuls ou négatifs. Mais je dis qu'ici ces exposants ne peuvent pas être positifs.

---

second degré, ses deux racines t_1, t_2 seraient de la forme $U + \sqrt{V}$, $U - \sqrt{V}$: d'après ce qu'on a vu n° 12, il en résulterait $y_1 y_2 = \frac{C_1}{t_2 - t_1} = -\frac{C_1}{2\sqrt{V}}$ et par conséquent $y_1^2 y_2^2 = \frac{C_1^2}{4V}$ = une fonction rationnelle de x, ce qui est absurde.

On substituera, si l'on veut, cette méthode à celle du n° 13. Il faut même observer qu'à l'aide des principes de la note du n° 4, on peut démontrer tout d'un coup que le degré i de l'équation (β) ne surpasse jamais l'unité. En effet si i était >1, on aurait $\frac{i(i-1)}{2}$ équations semblables à celle-ci $y_1^2 y_2^2 = \frac{C_1^2}{(t_2 - t_1)^2}$. Multipliant entre elles toutes ces équations, on voit que le premier membre de l'équation résultante est le produit d'un certain nombre d'intégrales de l'équation (1), et que le second est rationnel, puisqu'il se forme en divisant une constante par le dernier terme de l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation (β): or ce résultat est absurde, d'après ce qu'on a dit dans la note citée.

On a

$$V = P - \frac{dU}{dx} - U^2,$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dP}{dx} - \frac{d^2U}{dx^2} - 2U\frac{dU}{dx}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation

$$\frac{dV}{dx} + 4UV = 0,$$

il vient

$$(\delta) \qquad \frac{d^2U}{dx^2} + 6U\frac{dU}{dx} + 4U^3 - \frac{dP}{dx} - 4PU = 0.$$

Mais, à cause de la valeur de V écrite ci-dessus, l'équation

$$\frac{dV}{dx} + 4UV = 0 \quad \text{ou} \quad U = -\frac{1}{4V}\cdot\frac{dV}{dx}$$

donne

$$U = -\frac{\alpha}{4(x-p)} - \frac{\beta}{4(x-q)} - \ldots - \frac{\gamma}{4(x-r)},$$

d'où résulte

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\alpha}{4(x-p)^2} + \frac{\beta}{4(x-q)^2} + \ldots + \frac{\gamma}{4(x-r)^2},$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -\frac{2\alpha}{4(x-p)^3} - \frac{2\beta}{4(x-q)^3} - \ldots - \frac{2\gamma}{4(x-r)^3}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (δ), on voit que celle-ci contiendra un terme divisé par $(x-p)^3$. En mettant ce terme en évidence, il sera aisé de donner à l'équation (δ) la forme

$$\frac{\alpha(\alpha+2)(\alpha+4)}{16(x-p)} = \frac{M}{N(x-p)^3},$$

M et N étant deux polynomes entiers dont le second n'est pas divisible par $x-p$. Mais de là on tire

$$\frac{\alpha(\alpha+2)(\alpha+4)}{x-p} = 16M = \text{une fonction entière.}$$

Donc pour qu'il n'y ait pas absurdité, il faut que l'on ait $\alpha = 0$ ou $\alpha = -2$ ou $\alpha = -\frac{1}{2}$. Ainsi tous les exposants α, $\beta, \ldots \gamma$ sont nuls ou négatifs.

De là il suit facilement que l'équation (δ) est impossible. En effet, si on la met sous la forme

$$\frac{dP}{dx} + 4PU = \frac{d^2U}{dx^2} + 6U\frac{dU}{dx} + 4U^3,$$

on voit que le second membre est uniquement composé de fractions proprement dites, en sorte que la partie entière contenue dans le premier doit disparaître d'elle-même. Mais pour cela il faudrait que le coefficient de la puissance de x la plus élevée se réduisît à zéro, tandis qu'il est essentiellement différent de zéro. Pour le montrer j'observe que P étant $= ax^\varepsilon + bx^{\varepsilon-1} +$ etc., on a $\frac{dP}{dx} = \varepsilon ax^{\varepsilon-1} +$ etc. De plus en divisant P par les divers facteurs $x - p$, $x - q, \ldots x - r$, qui entrent en dénominateurs dans l'expression de U écrite plus haut, on voit que le terme de 4PU du degré le plus élevé est

$$-a(\alpha + \beta + \ldots + \gamma)x^{\varepsilon-1}$$

Le coefficient de $x^{\varepsilon-1}$ dans $\frac{dP}{dx} + 4PU$ se trouve ainsi égal a

$$a[\varepsilon - (\alpha + \beta + \ldots + \gamma)]:$$

par conséquent il n'est pas nul puisque ε est > 0 et que.... $\alpha + \beta + \ldots + \gamma$ est $= 0$ ou < 0.

Ce résultat absurde nous fait voir que l'équation (β) ne peut pas être du second degré.

14. La valeur de t que l'on cherche est donc rationnelle : elle se compose d'une partie entière Q et d'une partie fractionnaire réductible en une suite de fractions simples de la forme

$$\frac{G}{(x-p)^\alpha}:$$

de sorte que l'on peut écrire

$$t = Q + \Sigma \frac{G}{(x - p)^{\alpha}}.$$

De là résulte

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dQ}{dx} - \Sigma \frac{\alpha G}{(x - p)^{\alpha+1}};$$

et il faut qu'en portant ces valeurs dans l'équation (α), celle-ci soit satisfaite. Mais comme son premier membre se composera aussi d'une partie entiere et d'une partie fractionnaire, il sera nécessaire que ces deux parties s'annullent séparément. Or la partie entière de t^2 contient outre Q^2 un terme Q_1 provenant du double produit de Q par la partie fractionnaire de t. On doit donc poser

$$\frac{dQ}{dx} + Q^2 + Q_1 - P = 0,$$

d'où

$$P = Q^2 + \frac{dQ}{dx} + Q_1.$$

Le degré de la fonction Q_1 et par suite de $\frac{dQ}{dx} + Q_1$ est inférieur au moins d'une unité à celui de Q. L'équation que je viens d'écrire exige donc que P et Q^2 soient de même degré et par suite que P soit de degré pair. On a donc ce premier théorème : *Lorsque le degré ε de la fonction* P *est impair, l'équation* (1) *n'a jamais d'intégrale exprimable sous forme finie explicite.*

Supposons maintenant $\varepsilon = 2i$: Q^2 étant de degré $2i$, Q sera de degré i et $\frac{dQ}{dx} + Q_1$ de degré $i - 1$ tout au plus. Donc $\frac{dQ}{dx} + Q_1$ est le reste R qu'on obtiendra en extrayant autant que possible la racine carrée de P, tandis qu'au signe près la fonction Q est égale à la partie entière de cette même racine carrée. *La détermination de* Q *est donc facile : elle se réduit à trouver la partie entière de la quantité* $\sqrt{P}$ *ordonnée suivant les puissances descendantes de x. La valeur de* Q *pourra d'ailleurs être affectée du signe* + *ou du signe* —.

15. Maintenant occupons-nous de la partie fractionnaire de t. Parmi les fractions simples qui la composent, considérons spéciale-

ment celle qui répond au diviseur $x-p$ et qui est de la forme

$$\frac{G}{(x-p)^{\alpha}};$$

en outre, s'il y en a plusieurs de cette espèce, attachons-nous de préférence à celle où l'exposant α est le plus grand. Dès-lors les valeurs de $\frac{dt}{dx}$ et de t^2 pourront s'écrire ainsi

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{\alpha G}{(x-p)^{\alpha+1}} + \frac{M_1}{N_1(x-p)^{\alpha}},$$
$$t^2 = \frac{G^2}{(x-p)^{2\alpha}} + \frac{M_2}{N_2(x-p)^{2\alpha-1}},$$

M_1, M_2, N_1, N_2, étant des polynomes dont les deux derniers ne sont pas divisibles par $x-p$. En les substituant dans (α), on aura

$$\frac{G^2}{(x-p)^{2\alpha}} - \frac{\alpha G}{(x-p)^{\alpha+1}} + \frac{M_2}{N^2(x-p)^{2\alpha-1}}$$
$$+ \frac{M_1}{N_1(x-p)^{\alpha}} - P = 0.$$

Or si 2α est $>$ ou $<$ $\alpha+1$, cette équation est évidemment absurde. Il faut donc poser $2\alpha = \alpha+1$, c'est-à-dire $\alpha = 1$. Pour que les deux premiers termes se détruisent, il faut de plus que $G = 1$. Ainsi la quantité

$$\sum \frac{G}{(x-p)^{\alpha}}$$

se réduit à

$$\frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-q} + \ldots + \frac{1}{x-r}.$$

16. Il s'ensuit que t peut avoir l'une des deux formes suivantes

$$t = Q + \frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-q} + \ldots + \frac{1}{x-r},$$

ou

$$t = -Q + \frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-q} + \ldots + \frac{1}{x-r},$$

suivant que l'on prend Q avec le signe + ou avec le signe —. Toute intégrale rationnelle de l'équation (α) rentre dans l'une ou l'autre de ces formes ; mais nous verrons tout-à-l'heure qu'elles ne sont jamais possibles toutes deux à la fois.

17. A la première valeur de t répond une valeur de y exprimée par

$$e^{\int t dx} \quad \text{ou} \quad Ye^{\int Q dx},$$

Y étant un polynome entier. On en déduit

$$\frac{dy}{dx} = e^{\int Q dx}\left(\frac{dY}{dx} + QY\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{\int Q dx}\left[\frac{d^2Y}{dx^2} + 2Q\frac{dY}{dx} + \left(\frac{dQ}{dx} + Q^2\right)Y\right].$$

En vertu de l'équation (1) on doit donc avoir

$$\frac{d^2Y}{dx^2} + 2Q\frac{dY}{dx} + \left(\frac{dQ}{dx} + Q^2 - P\right)Y = 0,$$

c'est-à-dire

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2Y}{dx^2} + 2Q\frac{dY}{dx} + \left(\frac{dQ}{dx} - R\right)Y = 0,$$

puisque

$$P = Q^2 + R.$$

Telle est l'équation différentielle dont la fonction Y dépend. Il sera par son moyen toujours très facile de trouver cette fonction ou de prouver qu'elle n'existe pas

Voici, du reste, comment on calcule le degré de la fonction Y. Le premier terme de Q est $x^r\sqrt{a}$: soit $a'x^{r-1}$ le terme de R où x est élevée à la puissance $r-1$, a' se réduisant à zéro quand ce terme manque dans R ; enfin, soit A_1x^i le premier terme de Y. Il est clair que le terme du degré le plus élevé dans le premier membre de l'équation (A) sera

$$A_1\left(2i\sqrt{a} + r\sqrt{a} - a'\right)x^{i+r-1}.$$

Pour qu'il disparaisse, il faudra donc qu'on ait

$$i = \frac{a' - \nu\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}.$$

Pour que le polynome Y existe il faut donc que

$$\frac{a' - \nu\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$$

soit un nombre entier nul ou positif : cette condition étant remplie, on prendra ce nombre pour valeur de i; on fera

$$Y = Ax^i + A_{i-1}x^{i-1} + \ldots + A_0,$$

et l'on cherchera par la méthode des coefficients indéterminés si une valeur de cette forme peut ou non satisfaire à l'équation (A).

Si l'on avait pris Q avec le signe —, on aurait de même trouvé pour y une valeur de la forme

$$y = Ze^{-\int Q dx},$$

Z étant un polynome entier déterminé par l'équation

$$(B) \qquad \frac{d^2Z}{dx^2} - 2Q\frac{dZ}{dx} - \left(\frac{dQ}{dx} + R\right) Z = 0.$$

Le degré du polynome Z aurait été

$$-\frac{a' + \nu\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}.$$

Or on peut observer que la somme des deux quantités

$$\frac{a' - \nu\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}, \qquad -\frac{a' + \nu\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$$

est égale à $-\nu$: quand une de ces deux quantités est nulle ou positive, l'autre est donc nécessairement négative : ainsi les deux polynomes Y et Z ne sont jamais possibles à la fois.

Quand ils n'existent ni l'un ni l'autre, l'équation (1) n'a aucune intégrale de la forme $y =$ *une fonction finie explicite de* x.

Si au contraire l'un d'eux, Y par exemple, existe, on satisfait à

l'équation (1) en posant

$$y = Ye^{\int Q dx} = Ye^{\lambda},$$

où λ désigne l'intégrale de Qdx. Cette valeur de y est une fonction transcendante de première espèce. Mais dans ce cas même l'intégrale complète de l'équation (1), savoir

$$y = AYe^{\lambda} + BYe^{\lambda}\int \frac{e^{-2\lambda}dx}{Y^2},$$

ne peut pas être débarrassée du signe $\int$. En effet, si l'intégrale

$$\int \frac{e^{-2\lambda}dx}{Y^2}$$

était exprimable en fonction finie explicite de x, il suit des théorèmes démontrés dans mon Mémoire sur *l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes* (*) qu'elle aurait une valeur de la forme

$$Xe^{-2\lambda},$$

X étant une fonction rationnelle de x. L'équation (1) aurait donc cette intégrale particulière

$$YXe^{-\lambda} \quad \text{ou} \quad YXe^{-\int Q dx};$$

par suite l'équation (α) à laquelle on satisfait déjà en prenant

$$t = Q + \frac{dY}{Y\,dx}$$

serait également satisfaite par

$$t = -Q + \frac{d(YX)}{YX\,dx},$$

c'est-à-dire que l'on pourrait attribuer à t l'une et l'autre des deux formes indiquées n° 16. Mais on a vu plus haut que cela est impossible. Donc l'intégrale complète de l'équation (1) n'est jamais exprimable en fonction finie explicite de x, bien que cette équation (1)

(*) Journal de M. Crelle, tome 13, p. 93.

puisse avoir dans certains cas une intégrale Ye^{λ} ou $Ze^{-\lambda}$ réductible à cette forme.

18. Je terminerai ce Mémoire par une observation qui n'est pas sans importance. En cherchant à intégrer l'équation (1), nous avons toujours borné notre analyse aux fonctions qu'on obtient en combinant un nombre limité de fois les signes algébriques exponentiels et logarithmiques; mais cette analyse s'étend d'elle-même au cas où l'on joindrait à ces trois signes le signe $\int$ indiquant une intégrale indéfinie, relative à la variable x, c'est-à-dire une intégrale dont la limite supérieure est x et dont la limite inférieure est une constante déterminée ou arbitraire. En effet, les fonctions qui naissent de l'emploi du signe $\int$ jouissent, dans ce genre de recherches, de propriétés toutes semblables à celles des logarithmes, et peuvent se traiter par les mêmes méthodes.

Généralisation de la Théorie des foyers dans les sections coniques;

PAR M. ABEL TRANSON.

M. Quetelet a fait voir qu'un cône droit étant coupé par un plan, si on imagine deux sphères qui soient à la fois inscrites au cône et tangentes au plan, leurs points de contact avec celui-ci seront les foyers de la section; et de plus, si on conçoit que les plans des deux cercles de contact de ces sphères avec le cône soient prolongés jusqu'à la rencontre du plan sécant, ils y traceront les deux directrices.

M. Dandelin a étendu ces théorèmes à l'hyperboloïde de révolution à une nappe.

Mais indépendamment des deux droites directrices, il existe pour toute section conique deux cercles qu'on peut appeler à bon droit *directeurs*. Je veux parler de ces deux cercles qui ont leurs centres respectivement aux deux foyers et qui ont tous deux pour rayon une ligne égale à l'axe principal. On sait assez combien la considération de ces cercles apporte de facilité dans la construction de la plupart des problèmes qui se rapportent aux sections coniques, et leur signification dans le solide se peut donner aussi facilement que celle des foyers et des directrices. En effet, si on se représente toutes les sphères qui, étant tangentes au plan sécant, touchent *extérieurement* le solide aux mêmes points que l'une des deux sphères inscrites, le lieu des contacts de ces sphères extérieures avec le plan de section sera l'un des deux cercles directeurs, et notamment celui qui a pour centre le foyer relatif à l'autre sphère inscrite.

Je me suis proposé dans les recherches qui suivent d'introduire, dans la construction donnée par M. Quetelet pour les foyers, une modification qui m'a paru ouvrir le champ à quelques remarques curieuses et procurer à la notion même des foyers une extension remarquable.

I.

Définition des systèmes focaux simples ou composés et à bases circulaires.

Imaginons que les deux sphères inscrites dans le solide ne soient plus tangentes au plan sécant, mais qu'elles le pénètrent d'une quantité quelconque. Il va sans dire que leurs courbes de contact se déplaceront sur le solide. De plus elles traceront sur le plan sécant deux cercles dont les centres demeureront toujours sur l'axe principal de la conique, se rapprochant d'autant plus du centre de celle-ci que la pénétration sera plus considérable si la section est elliptique; s'en éloignant d'autant plus si c'est une hyperbole.

Cela posé, si d'un point quelconque de la section on mène une tangente à chacun des deux cercles dont il s'agit, on pourra appliquer le raisonnement employé par MM. Quetelet et Dandelin dans le cas où les sphères inscrites ne font que toucher le plan sécant, et on verra encore que la somme ou bien la différence de ces deux lignes respectivement tangentes aux deux cercles de pénétration, est une quantité constante.

Pour fixer les idées supposons que les deux sphères aient pénétré le plan sécant de telle façon que les deux cercles de pénétration soient égaux. On en conclura facilement que leurs centres sont à égale distance de part et d'autre du centre de la section. Et alors si d'un point quelconque de cette section on mène à chacun de ces cercles égaux deux tangentes, et si en chacun d'eux on joint le centre aux points de contact, on formera deux quadrilatères jouissant de cette propriété que la somme ou bien la différence de leurs aires ne variera pas, quel que soit le point de la section que l'on considère.

Or, en passant d'un point à un autre de la section, les deux *quadrilatères vecteurs* ci-dessus définis pivotent sur les centres des cercles de pénétration; on peut donc considérer ces centres comme de véritables *foyers*. Et puisque plusieurs systèmes de cercles conjugués peuvent être construits sur l'axe principal d'une section conique, il y aura lieu d'y distinguer plusieurs *systèmes focaux*.

Nous appellerons *bases* du système focal les deux cercles sur lesquels reposent les quadrilatères vecteurs, et *module* la quantité constante formée de la somme ou de la différence des aires vectrices. Quand les deux *bases* sont égales, le module est *simple* parce qu'il représente la simple somme ou différence des deux quadrilatères ci-dessus définis. Mais si les deux bases sont inégales, il faut, pour avoir une somme ou une différence constante, multiplier chacune des aires vectrices par un coefficient inversement proportionnel au rayon de la base qui lui correspond. Nous dirons alors que le module est *composé*.

Déjà, en acceptant ces définitions, on voit qu'une même conique est susceptible d'une infinité de systèmes focaux qui diffèrent entre eux par la situation des foyers, par la grandeur des bases, et aussi par la grandeur et la forme du module. A la vérité les foyers ne se présentent jusqu'ici que sur l'axe principal, intérieurement aux deux foyers ordinaires dans l'ellipse, extérieurement dans l'hyperbole. Mais si on consent à cette transformation de la notion des foyers qui consiste à substituer une relation de superficies à la relation linéaire qui les a caractérisés jusqu'ici, on va voir cette relation subsister pour tous les points intérieurs et extérieurs d'un diamètre quelconque.

II.

Systèmes focaux à bases elliptiques; systèmes uniformes et systèmes bifides.

Faisons abstraction du solide et considérons sur le plan une section conique avec l'un quelconque de ses systèmes focaux à bases circulaires et à module simple ou composé, tels en un mot qu'on vient de les définir. De là nous allons faire naître sans difficulté d'autres systèmes focaux dont les bases seront elliptiques et dont les foyers seront sur un diamètre quelconque.

Imaginons premièrement que toutes les ordonnées ou bien toutes les abscisses croissent ou décroissent dans un rapport constant. La section conique, quoique changeant de forme, demeurera de même espèce, je veux dire elliptique ou hyperbolique. De plus elle sera encore rapportée à ses axes, mais avec cette circonstance particulière à l'el-

lipse que, par l'effet de la transformation dont il s'agit, les axes pourront être renversés. En même temps les deux cercles, bases du système focal, se changeront en ellipses. Et, comme par une telle transformation toutes les aires des figures transformées croissent ou diminuent dans un rapport constant qui est celui même des anciennes coordonnées aux nouvelles, il est clair que les quadrilatères vecteurs de la conique transformée, pivotant toujours sur des points fixes mais reposant sur des bases elliptiques, offriront dans la somme ou dans la différence de leurs aires un module constant, lequel sera simple ou composé en même temps que celui de la conique primitive. Il y aura donc encore un vrai *système focal*. Enfin les foyers continueront à la vérité d'être sur l'axe principal, si ce n'est dans le cas du renversement des axes de l'ellipse; mais il est facile de voir que sur ce même axe ils franchiront les limites qui bornaient leur position dans les systèmes à base circulaire (*).

En second lieu, par une nouvelle transformation qui consiste à faire tourner chaque ordonnée sur son pied d'un angle constant, on passera d'un système d'axes rectangulaires à un système de diamètres conjugués; et alors il deviendra manifeste qu'il est possible de construire sur un diamètre quelconque une infinité de systèmes focaux. Seulement les foyers demeurent dans tout ceci intérieurs à la concavité de la conique, ce qui paraît être un obstacle à ce qu'on puisse concevoir un système focal dont les foyers seraient sur le second axe de l'hyperbole ou plus généralement sur aucun des diamètres qui ne rencontrent pas cette courbe. Ce défaut apparent d'analogie disparaîtra par le moyen du calcul quand nous déterminerons d'une manière générale la forme des bases qui conviennent à une situation donnée des foyers. Mais auparavant il est nécessaire de revenir un instant à la considération du solide pour y signaler une circonstance curieuse.

(*) Par cette transformation la section proposée a pu passer de la forme elliptique à la forme circulaire; ainsi le cercle lui-même est susceptible d'une infinité de foyers et de systèmes focaux; mais les bases de ses systèmes focaux ne peuvent jamais être circulaires; de sorte que la relation caractéristique des foyers n'y prend jamais une forme linéaire comme dans l'ellipse ou dans l'hyperbole. On verra au contraire que la propriété des *contre-foyers* (ci-dessous au § VIII) est une relation linéaire dans le cercle comme dans toute autre section conique.

Dans la théorie des foyers ordinaires, la constante qui correspond au module de nos systèmes focaux, mais qui est alors essentiellement linéaire, conserve la même signification sur toute l'étendue d'une même courbe. Je veux dire que, sur une même conique, c'est toujours la somme ou bien la différence des rayons vecteurs qui est une quantité constante. Il n'en va pas toujours ainsi quand on considère soit le module linéaire formé avec deux lignes menées tangentiellement à deux bases circulaires; soit plus généralement le module superficiel formé avec deux quadrilatères à base circulaire ou elliptique. En effet, bien que le module soit toujours dans chaque système focal une quantité essentiellement constante, il peut se faire que cette quantité constante se forme, pour certaines parties de la section conique, de la somme (simple ou composée) des deux tangentes ou des deux aires vectrices; et que pour d'autres parties elle représente la différence (également simple ou composée) de ces mêmes tangentes ou aires vectrices. Pour s'en convaincre, à l'égard premièrement des systèmes circulaires, il suffit d'imaginer que les deux sphères qui déterminent les bases d'un tel système aient assez pénétré dans le plan sécant pour que leurs lignes de contact avec le cône ou avec l'hyperboloïde rencontrent la courbe de section, circonstance qui entraîne évidemment le contact de cette même courbe avec les cercles de base. Alors il arrivera que certaines parties de la section seront intérieures au système des deux plans des courbes de contact, tandis que d'autres parties lui seront extérieures. Or il est clair que, quelle que soit la nature de cette section, le module se formera quant aux parties intérieures de la somme des tangentes vectrices, et au contraire de leur différence quant aux parties extérieures. Ainsi le module n'a pas une signification uniforme dans les systèmes à bases circulaires, toutes les fois au moins que les cercles de base touchent la conique, et c'est précisément aux points de contact que le changement de signification a lieu

Afin d'éviter les circonlocutions, j'aurai besoin qu'on me permette d'appeler *systèmes uniformes* les systèmes focaux dans lesquels le module ne change pas de signification sur tout le cours de la conique; et par opposition *systèmes bifides* ceux dans lesquels ce changement a lieu.

Il est facile de voir que quand la pénétration du plan sécant par les sphères inscrites a lieu de telle sorte que les courbes de contact de ces sphères avec le solide rencontrent la courbe de section aux extrémités de son axe principal, les deux cercles de pénétration se confondent avec les cercles osculateurs de la section à ces mêmes extrémités ; ou, en d'autres termes, les foyers coïncident alors avec les centres de courbure relatifs aux sommets du grand axe. A partir de cette situation, les sphères inscrites pénétrant davantage dans le plan sécant, les foyers continuent de se rapprocher du centre de la section si cette section est elliptique, ou continuent de s'en éloigner si elle est hyperbolique. Mais, à partir de cette même situation, le système focal est toujours bifide ; sa construction est donc extrêmement facile puisque le rayon des bases se trouve constamment égal à la normale de la conique. La considération du solide suggérerait également quelque construction simple pour les bases des systèmes circulaires dont les foyers sont situés sur cette partie du grand axe qui est comprise entre les foyers ordinaires et les centres de la courbure aux sommets principaux ; mais, comme cette détermination se pourra déduire des formules générales, je me borne à remarquer ici qu'en appliquant aux systèmes circulaires bifides les transformations indiquées ci-dessus, on est conduit à reconnaître des systèmes bifides à base elliptique sur les deux axes et généralement sur tous les diamètres d'un ellipse; comme aussi sur tous les diamètres transverses d'une hyperbole. Tous les systèmes bifides ainsi produits ont ce caractère commun qu'il y a contact entre leurs bases et la conique ; et d'ailleurs on peut prouver généralement que ce caractère de contact et la propriété d'être bifides vont toujours ensemble; car quelle que soit la forme des bases on pourra toujours par l'emploi des mêmes transformations géométriques passer du système focal proposé à un autre système ayant des bases circulaires et qui possédera évidemment l'une ou l'autre de ces deux propriétés en même temps que le système focal primitif. Or ce système à bases circulaires sera ou ne sera pas bifide suivant que ses bases toucheront ou ne toucheront pas la conique transformée.

III.

Formules pour les bases des systèmes focaux.

Concevons un cercle tracé sur un plan, et prenons le centre de ce cercle pour origine des coordonnées. Que d'un point (x, y) du même plan on mène à ce cercle deux tangentes et qu'on joigne le centre aux deux points de contact, l'aire du quadrilatère ainsi formé aura pour mesure

$$a\sqrt{x^2+y^2-a^2}=k;$$

en désignant par a la longueur du rayon. De là, et par les transformations géométriques ci-dessus employées, on conclura qu'étant donnée une ellipse rapportée à deux diamètres conjugués sous l'angle ω et dont les longueurs respectives soient $2a$ et $2b$; si d'un point quelconque (x, y) de son plan on lui mène deux tangentes et si on achève le quadrilatère à l'aide des deux rayons elliptiques qui passent par les points de contact, l'aire de cette figure aura pour expression

$$ab\sin\omega\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}=k'. \qquad (1)$$

Imaginons maintenant que deux ellipses, qu'on pourra d'abord supposer inégales et même dissemblables, soient situées sur un plan d'une manière quelconque. Considérons ces deux ellipses comme les bases conjuguées d'un système focal, et cherchons le lieu géométrique des points pour lesquels la somme ou la différence (simple ou composée) des quadrilatères (k') et (k'') construits comme ci-dessus, est une quantité constante.

On prendra pour axe des abscisses la ligne qui joint les centres des deux ellipses, et on placera l'origine au milieu de cette ligne dont je représente la longueur par $2l$. Soient d'ailleurs ω et ω' les angles que font respectivement dans chaque ellipse les cordes conjuguées à la direction de la ligne des centres; alors, en prenant pour axe des ordonnées une ligne menée sous l'un de ces angles (soit ω), la

condition du problème, c'est-à-dire la relation

$$(k') \pm m(k'') = 2C,$$

en désignant par $2C$ la valeur du module et par m son coefficient de composition, sera la suivante

$$\left(ab\sin\omega\sqrt{\frac{(x-l)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}\right)$$
$$\pm m\left[a'b'\sin\omega'\sqrt{\frac{\left(x+y\frac{\sin(\omega'-\omega)}{\sin\omega'}+l\right)^2}{a'^2}+\frac{y^2\sin^2\omega}{b'^2\sin^2\omega'}-1}\right]=2C;$$

a et a' étant les demi-diamètres qui coïncident avec la ligne des centres; b et b' les demi-diamètres respectivement conjugués aux premiers dans l'une et l'autre ellipse.

Cette équation, après avoir été dégagée des radicaux, s'élèvera en général au quatrième degré. Si l'on veut qu'elle se réduise au deuxième, il faut, en écartant quelques circonstances qui sont sans intérêt, poser les conditions :

$$\omega = \omega',$$
$$b = mb',$$
$$a = ma'.$$

C'est-à-dire que les deux courbes adoptées pour bases doivent être semblables et semblablement placées. Et quand on aura introduit ces conditions, le lieu résultant sera une conique ayant son centre sur l'axe des abscisses, c'est-à-dire sur la ligne des centres des deux bases; conique généralement non semblable aux bases, mais pour laquelle les deux directions ci-dessus choisies comme axes des coordonnées représenteront, aussi bien que dans ces mêmes bases, un système de cordes conjuguées. Quant à la position précise du centre de cette conique sur l'axe des abscisses, elle dépendra en général de la grandeur et de la composition du module, aussi de la grandeur des bases, et enfin de la distance des deux foyers. Seulement, quand les bases sont égales, le centre de la conique est toujours au point qui partage également la distance $2l$. Ces diverses circonstances s'offraient déjà dans les précédentes considérations

géométriques; mais elles reçoivent ici un caractère de généralité absolue.

Nous écarterons désormais la considération des modules composés parce qu'elle n'introduit aucune particularité essentielle. Ajoutant donc aux conditions précédentes la relation $m = 1$, l'équation fondamentale ci-dessus prendra la forme

$$\sqrt{\frac{(x-l)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1} + \sqrt{\frac{(x+l)}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1} = \frac{2C}{ab\sin\omega}, \quad (2)$$

laquelle étant dégagée de radicaux revient à la suivante

$$C^2a^2\sin^2\omega . y^2 + b^4\sin^2\omega(C^2 - l\,b^2\sin^2\omega)\,x^2 = C^2(C^2 - l\,b\,\sin^2\omega + a^2b\,\sin^2\omega). \quad (3)$$

Pour faire coïncider le lieu géométrique correspondant à (3) avec une conique dont l'équation rapportée à un système de diamètres conjugués sous le même angle ω, soit

$$\frac{y^2}{b_,^2} + \frac{x^2}{a_,^2} = 1, \quad (4)$$

il faut poser les relations

$$\left.\begin{aligned} b^2 &= \frac{b_,^2}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4C^2}{a_,b_,\sin^2\omega}}\right) \\ a^2 &= \frac{a_,^2}{b_,^2} - \frac{l^2}{b^2 - b^2} \end{aligned}\right\}, \quad (5)$$

lesquelles vont nous servir à déterminer sur chaque diamètre d'une conique les dimensions des bases des divers systèmes focaux, d'après la grandeur du module et la situation des foyers.

Et d'abord, on voit par la simple inspection de ces formules, que dans toute section conique, ellipse ou hyperbole, non-seulement deux points quelconques d'un même diamètre symétriquement placés à l'égard du centre peuvent être considérés comme foyers, mais de plus qu'ils peuvent être considérés comme les foyers d'une infinité de systèmes focaux, différant tous les uns des autres par la grandeur du module; et qu'enfin lorsque la grandeur du module est fixée, il y a encore pour les mêmes foyers deux systèmes focaux bien distincts, résultant de la double valeur de b^2 et a^2 dans les formules (5). C'est

à proprement parler la discussion de ces deux systèmes focaux relatifs aux mêmes foyers et aux diverses grandeurs possibles du module, qui constitue la théorie générale des foyers dans les sections coniques.

Pour faciliter cette discussion nous appellerons *premier système focal* celui des deux systèmes dans lequel le demi-diamètre de base conjugué à la ligne commune des centres est le plus grand, c'est-à-dire le système dans lequel la valeur de b^2 contient le radical avec le signe $+$: et l'on peut remarquer de suite que quelle que soit la conique (4), la valeur de ce demi-diamètre, dans le premier comme dans le second système focal, est indépendante de la distance des foyers au centre; elle dépend seulement de la grandeur du module, à condition, bien entendu, que les foyers demeurent toujours sur le même diamètre pris ici pour axe des abscisses.

IV.

Application à l'ellipse. — Systèmes focaux à bases hyperboliques.

Nous supposerons en premier lieu que la section conique, ci-dessus marquée par l'équation (4), soit une ellipse; $a_{,}^2$ et $b_{,}^2$ seront essentiellement positifs, et par suite la valeur du module aura une limite. En effet, pour que les deux bases soient réelles, il faudra que le module $2C$ ne dépasse pas la valeur $a_{,}b_{,}\sin\omega$; c'est-à-dire il faudra que la valeur attribuée à la somme ou à la différence des deux aires vectrices ne dépasse pas la quatrième partie du rhombe circonscrit à l'ellipse proposée. Tant que le module satisfait à cette condition

$$2C < a_{,}b_{,}\sin\omega,$$

les deux systèmes focaux sont distincts; mais lorsqu'il atteint la limite

$$2C = a_{,}b_{,}\sin\omega,$$

ils se confondent en un seul dont les bases ont pour formules

$$b^2 = \frac{b_{,}^2}{2},$$

$$a^2 = \frac{a_{,}^2}{2} - l^2.$$

D'ailleurs, à ne considérer que la circonstance où les bases sont réelles, on voit que les deux valeurs de b^2 qui résultent de la première des formules (5) sont toujours positives; mais il se peut que les valeurs correspondantes de a^2 soient toutes deux positives, ou toutes deux négatives : ou enfin que l'une soit positive et l'autre négative. D'où l'on est induit à conclure que les deux systèmes focaux peuvent avoir tous les deux des bases elliptiques, ou tous les deux des bases hyperboliques; ou bien l'un avoir des bases elliptiques et l'autre des bases hyperboliques. Toutefois, avant que de pousser plus loin, il convient d'éclaircir ce résultat de systèmes focaux *à bases hyperboliques*.

Si d'un point quelconque (x, y), extérieur à une hyperbole, on lui mène deux tangentes, et si on joint le centre de la courbe avec les deux points de contact, on formera comme pour l'ellipse un quadrilatère, mais avec ceci de différent que le quadrilatère relatif à l'hyperbole est toujours à angle rentrant. Ceci tient à ce que dans l'ellipse le centre de la courbe et le point de concours de deux tangentes sont toujours l'un au-dessus, l'autre au-dessous de la corde des contacts; tandis que dans l'hyperbole ils sont toujours d'un même côté de cette ligne. Quoi qu'il en soit, si au lieu de former la superficie de ce quadrilatère, comme dans le cas de l'ellipse, par la somme des deux triangles qui ont pour base commune la corde des contacts et pour sommets respectifs le centre de la courbe et le point de concours des deux tangentes; si, dis-je, dans le cas de l'hyperbole, on fait la différence de ces deux mêmes triangles, on trouvera pour expression algébrique de cette différence

$$ab \sin \omega \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}}$$

lorsque le diamètre $2a$ compté ici sur l'axe des abscisses est un bien

$$ab \sin \omega \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

lorsque ce même diamètre $2a$ est un diamètre imaginaire. Or on voit, dans l'un ou l'autre cas, que cette expression du quadrilatère

relatif à l'hyperbole, n'est autre chose que la mesure du quadrilatère relatif à l'ellipse et marqué k' dans le précédent paragraphe, avec cette seule différence qu'on y a changé soit le signe de b^2, soit celui de a^2. Par conséquent le lieu géométrique des points pour lesquels le module formé sur des bases hyperboliques est une quantité constante sera donné exactement par l'équation (3), pourvu qu'on y fasse l'un ou l'autre de ces deux changements. Ou bien encore, si les circonstances qui déterminent le système focal, c'est-à-dire si la grandeur donnée du module avec la distance aussi donnée des foyers, procurent un sens négatif soit aux valeurs de a^2, soit à celles de b^2, dans les formules (5), c'est la marque que les circonstances en question entraînent des bases hyperboliques au lieu de bases elliptiques.

Reprenons maintenant la discussion des formules (5). Comme les deux valeurs de b^2, dans le cas où la conique donnée est une ellipse, sont essentiellement positives, il s'ensuit que dans l'ellipse, lorsque les bases d'un système focal sont hyperboliques, leurs diamètres imaginaires coïncident toujours avec la ligne des foyers. D'ailleurs la condition pour que les bases soient elliptiques, se réduisant à l'inégalité suivante

$$\frac{2l^2-a_{,}^2}{a_{,}^2} < \mp\sqrt{1-\frac{4C^2}{a_{,}^2 b_{,}^2 \sin^2\omega}},$$

dans laquelle le signe supérieur du radical se rapporte au premier système focal, on voit que cette condition sera toujours satisfaite à l'égard du second système toutes les fois qu'on aura

$$l < \frac{1}{2} a_{,}\sqrt{2},$$

quelle que soit d'ailleurs la grandeur du module; c'est-à-dire que le second système focal sera forcément à bases elliptiques toutes les fois que les foyers seront à l'égard du centre en-deçà de la position qui convient à cette limite de l. Mais au-delà de la même limite, le premier système sera nécessairement à bases hyperboliques, et cela quelle que soit aussi la grandeur du module, par la seule raison qu'on aura

$$\frac{2l^2-a_{,}^2}{a_{,}^2} > 0.$$

Dans le premier cas, c'est-à-dire lorsqu'on a $l < \frac{1}{2} a_{,} \sqrt{2}$, ce qui assure au second système focal des bases elliptiques, le premier système aura soit des bases elliptiques, soit des bases hyperboliques, selon qu'on aura

$$C^2 > l^2 b_{,}^2 \sin^2 \omega \left(1 - \frac{l^2}{a_{,}^2}\right),$$

ou bien

$$C^2 < l^2 b_{,}^2 \sin^2 \omega \left(1 - \frac{l}{a_{,}^2}\right).$$

Or, il arrive que l'une et l'autre de ces conditions sont compatibles avec la condition fondamentale de la réalité des bases, qui est la suivante

$$C^2 < \frac{a_{,}^2 b_{,}^2 \sin^2 \omega}{4};$$

seulement la deuxième devient impossible à la limite de $l = 0$. Ainsi « depuis le centre jusqu'à une distance égale à $\frac{1}{2} a_{,} \sqrt{2}$, le pre-
» mier système focal est indifféremment à bases elliptiques ou à
» bases hyperboliques, suivant la grandeur du module; au lieu que,
» entre ces mêmes limites, le second système est toujours elliptique. »

Dans le cas de $l > \frac{1}{2} a_{,} \sqrt{2}$, circonstance qui assure au premier système des bases hyperboliques, la condition pour que le second système demeure elliptique sera donnée par

$$C^2 < l^2 b_{,}^2 \sin^2 \omega \left(1 - \frac{l^2}{a_{,}^2}\right),$$

condition à laquelle on pourra toujours satisfaire, pourvu que le facteur $1 - \frac{l^2}{a_{,}^2}$ ne soit pas négatif. D'ailleurs, on pourrait toujours satisfaire à la condition inverse qui procure au second système des bases hyperboliques; ainsi « quand les foyers sont au-delà de la
» distance $l = \frac{1}{2} a_{,} \sqrt{2}$, le second système peut être indifféremment

» elliptique ou hyperbolique, pourvu toutefois qu'on ne sorte pas » de l'intérieur de la courbe; car, pour tous les points du diamètre » qui sont extérieurs à l'ellipse, les deux systèmes focaux sont tou- » jours à bases hyperboliques. »

Après avoir ainsi étudié les systèmes focaux par rapport à la nature des bases, si l'on cherche à savoir dans quelles circonstances ils sont uniformes et dans quelles ils sont bifides, on trouve encore que ces circonstances deviennent indépendantes de la grandeur du module pour certaines situations des foyers. Afin de s'en assurer, il faut effectuer le calcul des deux aires vectrices qui sont respectivement représentées par

$$ab \sin\omega \sqrt{\frac{(x-l)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}, \quad \text{et par} \quad ab \sin\omega \sqrt{\frac{(x+l)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}.$$

Or, en faisant attention que x et y doivent satisfaire à l'équation (4), dans laquelle $a_{,}^2$ et $b_{,}^2$ seront données en fonction de a^2 et de b^2 par la comparaison de cette même équation (4) avec (3), on pourra transformer ces deux expressions dans les suivantes :

$$C - x\frac{lb^2 \sin^2\omega}{C}, \quad \text{et} \quad C + x\frac{lb^2 \sin^2\omega}{C};$$

dont la première se rapporte à la base qui a son centre du côté des x positifs.

Je prie le lecteur de remarquer en passant que chacune des deux aires vectrices se trouve exprimée *en fonction rationnelle de l'abscisse;* ce qui confirmerait au besoin l'analogie fondamentale sur laquelle reposent ces recherches.

Comme tout est symétrique de chaque côté du centre, il suffira de discuter la formation du module pour les divers points de la conique qui sont d'un même côté, soit par exemple du côté des x positifs. Or on peut toujours concevoir x assez petit pour que la première des expressions ci-dessus soit positive; et comme la seconde l'est toujours quel que soit x, il s'ensuit que jusqu'à une certaine distance de l'axe des ordonnées, le module se composera toujours *de la somme* des aires vectrices. Mais, si x augmente jusqu'à rendre

$x\frac{lb^2\sin^2\omega}{C}$ plus grand que C, alors celle des deux aires dont la base est du côté des x positifs a pour valeur l'expression suivante

$$x\frac{lb^2\sin^2\omega}{C} - C;$$

et il est clair que, pour former le module, il faut *la retrancher* de l'autre aire. Le point où le module change de forme a donc pour abscisse la valeur de x qu'on tire de l'équation

$$x\frac{lb^2\sin^2\omega}{C} - C = 0,$$

dans laquelle il faudra mettre pour b^2 sa valeur en fonction de a^2 et $b_{,}^2$; ce qui donne

$$x = \frac{2C^2}{lb_{,}^2\sin^2\omega\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4C^2}{a_{,}^2 b_{,}^2\sin^2\omega}}\right)}.$$

Mais comme les points à l'égard desquels il y a lieu de former le module sont tous sur la conique représentée par l'équation (4), le système sera uniforme ou sera bifide, suivant que cette valeur de x sera plus grande ou plus petite que $a_{,}$. Cela conduit aux résultats suivants :

« A partir du centre d'une ellipse jusqu'à la distance $\frac{a_{,}}{2}$ mesurée » sur le diamètre dont la longueur est $2a_{,}$, le premier système focal » peut être indifféremment uniforme ou bifide selon la grandeur du » module ; mais au-delà il est constamment bifide. Quant au second » système focal, il peut être uniforme ou bifide selon la grandeur du » module, quelle que soit d'ailleurs la situation des foyers. »

V.

Suite de l'application à l'ellipse. — Systèmes focaux du second genre.

Les systèmes focaux d'une même conique peuvent différer entre eux par une circonstance beaucoup plus importante que toutes celles

que nous avons étudiées jusqu'ici; et cette circonstance mérite d'autant plus d'être considérée, que si l'on n'en tenait pas compte il serait impossible de posséder toutes les analogies dont la théorie des foyers est susceptible.

On voit bien que si on change le signe de C^2 dans l'équation (3), il en résulte un nouveau lieu géométrique; ou bien si après avoir fait ce changement, on identifie encore l'équation (3) avec (4), il en résulte de nouvelles valeurs pour les quantités a^2 et b^2 données par les formules (5); c'est-à-dire que les bases reçoivent alors une nouvelle forme. Mais changer le signe de C^2 dans (3), c'est la même chose que changer le signe de toutes les quantités sous les radicaux dans l'équation (2); et, pour interpréter ce dernier changement de signe par rapport à la théorie des systèmes focaux, il faut connaître la signification géométrique des radicaux ainsi transformés.

Or, comme l'expression $\left[ab \sin\omega \sqrt{\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} - 1}\right]$ était la mesure de la superficie d'un certain quadrilatère dont la formation a été donnée ci-dessus dans le paragraphe IV, il arrive que l'expression $\left[ab \sin\omega \sqrt{1 - \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2}}\right]$, différant de la précédente par le signe de la quantité sous le radical, représente la mesure de superficie d'un nouveau quadrilatère toujours relatif à la base elliptique dont les demi-diamètres sont a et b, mais formé d'une façon très différente.

Dans cette seconde sorte de quadrilatère, le point (xy) doit être pris *intérieurement* à l'ellipse; aussi ne représente-t-il plus le point de concours de deux tangentes, ni l'un des sommets du quadrilatère vecteur: il se trouve à l'intersection des diagonales de ce quadrilatère. L'une des diagonales est le rayon elliptique qui passe par le point en question, et l'autre est une corde conjuguée à ce rayon. Ainsi l'un des sommets est toujours au centre de la base, lequel demeurant fixe quand le point (xy) vient à changer de position, conserve par-là le caractère de pivot ou foyer. Mais les trois autres sommets du quadrilatère sont constamment sur le contour de la base. D'ailleurs, si dans cette même expression du nouveau quadrilatère vecteur on change le signe de a^2 ou celui de b^2, on aura la mesure

d'un quadrilatère relatif à l'hyperbole; celui-ci résultant *de la différence* des deux triangles qui ont leurs sommets, l'un au centre de la base hyperbolique, l'autre à la rencontre de cette courbe avec le rayon vecteur mené au point intérieur (x, y); et dont la base commune est la corde conjuguée à ce rayon vecteur, menée par le même point (x, y).

Ces quadrilatères, que j'appellerai *de second genre*, et qui sont relatifs à des points placés dans la concavité de la base (elliptique ou hyperbolique), sont analogues à ceux que nous avions considérés d'abord et qui étaient relatifs à des points extérieurs. Et de même que, parmi tous les points qui sont à la fois extérieurs à deux ellipses ou à deux hyperboles, on a pu chercher le lieu géométrique de tous ceux pour lesquels la somme ou la différence des quadrilatères de premier genre forme un module constant, on peut aussi se proposer le problème de chercher, parmi tous les points qui sont intérieurs à la fois à deux ellipses ou à deux hyperboles, le lieu géométrique de ceux pour lesquels la somme ou la différence des quadrilatères de second genre constitue aussi un module constant. Dans ce dernier cas les deux courbes données seraient à l'égard du lieu cherché les bases d'un *système focal du second genre*. Et, pour que le lieu cherché fût en effet une section conique, on trouverait d'abord les mêmes conditions que dans la recherche relative aux systèmes de premier genre: c'est-à-dire qu'il faut que les bases soient semblables et semblablement placées sur la ligne qui joint leurs centres. D'ailleurs la conique correspondante aurait également son centre situé sur la même ligne; et enfin, dans le cas d'un système à module simple, l'équation de cette conique serait la suivante

$$C^2a^2\sin^2\omega.y^2+b^2\sin^2\omega(C^2+l^2b^2\sin^2\omega)x^2=C^2[(a^2-l^2b^2\sin^2\omega-C^2], \quad (3\ bis)$$

ce qui est précisément l'équation (3), relative aux systèmes du premier genre, mais dans laquelle on a changé le signe de C^2; de sorte que si l'on veut faire coïncider le lieu géométrique qui correspond à (3 *bis*) avec la conique de l'équation (1), il faudra déterminer les bases par le moyen des formules (5), en ayant l'attention d'y changer aussi le signe de C^2; ce qui donnera

$$\left.\begin{aligned} b^2 &= \frac{1}{2} b_{,}^2 \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4C^2}{a_{,}^2 b_{,}^2 \sin^2 \omega}}\right), \\ \frac{a^2}{b^2} &= \frac{a_{,}^2}{b_{,}^2} - \frac{2l^2}{b_{,}^2 \left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{4C^2}{a_{,}^2 b_{,}^2 \sin^2 \omega}}\right)} \end{aligned}\right\}. \quad (5\ bis)$$

D'après cela, en renouvelant par rapport à un diamètre quelconque de l'ellipse la discussion précédente, on établira sans peine les résultats suivants :

« Le premier des deux systèmes focaux de second genre, relatifs » à une grandeur donnée du module et à une situation particulière » des foyers, est toujours réel et toujours à bases elliptiques. D'ailleurs » il peut être indifféremment bifide ou uniforme selon la grandeur » du module.

» Le second système focal de second genre est toujours à bases » hyperboliques, mais il n'existe pas partout. Notamment ses bases » deviennent idéales pour tous les foyers qui sont à une distance » du centre moindre que $a_{,}$; et au-delà de cette limite, il faut » encore pour la réalité des bases que le module ne dépasse pas une » certaine valeur dépendant de la distance au centre. Enfin le second » système de second genre peut être bifide partout où il existe, mais » il ne peut être uniforme que si la distance des foyers au centre de » la conique est plus petite que $\frac{1}{2} a_{,}(1 + \sqrt{5})$. »

Il faut remarquer d'ailleurs que les bases hyperboliques de second genre ont leurs diamètres transverses coïncidant toujours avec la ligne des centres; et ce, contrairement aux bases hyperboliques du premier genre qui ont toujours, comme on l'a vu, leur diamètre transverse parallèle aux ordonnées, c'est-à-dire à la direction qui est conjuguée avec la ligne des centres. On se rendra facilement compte de cette différence par la considération que les bases de second genre doivent renfermer dans leur concavité l'ellipse ou plus généralement la conique proposée, tandis que le contraire a lieu pour les bases de premier genre.

VI.

Propriétés spéciales des systèmes à bases circulaires.

Il serait facile d'étendre la discussion précédente à l'hyperbole (et même à la parabole, à l'aide de cette propriété que l'aire vectrice est toujours, comme nous l'avons fait voir, une fonction rationnelle de l'abscisse); mais ce qui précède suffit pour justifier ce que j'ai avancé en commençant, que tout point d'un diamètre quelconque d'une conique peut être considéré comme un vrai foyer; nous avons vu même qu'à chaque couple de foyers correspond une infinité de systèmes focaux très divers.

Maintenant il convient d'examiner plus particulièrement les lois des systèmes focaux dont les bases sont circulaires, ces systèmes jouissant tous de la propriété remarquable que leur module, quel que soit le genre auquel ils appartiennent, peut être pris si l'on veut sous la forme linéaire. Ainsi dans les systèmes circulaires du premier genre, le module linéaire résulte, comme on l'a vu ci-dessus, de la somme faite ou de la différence de deux tangentes menées de chaque point de la conique aux deux cercles de base; et dans les systèmes circulaires de second genre, il est égal à la somme ou à la différence des deux cordes respectivement construites dans chaque cercle de base en menant par chaque point de la conique une perpendiculaire aux deux rayons de ces mêmes bases. Discutons donc de ce point de vue les propriétés de l'ellipse et de l'hyperbole.

Par les formules (5) on connaîtra que dans l'ellipse les systèmes focaux de premier genre à bases circulaires sont exclusivement sur le grand axe, tandis qu'au contraire les systèmes circulaires de second genre [par (5 *bis*)] sont tous sur le petit axe. Et comme les systèmes de premier genre sont bifides toutes les fois que les foyers se trouvent à l'égard du centre en-deçà des centres de courbure qui correspondent aux sommets principaux de la courbe; ainsi les systèmes du second genre sont bifides quand leurs foyers sont en-deçà des centres de courbure relatifs aux sommets du petit axe. De là une propriété digne de remarque commune à tous les cercles qui, ayant leurs cen-

tres sur l'un des axes, sont tangents à la courbe; seulement cette propriété éprouve une modification essentielle quand on passe de l'un à l'autre des axes. De plus, au-delà des centres de courbure des sommets principaux sur l'axe principal, ou des seconds sommets sur le second axe, il y a encore des systèmes circulaires. Mais à partir du centre de courbure du sommet principal, les bases relatives au grand axe vont toujours en diminuant jusqu'à la distance qui est propre aux foyers ordinaires; et au-delà il n'y a plus de systèmes circulaires. Au contraire sur le second axe il y a toujours un système circulaire (du second genre), quelle que soit la position des foyers; et la grandeur des bases y augmente indéfiniment à partir du centre.

Dans l'hyperbole on retrouvera d'abord, par le moyen des formules (5) appropriées à ce genre de courbe, les systèmes circulaires de premier genre relatifs à des foyers situés sur l'axe transverse, systèmes dont nous avons déjà reconnu l'existence et les propriétés par des considérations géométriques. Mais on verra de plus que deux points quelconques du second axe sont foyers d'un système circulaire du premier genre, lequel est toujours bifide et conséquemment très facile à construire. Ainsi, en considérant la forme linéaire du module, on pourra exprimer dans l'hyperbole comme dans l'ellipse, une propriété commune à tous les cercles qui, ayant leurs centres sur l'un des deux axes, sont tangents à la courbe. Mais dans l'hyperbole cette propriété demeure la même à l'égard des deux axes, le module s'y formant toujours de la somme ou de la différence des tangentes menées d'un point de la courbe aux deux cercles de base. En outre, il ne faut pas oublier que sur l'axe transverse de l'hyperbole, notamment dans la longueur comprise entre les foyers ordinaires et les centres de courbure aux sommets, il y a, comme pour l'ellipse, certains cercles qui ne touchent pas la courbe et qui présentent néanmoins la propriété indiquée ci-dessus. Quant aux systèmes circulaires de second genre, il n'en existe aucun dans l'hyperbole, pas plus sur le premier que sur le second axe; et c'est ce dont il était facile de se convaincre *à priori* et abstraction faite des formules, puisque, en règle générale, les bases du second genre embrassent toujours la conique proposée dans l'intérieur de leur concavité. Aussi

trouve-t-on que, par rapport à l'hyperbole, toutes les bases du second genre sont hyperboliques.

VII.

Des foyers ordinaires et des contre-foyers

Nous pouvons maintenant expliquer la signification propre des foyers ordinaires dans la théorie générale des foyers. On y doit considérer ces points remarquables comme les foyers d'un système circulaire du premier genre dont les bases sont évanouissantes. Et ce peu de mots fait bien comprendre pourquoi il n'existe de tels points que sur l'axe principal. En effet, dans l'ellipse le second axe n'a de systèmes circulaires que du second genre, et les systèmes circulaires de premier genre qui sont propres au second axe de l'hyperbole ont leurs bases toujours tangentes à cette courbe, de sorte que ces bases ne peuvent jamais y devenir évanouissantes.

Nous pouvons aussi décider la question de savoir s'il existe quelques points qui soient analogues aux foyers ordinaires.

Premièrement, en considérant l'analogie de l'hyperbole équilatère ou hypercle (*) avec le cercle, on est induit à chercher s'il existe sur les axes d'une conique des points que l'on puisse considérer comme les foyers d'un système hyperciclique à bases évanouissantes, en remarquant d'ailleurs qu'une hyperbole évanouissante ne se réduit pas à un point comme l'ellipse, mais à un système de deux droites. Pour cela il faut supposer dans les formules (5) les conditions suivantes :

$$\sin\omega = 1, \quad b^2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{a^2}{b^2} = -1.$$

(*) Je crois pouvoir employer ce nom d'*hypercle* qui m'a paru très propre à désigner l'hyperbole équilatère en rappelant son analogie avec le cercle. Lorsque je parlerai de *systèmes hypercicliques*, on entendra donc que je veux parler de systèmes focaux ayant pour bases des hyperboles équilatères. J'emploie le mot hyperciclique et non pas *hyperculaire*, parce qu'il faut considérer le mot hypercle comme contracté d'*hypercicle*, et non pas d'*hyper-cercle* que les lois étymologiques repousseraient.

De là il sera facile de déduire, tant pour l'ellipse que pour l'hyperbole, la situation des points en question que j'appelle *contre-foyers*.

On trouvera pour l'ellipse

$$l^2 = a_1^2 + b_1^2;$$

de sorte que dans cette sorte de conique la réalité des contre-foyers ne dépend pas de la valeur relative des axes; ils existent aussi bien sur le petit axe que sur l'axe principal et, si l'ellipse proposée devient un cercle, tous les diamètres en possèdent deux.

Pour l'hyperbole, la situation des contre-foyers est donnée par

$$l = a_1^2 - b_1^2, \quad \text{ou bien} \quad l^2 = b_1^2 - a_1^2,$$

suivant que l'axe $2a_1$ par lequel nos formules désignent toujours celui qui porte les deux foyers, rencontre le périmètre de la courbe ou ne le rencontre pas. Dans la première des formules précédentes a_1 représente la longueur du demi-diamètre transverse, au lieu que dans la seconde ce demi-diamètre est représenté par b_1. Et de là il est facile de conclure que l'hyperbole peut être dépourvue de contre-foyers, ou bien en posséder quatre comme l'ellipse. Elle en est dépourvue si l'axe transverse est plus petit que le second axe; dans le cas contraire, chacun des axes en possède deux comme dans l'ellipse.

Si dans une ellipse on se représente les contre-foyers par les points (A, A) sur l'un des axes et par (B, B) sur l'autre axe, on remarquera que les quatre droites qui représentent deux à deux les hypercles évanouissants relatifs aux contre-foyers (A, A), représentent aussi, mais combinées convenablement, les hypercles relatifs aux contre-foyers (B, B). D'ailleurs ces droites sont toujours tangentes à l'ellipse.

Dans une hyperbole douée de contre-foyers on observera des circonstances tout-à-fait semblables.

Quant à la propriété caractéristique des contre-foyers, elle reçoit une expression digne de remarque si on considère la valeur générale du module et si on y écrit les conditions qui caractérisent un système hyperciclique à bases évanouissantes.

La valeur générale du module est la suivante

$$ab \sin \omega \left(\sqrt{\frac{(x-l)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1} \pm \sqrt{\frac{(x+l)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1} \right) = 2C,$$

dans laquelle a et b représentent, comme à l'ordinaire, les demi-diamètres des bases. Nous y conservons le double signe par la raison que les droites auxquelles se réduisent les hypercles évanouissants étant toujours tangentes à la conique, le module correspondant est toujours bifide. De plus, en introduisant les conditions du système hyperciclique à bases évanouissantes, il faut considérer que la supposition $b = 0$ rendra nul le module $2C$. Mais le rapport $\frac{2C}{b}$ demeure fini et égal à une quantité constante. En représentant cette quantité par k, le résultat des substitutions indiquées donnera finalement

$$\left[\sqrt{(\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + x)^2 - y^2}\right] \pm \left[\sqrt{(\sqrt{a_1^2 + b_1^2} - x)^2 - y^2}\right] = k.$$

Si la conique proposée est une ellipse il faut conserver à a_1^2 et b_1^2 leurs signes positifs; si c'est une hyperbole on prendra négativement celle des deux quantités qui se rapporte à l'axe imaginaire, en se rappelant toujours que la lettre a_1 est relative à celui des axes qui porte les contre-foyers, que ce soit ou non l'axe réel.

L'équation précédente exprime, tant pour l'ellipse que pour l'hyperbole, une propriété susceptible d'une représentation graphique très simple. Si on construit sur l'axe d'une conique deux demi-cercles ayant pour diamètres les distances comptées sur cet axe entre le pied d'une ordonnée et les deux contre-foyers relatifs au même axe, demi-cercles qui se toucheront toujours extérieurement dans le cas de l'ellipse; et si, par un arc décrit du pied de l'ordonnée comme centre, on marque dans chacun d'eux une corde égale à cette ordonnée, la somme ou bien la différence des deux cordes supplémentaires sera une quantité constante, savoir la somme pour tout point dont l'abscisse est plus petite que $\frac{a_1^2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$; et la différence si l'abscisse est plus grande. De plus la valeur de cette quantité cons-

tante est toujours égale à $2a_{,,}$ c'est-à-dire au diamètre sur lequel sont les contre-foyers que l'on considère ; circonstance qui confirme pleinement l'analogie des contre-foyers avec les foyers ordinaires.

On peut encore considérer comme particulièrement analogues aux foyers ordinaires les points d'un diamètre quelconque pour lesquels le système focal est à bases évanouissantes, avec la circonstance que le rapport $\frac{a^2}{b^2}$ soit égal à l'unité. Pareillement sur un diamètre quelconque on pourra chercher les analogues des contre-foyers, c'est-à-dire les points pour lesquels, les bases étant évanouissantes, le rapport $\frac{a^2}{b^2}$ est égal à -1. Le lieu de ces derniers points, tant dans l'ellipse que dans l'hyperbole, est toujours un cercle, mais il n'existe dans l'hyperbole que sous la condition ci-dessus indiquée pour la réalité des contre-foyers. Quant au lieu géométrique des points analogues aux foyers ordinaires, il dépend d'une courbe du quatrième degré qui est comprise tout entière dans le cas de l'ellipse entre les deux diamètres conjugués égaux, et dans le cas de l'hyperbole entre les deux asymptotes (*) ; de sorte que ces points ne se retrouvent pas indifféremment sur tous les diamètres.

Si on accepte les analogies précédentes il faudra reconnaître, dans les surfaces de second ordre qui sont de révolution, l'existence des contre-foyers.

Ainsi l'ellipsoïde de révolution qui peut manquer de foyers ordinaires a toujours ses deux contre-foyers. L'hyperboloïde de révolution à une nappe ou à deux nappes possède deux contre-foyers ou n'en possède pas, selon que l'axe réel de la génératrice surpasse en grandeur absolue l'axe imaginaire ou lui est inférieur. Enfin le paraboloïde de révolution a son contre-foyer placé sur l'axe, à la même distance du sommet que le foyer ordinaire.

S'il s'agit d'une surface quelconque du second ordre, concevons toutes les sections qu'il est possible d'y former par les divers plans qui contiennent un même diamètre. Deux points fixes de ce diamètre

(*) Dans le cas de l'hyperbole équilatère, le lieu en question est une autre hyperbole équilatère.

pourront être les foyers communs de divers systèmes focaux propres à chacune de ces sections. Et si l'on conçoit que pour ces systèmes le module soit le même, alors le lieu des bases sera une surface déterminée à l'aide de laquelle tous les points de la proposée se trouveront liés par une relation uniforme. De sorte qu'on pourra considérer deux points quelconques d'un diamètre d'une surface du second ordre comme jouissant d'une propriété analogue à celle des foyers. Mais la surface des bases est en général du sixième degré; seulement elle devient une surface du second ordre et de révolution, quand la proposée est elle-même de révolution, et quand les foyers sont pris sur l'axe.

Note. Quand on considère la définition qu'Euler a donnée pour les foyers: « Des » points tels que leur distance à chacun des points de la conique soit une fonction » rationnelle de l'abscisse », et quand d'ailleurs on envisage la propriété caractéristique des deux foyers pris simultanément, on peut être porté à croire que la *généralisation de la théorie des foyers* consisterait à définir ces deux points par la condition que la somme ou la différence de leurs distances à un même point de la conique soit une quantité non plus constante, mais exprimée rationnellement en fonction de l'abscisse. Admettant hypothétiquement que de tels points existassent, et que le coefficient de l'abscisse dans la fonction en question dépendît de leur situation, on pourrait imaginer que ce coefficient fût susceptible de s'annuler pour la situation propre aux foyers ordinaires; ce qui en effet rattacherait ces deux points à une loi générale. Mais il est facile d'apprécier en peu de mots la valeur de cette hypothèse.

Concevons une conique située d'une manière quelconque sur le plan des coordonnées, et proposons-nous la question de savoir s'il existe deux ou plusieurs points tels que la somme de leurs distances, à un point quelconque de cette conique, soit une fonction rationnelle de l'abscisse et de l'appliquée, c'est-à-dire une fonction de la forme

$$A + Bx + Cy.$$

Si de tels points existaient, en considérant les points qui leur seraient symétriques à l'égard du centre de la courbe, on verra sans peine que la somme des distances du point (x, y) à ces nouveaux foyers serait exprimée par

$$A + 2(B^2 + C^2) - Bx + Cy$$

formule dans laquelle je représente par η et ξ les coordonnées du centre. D'où il suit que la somme totale des distances d'un point quelconque de la conique, tant aux premiers qu'aux nouveaux foyers, serait une quantité constante. Mais on sait bien que les foyers ainsi entendus ne peuvent pas être au nombre de plus de deux. Il sera facile d'approprier ce genre de démonstration à la parabole. Je me borne à faire remarquer que si au lieu de chercher sur le plan d'une conique des points tels que la somme de leurs distances à un point quelconque de cette conique soit une fonction rationnelle de l'abscisse et de l'ordonnée, on demandait s'il existe des cercles tels que la somme des tangentes menées à chacun d'eux depuis un point quelconque de la conique fût une telle fonction, on en trouverait une infinité que notre théorie enseigne à construire. — J'ajouterai aussi que toutes les courbes de degré supérieur qui admettent une génération par *fils tendus* (c'est-à-dire les courbes telles que la somme algébrique (simple ou composée) des distances de chacun de leurs points à un certain nombre de foyers soit constante, courbes proposées pour la première fois par Tschirnhausen) admettent aussi une génération par des tangentes vectrices menées à autant de cercles qu'elles ont de simples foyers, ou bien par des aires vectrices construites sur autant de sections coniques considérées comme *bases;* et cela d'une infinité de façons pour une même courbe.

Sur les Variations séculaires des angles que forment entre elles les droites résultant de l'intersection des plans des orbites de Jupiter, Saturne et Uranus;

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

1. Les plans actuels des orbites des trois planètes supérieures, Jupiter, Saturne et Uranus, se coupent suivant des droites OA, OA′, OA″, qui font entre elles de très petits angles V, V′, V″. Cette remarque faite depuis long-temps, donne lieu à une question intéressante. En effet, si les planètes n'étaient soumises qu'à l'action du Soleil, les angles V, V′, V″ seraient invariables; mais en ayant égard aux effets produits par l'attraction mutuelle de Jupiter, Saturne et Uranus, abstraction faite des autres planètes, que l'on peut négliger ici à cause de leur petitesse et de leur éloignement, il est clair que les angles V, V′, V″ varieront avec le temps. On peut donc se demander si, dans un grand nombre de siècles, ces angles seront encore très petits, ou si au contraire ils auront éprouvé des accroissements considérables. Telle est la question que je me propose de résoudre ici par une méthode simple et directe.

2. Soient m, m', m'' les masses de trois planètes circulant dans le même sens autour du Soleil, sur des ellipses dont les excentricités ont des valeurs très petites. Nous regardons les planètes m, m', m'' comme composant en quelque sorte avec le Soleil un système particulier, c'est-à-dire comme assez éloignées des autres planètes m''', m^{IV}, etc. pour que ces dernières n'aient sur le mouvement des premières qu'une influence extrêmement petite; ce cas est à peu près celui de Jupiter, Saturne et Uranus. Les plans des trois orbites forment en outre de très petits angles soit entre eux, soit avec un plan fixe auquel nous rapporterons les mouvements de m, m', m'', et qui sera, si l'on veut, le plan de l'écliptique à une époque arbitrairement

choisie. Le plan de m'' et celui de m' coupent le plan de m suivant les droites OA′, OA″ : les droites dont il s'agit font entre elles deux angles supplémentaires l'un de l'autre; nous désignerons par V celui de ces angles qui est actuellement $< 90°$, en sorte que l'on ait aujourd'hui $V < 90°$. Le plan de m'' et celui de m coupent celui de m' suivant les droites OA , OA″ comprenant de même entre elles l'angle aigu V′ : enfin le plan de m' et celui de m coupent le plan de m'' suivant les droites OA , OA′ qui comprennent entre elles l'angle aigu V″.

Désignons par φ, φ', φ'' les inclinaisons respectives des trois orbites sur le plan fixe, et par α, α', α'' les longitudes de leurs nœuds ascendants. L'équation du premier plan en coordonnées rectangulaires sera

$$z = \operatorname{tang}\varphi \cos\alpha . y - \operatorname{tang}\varphi \sin\alpha . x.$$

Les équations du second et du troisième plan seront de même

$$z = \operatorname{tang}\varphi' \cos\alpha' . y - \operatorname{tang}\varphi' \sin\alpha' . x,$$
$$z = \operatorname{tang}\varphi'' \cos\alpha'' . y - \operatorname{tang}\varphi'' \sin\alpha'' . x.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$\operatorname{tang}\varphi \sin\alpha = p, \quad \operatorname{tang}\varphi \cos\alpha = q,$$
$$\operatorname{tang}\varphi' \sin\alpha' = p', \quad \operatorname{tang}\varphi' \cos\alpha' = q',$$
$$\operatorname{tang}\varphi'' \sin\alpha'' = p'', \quad \operatorname{tang}\varphi'' \cos\alpha'' = q'',$$

les équations des plans de nos trois planètes deviendront simplement

$$z = qy - px, \quad z = q'y - p'x, \quad z = q''y - p''x.$$

De là, par les formules connues de la Géométrie analytique, on conclura facilement, en fonction de p, q, p', q', p'', q'', les valeurs des trois quantités tang V, tang V′, tang V″. Ces formules sont assez compliquées, mais on les simplifiera en observant que, à cause de la petitesse des quantités p, q, p', q', p'', q'', il est permis de négliger les termes où ces quantités entrent à la quatrième dimension par rapport à ceux où elles entrent à la deuxième dimension. On trouvera de cette manière

$$\tang V = \pm \frac{(p-p')(q-q'') - (p-p'')(q-q')}{(p-p')(p-p'') + (q-q')(q-q'')},$$
$$\tang V' = \pm \frac{(p'-p'')(q'-q) - (p'-p)(q'-q'')}{(p'-p'')(p'-p) + (q'-q'')(q'-q)},$$
$$\tang V'' = \pm \frac{(p''-p)(q''-q') - (p''-p')(q''-q)}{(p''-p)(p''-p') + (q''-q)(q''-q')},$$

et l'on aura soin de prendre dans les seconds membres, un signe tel que ces seconds membres soient positifs, du moins à l'origine du temps, puisque les angles V, V′, V″ sont alors aigus par hypothèse.

Si l'on développe les numérateurs des trois fractions précédentes, on trouve que ces numérateurs sont identiquement égaux entre eux : nous représenterons par u leur valeur commune, c'est-à-dire que nous ferons

$$(p-p')(q-q'') - (p-p'')(q-q') = u.$$

En posant de plus

$$(p-p')(p-p'') + (q-q')(q-q'') = v,$$
$$(p'-p'')(p'-p) + (q'-q'')(q'-q) = v',$$
$$(p''-p)(p''-p') + (q''-q)(q''-q') = v'',$$

nous aurons

$$\tang V = \pm \frac{u}{v}, \quad \tang V' = \pm \frac{u}{v'}, \quad \tang V'' = \pm \frac{u}{v''}.$$

Je nomme φ_0, φ'_0, φ''_0, α_0, α'_0, α''_0 les valeurs initiales de φ, φ', φ'', α, α', α'', c'est-à-dire les valeurs que ces dernières quantités possèdent lorsque le temps t est égal à zéro. En général l'indice o placé au bas d'une lettre exprime pour nous la valeur initiale de la fonction du temps que cette lettre représente. Si les planètes m, m', m'' étaient soumises seulement à l'action du Soleil, elles décriraient autour de cet astre des ellipses invariables : les angles α, φ, α', φ', α'', φ'' demeureraient constamment égaux à α_0, φ_0, α'_0, φ'_0, α''_0, φ''_0, et par suite les angles V, V′, V″ seraient aussi constants. Mais en vertu de l'attraction réciproque des planètes, les angles α, φ, α', φ', α'', φ'' éprouvent des variations plus ou moins considérables qui doivent

influer sur les valeurs de V, V′, V″ : il s'agit d'examiner si ces perturbations agrandiront à la longue d'une manière très sensible les angles V, V′, V″, ou si au contraire ces angles resteront toujours très petits comme à l'origine.

3. Lorsqu'on a seulement égard aux inégalités séculaires du mouvement des trois planètes m, m', m'', les six quantités p, q, p', q', p'', q'', sont, comme on sait, des fonctions du temps t déterminées, avec une approximation suffisante pour notre objet, par six équations différentielles, linéaires et du premier ordre, que voici

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= -(0,1)(q-q') - (0,2)(q-q''),\\
\frac{dq}{dt} &= (0,1)(p-p') + (0,2)(p-p''),\\
\frac{dp'}{dt} &= -(1,0)(q'-q) - (1,2)(q'-q''),\\
\frac{dq'}{dt} &= (1,0)(p'-p) + (1,2)(p'-p''),\\
\frac{dp''}{dt} &= -(2,0)(q''-q) - (2,1)(q''-q'),\\
\frac{dq''}{dt} &= (2,0)(p''-p) + (2,1)(p''-p').
\end{aligned}$$

Je prends ces équations dans la *Mécanique céleste*. Les coefficients (0, 1), (0, 2), etc., sont des quantités de l'ordre des masses m, m', m'' : les valeurs de ces coefficients dépendent de celles des demi-grands axes des orbites de ces trois planètes.

L'intégration des six équations différentielles précédentes introduira six constantes arbitraires que l'on déterminera à l'aide des valeurs initiales de p, q, p', q', p'', q'', lesquelles sont aussi au nombre de six. En désignant par p_0, q_0, p'_0, q'_0, p''_0, q''_0, ces valeurs initiales, on aura

$$\begin{aligned}
p_0 &= \operatorname{tang}\varphi_0 \sin\alpha_0, & q_0 &= \operatorname{tang}\varphi_0 \cos\alpha_0,\\
p'_0 &= \operatorname{tang}\varphi'_0 \sin\alpha'_0, & q'_0 &= \operatorname{tang}\varphi'_0 \cos\alpha'_0,\\
p''_0 &= \operatorname{tang}\varphi''_0 \sin\alpha''_0, & q''_0 &= \operatorname{tang}\varphi''_0 \cos\alpha''_0;
\end{aligned}$$

quant aux valeurs mêmes de p, q, etc., elles seront de cette forme

$$p = N\sin l + N_1\sin(g_1 t + l_1) + N_2\sin(g_2 t + l_2),$$
$$q = N\cos l + N_1\cos(g_1 t + l_1) + N_2\cos(g_2 t + l_2);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$N, N_1, N_2, \ldots\ l, l_1, l_2, \ldots$ étant des constantes, et g_1, g_2 représentant les racines d'une certaine équation du second degré.

Les valeurs numériques de toutes les constantes N, N_1, etc., ayant été calculées par Duval le Roy pour le cas particulier de Jupiter, Saturne et Uranus, on voit qu'en admettant l'exactitude des calculs de cet astronome, les valeurs des quantités p, q, p', q', p'', q'' elles-mêmes pourraient être regardées comme des fonctions entièrement connues du temps t : en les substituant dans les expressions de tang V, tang V′, tang V″, il serait dès lors facile de savoir ce que deviennent les angles V, V′, V″ au bout d'un temps quelconque ; mais ici nous présenterons d'une autre manière la recherche des formules propres à déterminer ces angles, et nous ne ferons aucun usage des calculs de Duval le Roy.

4. Étudions d'abord la quantité représentée par u au n° 2. En la différenciant, il vient

$$\frac{du}{dt} = (q' - q'')\frac{dp}{dt} + (q'' - q)\frac{dp}{dt} + (q - q')\frac{dp''}{dt}$$
$$+ (p'' - p')\frac{dq}{dt} + (p - p'')\frac{dq'}{dt} + (p' - p)\frac{dq''}{dt}.$$

Substituons dans cette équation, au lieu de $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dp'}{dt}$, $\frac{dq'}{dt}$, $\frac{dp''}{dt}$, $\frac{dq''}{dt}$, leurs valeurs fournies par les équations différentielles du n° 3 ; en posant

$$(2,0) - (1,0) = K, \quad (0,1) - (2,1) = K', \quad (1,2) - (0,2) = K'',$$

et ayant égard aux valeurs de v, v', v'', nous obtiendrons sans difficulté

$$\frac{du}{dt} = Kv + K'v' + K''v''.$$

Si l'on différencie actuellement la valeur de v, on a

$$\frac{dv}{dt} = (p - p' + p - p'')\frac{dp}{dt} + (p'' - p)\frac{dp'}{dt} + (p' - p)\frac{dp''}{dt}$$
$$+ (q - q' + q - q'')\frac{dq}{dt} + (q'' - q)\frac{dq'}{dt} + (q' - q)\frac{dq''}{dt}.$$

Cette équation se simplifie beaucoup lorsqu'on remplace les dérivées $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, etc. par leurs valeurs, et lorsqu'on observe que les trois fonctions

$$(p - p')(q - q'') - (p - p'')(q - q'),$$
$$(p' - p'')(q' - q) - (p' - p)(q' - q''),$$
$$(p'' - p)(q'' - q') - (p'' - p')(q'' - q),$$

sont identiquement égales entre elles. On trouve ainsi

$$\frac{dv}{dt} = [(0, 1) - (2, 1) + (1, 2) - (0, 2) + (1, 0) - (2, 0)]u,$$

ou bien

$$\frac{dv}{dt} = -(K - K' - K'')u.$$

On obtient de même

$$\frac{dv'}{dt} = -(K' - K'' - K)u,$$
$$\frac{dv''}{dt} = -(K'' - K - K')u.$$

Mais en différenciant l'équation

$$\frac{du}{dt} = Kv + K'v' + K''v'',$$

il vient

$$\frac{d^2u}{dt^2} = K\frac{dv}{dt} + K'\frac{dv'}{dt} + K''\frac{dv''}{dt},$$

ce qui, en ayant égard aux valeurs de $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dv'}{dt}$, $\frac{dv''}{dt}$, et faisant

$$n^2 = K(K - K' - K'') + K'(K' - K'' - K) + K''(K'' - K - K'),$$

nous donne

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -n^2u,$$

équation différentielle du second ordre dont l'intégrale est

$$u = h\sin(nt + \omega),$$

h et ω désignant deux constantes arbitraires.

Pour déterminer ces constantes, on posera $t = 0$ dans les deux équations

$$u = h\sin(nt + \omega),$$

$$\frac{du}{dt} = \mathrm{K}v + \mathrm{K}'v' + \mathrm{K}''v'' = nh\cos(nt + \omega),$$

et en nommant u_0, v_0, v'_0, v''_0 les valeurs initiales de u, v, v', v'', on aura

$$u_0 = h\sin\omega, \quad \mathrm{K}v_0 + \mathrm{K}'v'_0 + \mathrm{K}''v''_0 = nh\cos\omega;$$

il faudra en outre se rappeler que

$$\begin{aligned}
u_0 &= (p_0 - p'_0)(q_0 - q''_0) - (p_0 - p''_0)(q_0 - q'_0),\\
v_0 &= (p_0 - p'_0)(p_0 - p''_0) + (q_0 - q'_0)(q_0 - q''_0),\\
v'_0 &= (p'_0 - p''_0)(p'_0 - p_0) + (q'_0 - q''_0)(q'_0 - q_0),\\
v''_0 &= (p''_0 - p_0)(p''_0 - p'_0) + (q''_0 - q_0)(q''_0 - q'_0).
\end{aligned}$$

De là résulte, pour déterminer h, l'égalité

$$h = \sqrt{\frac{1}{n^2}(\mathrm{K}v_0 + \mathrm{K}'v'_0 + \mathrm{K}''v''_0)^2 + u_0^2};$$

ensuite on prendra $\sin\omega = \frac{u_0}{h}$.

En remplaçant u par $h\sin(nt + \omega)$ dans les équations qui fournissent les valeurs de $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dv'}{dt}$, $\frac{dv''}{dt}$, puis intégrant ces équations, il vient

$$\begin{aligned}
v &= v_0 + \frac{(\mathrm{K} - \mathrm{K}' - \mathrm{K}'')h}{n}[\cos(nt + \omega) - \cos\omega],\\
v' &= v'_0 + \frac{(\mathrm{K}' - \mathrm{K}'' - \mathrm{K})h}{n}[\cos(nt + \omega) - \cos\omega],\\
v'' &= v''_0 + \frac{(\mathrm{K}'' - \mathrm{K} - \mathrm{K}')h}{n}[\cos(nt + \omega) - \cos\omega],
\end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\begin{aligned} v &= \lambda + \mu \cos(nt + \omega), \\ v' &= \lambda' + \mu' \cos(nt + \omega), \\ v'' &= \lambda'' + \mu'' \cos(nt + \omega), \end{aligned}$$

en faisant

$$\mu = \frac{(K - K' - K'')h}{n}, \quad \mu' = \frac{(K' - K'' - K)h}{n}, \quad \mu'' = \frac{(K'' - K - K')h}{n},$$

et

$$\lambda = v_0 - \mu \cos\omega, \quad \lambda' = v_0' - \mu' \cos\omega, \quad \lambda'' = v_0'' - \mu'' \cos\omega.$$

Par suite on a

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} V &= \pm \frac{h \sin(nt + \omega)}{\lambda + \mu \cos(nt + \omega)}, \\ \operatorname{tang} V' &= \pm \frac{h \sin(nt + \omega)}{\lambda' + \mu' \cos(nt + \omega)}, \\ \operatorname{tang} V'' &= \pm \frac{h \sin(nt + \omega)}{\lambda'' + \mu'' \cos(nt + \omega)}. \end{aligned}$$

5. Faisons l'application de nos formules au cas particulier où les trois planètes m, m', m'' sont respectivement Jupiter, Saturne et Uranus. En rapportant leurs mouvements à l'écliptique fixe de 1800 (époque à laquelle nous plaçons l'origine du temps t), et adoptant les nombres contenus dans le troisième volume de l'ouvrage de M. de Pontécoulant, on a

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 1^\circ.18'.52'', & \alpha_0 &= 98^\circ.25'.45'', \\ \varphi_0' &= 2^\circ.29'.38'', & \alpha_0' &= 111^\circ.56'.\ 7'', \\ \varphi_0'' &= 46'.26'', & \alpha_0'' &= 72^\circ.59'.21'', \end{aligned}$$

la circonférence étant supposée partagée en 360°. Il en résulte par un calcul très simple

$$\begin{aligned} p_0 &= 0{,}0226975, & q_0' &= -0{,}0162700, \\ q_0 &= -0{,}0033635, & p_0 &= 0{,}0129167, \\ p_0' &= 0{,}0404010, & q_0'' &= 0{,}0039517; \end{aligned}$$

puis

$$u_0 = 0,000003269,$$
$$v_0 = -0,000267568,$$
$$v_0' = 0,000747560,$$
$$v_0'' = 0,000416744.$$

D'après M. de Pontécoulant, on a aussi

$$(0,1) = 7'',367280, \quad (1,2) = 0'',386656,$$
$$(0,2) = 0'',105202, \quad (2,0) = 0'',931305,$$
$$(1,0) = 18'',129129, \quad (2,1) = 1'',390990;$$

d'où l'on conclut

$$K = -17'',197824, \quad K' = 5'',976290, \quad K'' = 0,281454:$$

les coefficients K, K', K'' sont, comme on voit, exprimés en secondes sexagésimales : en adoptant les valeurs ci-dessus, le temps t qui entre dans nos formules, représentera un certain nombre d'années juliennes.

En partant de ces données, on a trouvé $n = 23'',311702$. La valeur de u_0 étant très petite, on peut négliger u_0^2 dans l'expression générale de h : on a ainsi

$$h = \frac{Kv_0 + K'v_0' + K''v_0''}{n} = 0,000394:$$

par suite il vient

$$\mu = -0,000396, \quad \mu' = 0,000387, \quad \mu'' = 0,000194.$$

L'angle ω, dont le sinus $= \frac{u_0}{h}$, est à peu près d'un demi-degre; on peut donc regarder son cosinus comme sensiblement égal à l'unité : de là résulte

$$\lambda = v_0 - \mu = 0,000128,$$
$$\lambda' = v_0' - \mu' = 0,000360,$$
$$\lambda'' = v_0'' - \mu'' = 0,000222,$$

d'où l'on voit que l'on a $\lambda^2 < \mu^2$, $\lambda'^2 < \mu'^2$, et au contraire $\lambda''^2 > \mu''^2$. Cela posé, discutons successivement les valeurs de tang V, tang V', tang V''.

La valeur de V devant être positive pour $t = 0$, il faut poser

$$\text{tang V} = -\frac{h \sin(nt + \omega)}{\lambda + \mu \cos(nt + \omega)}.$$

Cette valeur de tang V devient infinie lorsqu'on a

$$\cos(nt + \omega) = -\frac{\lambda}{\mu},$$

équation qui fournit pour t une valeur réelle, puisque λ^2 est $< \mu^2$.

L'angle V peut donc croître jusqu'à 90° et au-delà; il n'est susceptible d'aucun *maximum*. On peut en dire autant de l'angle V'. La valeur de tang V'' est au contraire

$$\text{tang } V'' = \frac{h \sin(nt + \omega)}{\lambda'' + \mu'' \cos(nt + \omega)},$$

λ''^2 étant $> \mu''^2$, de sorte qu'elle ne devient jamais infinie.

L'angle V'' sera donc toujours plus petit que 90° : son *maximum* s'obtiendra en égalant à zéro la différentielle de l'expression précédente prise par rapport au temps. On a par là

$$\textit{maximum} \text{ de tang } V'' = \frac{h}{\sqrt{\lambda''^2 - \mu''^2}}.$$

Mais à cause de la petitesse de $\lambda''^2 - \mu''^2$, on voit qu'un léger changement dans les données du problème suffirait pour rendre $\lambda''^2 < \mu''^2$, c'est-à-dire pour rendre V'' susceptible d'un accroissement indéfini. On voit de même que ce changement pourrait suffire aussi pour rendre la valeur de λ'^2 supérieure à celle de μ'^2, c'est-à-dire pour donner un *maximum* à V'. En observant en outre que les petites quantités négligées dans nos formules peuvent avoir ici un effet très sensible, on comprend que les conclusions relatives aux angles V', V'' sont tout à-fait incertaines. Cependant nos calculs prouvent suffisamment que ces angles ne sont pas assujétis à demeurer toujours très petits. Quant à l'angle V, sa marche est déterminée avec plus de précision par notre analyse, puisque la différence entre λ^2 et μ^2 est considérable, la valeur de μ^2 étant $> 9\lambda^2$.

Je ferai observer en terminant, que les expressions de tang V, tang V', tang V'', obtenues ci-dessus, sont périodiques : elles ne changent pas lorsque t augmente de $\frac{C}{n}$, C étant la circonférence estimée en secondes sexagésimales : la période de leurs variations est donc de 56000 ans à peu près.

Sur la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de plusieurs quantités positives;

PAR J. LIOUVILLE.

Dans une des notes de son cours d'*Analyse algébrique*, M. Cauchy a prouvé que la première de ces deux moyennes est toujours supérieure ou au moins égale à l'autre, en sorte que l'on a

$$(1)\qquad \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

lorsque toutes les quantités $x_1, x_2, \ldots x_n$ sont égales entre elles, et

$$(2)\qquad \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} > \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

dans le cas contraire. On démontre assez simplement ce théorème de la manière suivante.

Observons d'abord que les formules (1) et (2) sont nécessairement vérifiées lorsque $n = 2$, car leur premier membre est alors égal à

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2}{2} + \sqrt{x_1 x_2},$$

tandis que le second se réduit à $\sqrt{x_1 x_2}$. Cela étant, il suffit de montrer que si les formules (1) et (2) sont exactes pour une certaine valeur de n, elles ne cesseront pas de l'être en augmentant cette valeur d'une unité : en d'autres termes il s'agit de faire voir qu'en admettant les formules (1) et (2) pour une valeur donnée de n, la fonction

$$y = \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} - x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1}$$

sera toujours positive ou nulle, ce dernier cas n'ayant lieu que quand $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1}$. Or en traitant x_{n+1} comme une variable continue, et prenant la dérivée de y par rapport à cette variable, on la trouve égale à

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}}{n+1}\right)^n - x_1 x_2 \ldots x_n :$$

cette dérivée est donc une fonction croissante de x_{n+1}, laquelle s'évanouit quand

$$x_{n+1} = -(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + (n+1)\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

valeur qui se réduit à x_1 lorsqu'on a $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$; pour des valeurs de x_{n+1} plus petites ou plus grandes que celle que nous venons d'écrire, cette même dérivée est successivement négative et positive; par suite la fonction y est successivement décroissante et croissante : son minimum a lieu quand la dérivée se réduit à zéro : ce minimum est

$$n . x_1 x_2 \ldots x_n \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}\right),$$

et d'après les formules (1) et (2) il est nul ou positif : donc *à fortiori* la fonction y est aussi $\geqq 0$; de plus pour qu'elle se réduise à zéro, il faut, 1° que le minimum déterminé ci-dessus soit nul, ce qui exige que $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$; 2° que x_{n+1} ait précisément la valeur qui convient à ce minimum, c'est-à-dire soit aussi égale à x_1.

Note sur quelques points de la théorie de l'Électricité;

PAR M. J. BERTRAND,

Élève de l'École Polytechnique.

I.

L'expérience montre que l'électricité se porte à la surface des corps : ce fait a été pris comme point de départ par les géomètres qui se sont occupés de la théorie mathématique de l'électricité. Mais on peut prouver très simplement de la manière suivante qu'il est une conséquence de la loi de Coulomb.

M. Poisson a montré que lorsqu'un point M dont les coordonnées sont x, y, z, est attiré, suivant cette loi, par une masse dont il fait partie, on a

$$(a) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\rho,$$

V représentant $\iiint \frac{dm}{r}$, c'est-à-dire la somme des quotients obtenus en divisant la masse de chaque élément par sa distance au point M, et ρ étant la densité relative à ce dernier point. Maintenant considérons un système dans lequel l'électricité soit en équilibre; et dans l'intérieur d'un des corps qui en font partie, prenons un point M à volonté; désignons par ρ la densité de l'électricité libre en ce point : il s'agit de prouver que l'on a $\rho = 0$. Or, pour que le fluide neutre placé en M ne soit pas décomposé, il faut que la résultante des actions électriques exercées sur ce point soit nulle : en d'autres termes si dm désigne un élément positif ou négatif de masse électrique, il faut que la fonction désignée tout-à-l'heure par V reste constante lorsqu'on fait varier les coordonnées x, y, z, du point M. Par suite l'équation (a)

nous donne $\rho = 0$, C. Q. F. D. Il ne peut donc y avoir d'électricité qu'aux points sur lesquels l'atmosphère peut agir (*). Ceci suppose que la loi de Coulomb soit applicable aux petites distances : on ne pourrait pas prononcer *à priori* sur cette hypothèse, mais il me semble qu'elle est rendue probable par la conséquence qu'on vient d'en tirer.

II.

On sait que quels que soient les rayons de deux sphères en contact, la densité électrique est toujours nulle au point commun. Je vais démontrer que ce résultat s'applique à un nombre quelconque de corps électrisés qui se touchent.

Par le point de contact de deux de ces corps, menons-leur une normale commune, qui percera les surfaces intérieures des deux couches en des points A et B. Si par ces points A et B on mène des plans tangents aux surfaces sur lesquelles ils se trouvent, on décomposera chaque couche en deux parties, dont l'une sera infiniment petite par rapport à l'autre.

Soient M, M′, N, N′, ces parties.

On sait (**) que les actions exercées sur A et sur B par chacune des portions finies M, N auront les mêmes composantes normales, en négligeant les infiniment petits du second ordre. Soit P la composante de M, Q celle de N : les composantes dues aux parties M′, N′, seront, comme Laplace l'a prouvé, $\pm 2\pi\varepsilon$, $\pm 2\pi\varepsilon'$, le signe $+$ se rapportant au point B, le signe $-$ au point A, et ε, ε' représentant les

(*) Des expériences assez nombreuses, et dont quelques-unes remontent aux recherches physiques et mécaniques de Hauksbée, semblent indiquer, il est vrai, que l'électricité peut se conserver dans un vide très parfait. Que cela tienne ou non à la petite quantité d'air qu'il est impossible de chasser, ce fait n'est nullement en contradiction avec le raisonnement précédent, car il est clair que l'on doit toujours admettre aux limites des corps une certaine modification qui influe sur l'équilibre des molécules électriques qui en sont voisines; et d'ailleurs, notre démonstration prouve la nécessité d'une pareille influence, quelle qu'en soit du reste la cause.

(**) Premier Mémoire de M. Poisson sur l'électricité (*Mémoires de l'Institut*, année 1811, première partie, page 31).

épaisseurs des deux couches. Soit R la composante qui provient de l'action de tous les autres corps : on aura

$$P - Q - R - 2\pi\varepsilon - 2\pi\varepsilon' = 0 \quad \text{pour l'équilibre du point A,}$$
$$P - Q - R + 2\pi\varepsilon + 2\pi\varepsilon' = 0 \quad \text{pour l'équilibre du point B;}$$

or ces deux équations sont incompatibles, à moins que $\varepsilon + \varepsilon' = 0$, auquel cas l'épaisseur totale des deux couches électriques en M se réduit à zéro.

III.

Le phénomène remarquable connu sous le nom de *pouvoir des pointes* résulte de ce que les corps anguleux ne peuvent pas conserver l'électricité qu'ils renferment. On peut démontrer de la manière suivante que la densité électrique devrait en effet devenir infinie aux points anguleux d'un système, quelle que soit du reste sa forme.

Supposons pour fixer les idées, que le corps considéré présente une partie conique à base circulaire MNA. Si l'équilibre était possible l'électricité formerait, dans le voisinage du sommet A, une couche conique infiniment mince : soit O le sommet de la surface intérieure de cette couche, en sorte que OA représente l'épaisseur électrique au point A.

Il faudra, pour l'équilibre, que la résultante des actions sur le point O soit nulle, et par conséquent, que la partie infiniment petite OA, détachée par un plan OP perpendiculaire à l'axe, exerce une action égale et contraire à celle de tout le reste du corps. Or on voit très facilement que la composante suivant l'axe du cône de l'action de OA est moindre que 2πOA, qui serait sa valeur dans le cas où la couche serait sphérique et de même épaisseur OA, et je vais prouver que l'action des autres parties du système donne une composante infinie par rapport à la densité électrique de ses différents points.

Pour cela, décomposons le cône en tranches comprises entre deux plans très voisins perpendiculaires à son axe, et qui coupent les génératrices à une distance l du sommet : l'action d'une des tranches aura pour composante suivant l'axe

$$\frac{2\pi m i d l \cos a}{l}$$

m étant une constante égale à $\sin\frac{\theta}{2}$ si θ désigne l'angle du cône, ω étant l'angle que fait avec l'axe une droite menée du point O à un quelconque des points de la tranche, et i représentant l'épaisseur moyenne dans la section. En négligeant les actions des parties situées à une distance du point O représentée par un nombre fini l_2 aussi petit qu'on voudra, lesquelles ne peuvent produire qu'une résultante finie, il faut intégrer cette expression, depuis $l=0$ jusqu'à $l=l_2$. L'intégrale ainsi formée aura une valeur plus grande que celle qu'on obtiendrait en remplaçant la limite 0 par l_1, l_1 étant la distance (infiniment petite) à laquelle on peut considérer les actions comme dirigées suivant les génératrices du cône, et l'angle ω comme égal à $\frac{\theta}{2}$. Elle sera donc plus grande que

$$2\pi m \cos\frac{\theta}{2}\int_{l_1}^{l_2}\frac{i\,dl}{l} = 2\pi m i \cos\frac{\theta}{2}(\log l_2 - \log l_1),$$

i étant une valeur moyenne de i; or l_1 est infiniment petit, par conséquent $\log l_1$ est négatif et infiniment grand : l'action est donc infinie, et OA devrait l'être aussi pour l'équilibre.

Le raisonnement que nous venons de faire pour le cône à base circulaire devrait être modifié dans le cas général : on prouverait alors que l'action est plus grande que celle qui se rapporterait à un cône dont les génératrices auraient sur l'axe choisi arbitrairement une inclinaison égale à l'inclinaison maxima des tangentes et dont la densité électrique serait égale pour chaque tranche à la densité minima des points de la tranche correspondante. On ferait un raisonnement semblable pour le cas d'une arête vive quelconque.

IV.

Laplace a prouvé que l'action d'un corps électrisé sur un point de sa surface est proportionnelle à la densité électrique en ce point. Dans sa démonstration, il suppose que la couche soit homogène de la surface intérieure à la surface extérieure. Cette hypothèse n'a évidemment aucune influence quand on calcule l'action sur un point éloigné, mais on pourrait craindre qu'elle n'altérât les résultats, quand il s'agit des points mêmes de la surface. Nous allons montrer qu'il n'en est rien, et que le théorème de Laplace subsiste, quelle que soit la loi de décroissement de la densité.

1°. Considérons une sphère à la surface de laquelle l'électricité forme une couche infiniment mince, partout également épaisse. Supposons que la densité croisse, ainsi que la symétrie l'exige, par couches concentriques. L'action d'un élément compris entre deux sphères infiniment voisines sur un point de la surface sera

$$\frac{4\pi(r+\varrho)^2}{(r+c)^2}\,D d\rho,$$

D étant la densité qui correspond au rayon $r+\rho$. L'action totale sera donc

$$4\pi\int_0^c \frac{(r+\varrho)^2}{(r+c)^2}\,D d\rho\,;$$

mais on peut supposer $\frac{r+\varrho}{r+c}=1$, en négligeant les infiniment petits du second ordre. On aura donc

$$4\pi\int_0^c D d\rho,$$

ce qui n'est autre chose que l'expression de Laplace, car $\int_0^c D d\rho$ est la densité moyenne.

2°. Considérons sur un corps de forme quelconque un point où la surface puisse être considérée comme sphérique dans une étendue infiniment petite. L'action se composera, ainsi que Laplace l'a prouvé, de la somme de celles qu'exerce sur son sommet et sur le centre de sa base la calotte infiniment petite, détachée par le plan tangent à la couche inférieure. Cette somme est indépendante de la forme du reste du corps ; elle est donc d'après ce que nous venons de dire $4\pi\varepsilon$.

3°. Supposons un point où les rayons de courbure soient inégaux : on décomposera la calotte infiniment petite, en fuseaux qui pourront être considérés comme tracés sur des sphères de différents rayons, et l'on remarquera que la somme des actions qui correspond à un de ces fuseaux est $\varepsilon d\omega$, $d\omega$ représentant l'angle du fuseau. En intégrant on retrouvera $2\pi\varepsilon$. L'action est donc indépendante du mode de décroissement de la densité, lorsqu'il s'agit des points de la surface. Mais il est facile de voir que cette conséquence ne s'applique pas aux points intermédiaires de la couche.

V.

M. Liouville a démontré cette année, dans son cours au Collége de France, que la loi de Coulomb est la seule qui permette au fluide électrique de former une couche infiniment mince à la surface d'une sphère.

On peut établir cette proposition importante de la manière suivante:

Dans toute autre loi que celle de la raison inverse du carré de la distance, une couche homogène exerce une certaine action sur les points intérieurs : ce théorème qui a été démontré par Laplace dans la *Mécanique céleste*, peut s'établir par les considérations suivantes qui sont dues, je crois, à M. Rodrigues.

Si une couche n'exerce pas d'action sur les points intérieurs, une sphère agira sur les points de sa surface comme toute autre sphère concentrique de rayon plus grand. Soit A cette action : le théorème d'Ivory qui, comme on sait, s'applique à toute loi d'attraction, prouve que l'action A de la grande sphère sur les points situés à la surface de la petite, est à l'action B de la petite sur les points de la grande, comme les carrés des rayons de ces sphères.

Or A est, nous l'avons dit, indépendant du rayon de la grande sphère; donc B est en raison inverse du carré de ce rayon, ce qui prouve la loi énoncée, en supposant que la petite sphère se réduise à son centre.

Ainsi une couche homogène est impossible, lorsque la loi d'attraction est différente de celle de Coulomb.

Cela posé, je dis que s'il y avait une couche infiniment mince qui pût assurer l'équilibre, on pourrait en former une autre, homogène, et qui serait également possible.

Supposons qu'un certain état où l'épaisseur serait représentée par une fonction $\varphi(\theta, \psi)$ des coordonnées angulaires, par rapport à des axes passant par le centre, puisse exister : il est évident qu'en prenant la même fonction par rapport à d'autres axes passant également par le centre, on formera d'autres états possibles ; car cela revient à donner un mouvement commun à tous les points du système. Le nombre de ces états est infini et en prenant pour chaque point la moyenne des épaisseurs qu'il a dans chacun d'eux, on en formera un qui sera homogène, et comme ce dernier est impossible, le premier ne pouvait pas non plus exister.

Sur le Principe fondamental de la théorie des Équations algébriques;

PAR J. LIOUVILLE.

1. En insérant dans la nouvelle édition de ses *Leçons de Géométrie analytique* la démonstration d'un beau théorème de M. Cauchy relatif aux racines des équations (*), M. Lefébure de Fourcy a rappelé au souvenir des géomètres un petit ouvrage de M. Mourey, imprimé en 1828, sous ce titre : *Vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires.* « Le but de l'auteur est, » dit-il, d'affranchir entièrement l'analyse de ces sortes de quantités : » il y réussit en introduisant dans le calcul deux espèces de grandeurs, » qui ne sont autre chose que les distances et les angles qu'on dé- » signe sous le nom de *coordonnées polaires*. Dans le système d'Al- » gèbre développé par M. Mourey, ces grandeurs offrent la repré- » sentation fidèle des expressions imaginaires qu'on emploie dans » l'Algèbre ordinaire; et en suivant l'ordre de ses idées, l'auteur » était parvenu à démontrer qu'une équation du degré m a m » racines. »

Nous ne pensons pas que les notations et les dénominations nouvelles introduites par M. Mourey méritent d'être préférées à celles que les géomètres ont adoptées depuis long-temps. Mais la démonstration qu'il a donnée du théorème cité par M. Lefébure de Fourcy est très remarquable, bien qu'elle ne soit peut-être pas tout-à-fait complète. Le lecteur nous saura gré de l'exposer ici en peu de mots, en adoptant pour plus de simplicité le langage ordinaire des analystes.

2. La méthode de M. Mourey repose précisément sur le lemme dont

(*) *Voyez* tome Ier de ce Journal, page 278.

M. Sturm a fait usage dans celle des démonstrations du théorème de M. Cauchy où il admet *à priori* que tout polynome de degré m se décompose en m facteurs du premier degré (*). Voici en quoi consiste ce lemme qu'il suffira d'énoncer ici : Étant tracé dans un plan yAx un contour fermé quelconque, imaginons qu'un point M se meuve, toujours dans le même sens, sur ce contour, puis désignons par ω, $\omega_1, \ldots \omega_{m-1}$, les angles que font avec un axe fixe les rayons vecteurs menés à chaque instant au point M de m points fixes A, B,...D situés dans le plan yAx soit à l'intérieur, soit à l'extérieur du contour fermé, mais non sur le contour même. Quand le point M aura parcouru le contour entier et sera revenu à sa position primitive, la somme des angles $\omega + \omega_1 + \ldots + \omega_{m-1}$ aura augmenté ou diminué, suivant que le mouvement aura eu lieu dans un sens ou dans le sens opposé, d'autant de fois quatre angles droits qu'il y a de points A, B, etc., dans l'intérieur du contour fermé.

Si donc on sait d'avance qu'il y a au moins un de ces points A, B, etc., dans l'intérieur du contour fermé, on voit qu'en déplaçant le point M d'une certaine quantité, et dans un sens convenable, sur le contour qu'il pourra du reste, s'il est nécessaire, parcourir plusieurs fois, on augmentera ou l'on diminuera la somme $\omega + \omega_1 + \ldots + \omega_{m-1}$ de telle quantité qu'on voudra. On s'en convaincra en observant que les angles ω, ω_1, etc., varient d'une manière continue pendant le mouvement du point M. Tel est le principe qui sert de base aux recherches de M. Mourey.

3. Maintenant soit

$$z^m + Pz^{m-1} + \ldots + Sz + T = 0 \tag{1}$$

une équation algébrique de degré m, dont les coefficients sont réels ou de la forme $a + b\sqrt{-1}$. Il s'agit de prouver que cette équation a au moins une racine de même forme que les coefficients. Or comme le théorème est évident lorsqu'on a $m = 1$, il suffira, pour l'établir en général, de prouver que s'il est exact pour toute équa-

(*) Tome Ier de ce Journal, page 290.

tion de degré inférieur à m, il sera vrai aussi pour toute équation de degré m.

Admettre que toute équation de degré $< m$ a au moins une racine, c'est admettre, comme on sait, que tout polynome de degré inférieur à m est décomposable en facteurs du premier degré par rapport à z. Ainsi en particulier le polynome

$$z^{m-1} + Pz^{m-2} + \ldots\ldots + S$$

doit pouvoir se décomposer dans un produit tel que

$$(z - a_1 - b_1\sqrt{-1}) \ldots\ldots (z - a_{m-1} - b_{m-1}\sqrt{-1});$$

la question est de savoir si ce produit, multiplié par z, peut être rendu égal à $-T$.

Posons $z = x + y\sqrt{-1}$, puis représentons-nous x et y comme les coordonnées d'un point M appartenant à un plan dans lequel sont tracés deux axes rectangulaires Ax, Ay; enfin désignons par B, C... D les $(m-1)$ points déterminés par les coordonnées $(a_1, b_1), \ldots (a_{m-1}, b_{m-1})$. En nommant ρ le rayon vecteur AM, et ω l'angle que ce rayon vecteur fait avec l'axe des x, on aura

$$z = x + y\sqrt{-1} = \rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega).$$

Représentant de même par ρ_1 la droite BM et par ω_1 l'angle de cette droite avec l'axe des x, il vient

$$z - a_1 - b_1\sqrt{-1} = \rho_1(\cos\omega_1 + \sqrt{-1}\sin\omega_1):$$

on trouvera semblablement pour les autres points C, ...D

$$z - a_2 - b_2\sqrt{-1} = \rho_2(\cos\omega_2 + \sqrt{-1}\sin\omega_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z - a_{m-1} - b_{m-1}\sqrt{-1} = \rho_{m-1}(\cos\omega_{m-1} + \sqrt{-1}\sin\omega_{m-1}),$$

de telle sorte que le produit

$$z(z - a_1 - b_1\sqrt{-1}) \ldots\ldots (z - a_{m-1} - b_{m-1}\sqrt{-1})$$

devient

$$[\rho\rho_1 \ldots \rho_{m-1} \cos(\omega + \omega_1 + \ldots + \omega_{m-1}) + \sqrt{-1} \sin(\omega + \omega_1 + \ldots + \omega_{m-1})].$$

Pour que ce produit soit égal à $-T$, il faut qu'après avoir mis $-T$ sous la forme $R(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)$, on ait

$$(2) \qquad \rho\rho_1 \ldots \rho_{m-1} = R,$$

$$(3) \qquad \omega + \omega_1 + \ldots + \omega_{m-1} = \alpha \pm 2i\pi,$$

i étant zéro ou un nombre entier quelconque.

4. Occupons-nous spécialement de l'équation (2), et après avoir donné à ω une valeur particulière quelconque, observons que le produit $\rho\rho_1 \ldots \rho_{m-1}$ est une fonction continue de ρ, qui se réduit à 0 pour $\rho = 0$, et qui croît jusqu'à ∞ quand ρ augmente indéfiniment. Donc pour chaque valeur déterminée de ω, il existe au moins une valeur réelle et positive de ρ qui vérifie l'équation (2). « En d'autres termes, si » du point A et dans le plan yAx on tire des rayons en tous sens, sur » chaque rayon il se trouvera un point M satisfaisant à la condi- » tion (2) : or la réunion de tous ces points sera visiblement une courbe » enveloppant le point A de toutes parts (*) ; donc il existe une courbe » δ, enveloppant le point A, dont chaque point satisfait à la première » condition (2). » Maintenant y a-t-il sur cette courbe δ un point M pour lequel l'équation (3) soit aussi satisfaite? La réponse à cette question ne sera pas douteuse, si l'on se rappelle qu'en vertu du lemme du n° 2, on peut, en faisant mouvoir le point M sur notre contour fermé δ, augmenter ou diminuer la somme $\omega + \omega_1 + \ldots + \omega_{m-1}$ de telle quantité qu'on voudra : cela résulte de ce qu'au moins un des points A, B,...D, savoir le point A, est situé dans l'intérieur de ce contour fermé. Ajoutons qu'aucun d'eux ne peut être situé

(*) C'est ainsi que s'exprime M. Mourey ; mais pour que l'ensemble des points M forme une courbe véritable, il faut que le rayon vecteur AM varie d'une manière continue en même temps que ω, ce que l'auteur n'a pas prouvé : sur ce point sa démonstration nous paraît incomplète.

sur le contour même. En effet, si cela avait lieu pour B par exemple, il faudrait qu'en supposant le point M placé en B, l'équation (2) fût satisfaite; or cela est absurde, puisque le rayon vecteur BM ou ρ_1 étant nul alors, le produit $\rho\rho_1 \ldots \rho_{m-1}$ s'annule aussi et ne peut plus être égal à R.

Ainsi se trouve démontrée la proposition fondamentale de la théorie des équations algébriques. Cette proposition est du reste susceptible d'un grand nombre d'autres démonstrations très différentes entre elles. En voici une assez singulière, et, je crois, peu connue.

5. En désignant par ρ et ω les coordonnées polaires d'un point pris dans un plan fixe horizontal, et par z une fonction réelle et déterminée de ρ et ω qui ne devient pas infinie entre les limites 0 et R de ρ, 0 et 2π de ω, on voit que les deux intégrales doubles

$$\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} z\,d\omega, \quad \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R z\,d\rho,$$

sont nécessairement égales entre elles, puisqu'elles représentent toutes deux un même volume; savoir, le volume compris entre le plan fixe, la surface cylindrique droite ayant pour base un cercle de rayon R tracé autour de l'origine des coordonnées prise pour centre, et une autre surface dont l'ordonnée verticale est pour chaque système de valeurs des deux quantités ρ et ω, représentée par z. Or, on peut de là conclure, avec M. Gauss, que le premier membre de toute équation algébrique à coefficients réels

$$z^m + Az^{m-1} + Bz^{m-2} + \ldots + Lz + M = 0$$

est toujours divisible par un certain facteur réel du premier ou du second degré, c'est-à-dire par un facteur compris dans l'une des deux formes $z - \rho$, $z^2 - 2\rho z \cos\omega + \rho^2$. En d'autres termes, on peut prouver qu'il existe toujours des valeurs réelles des deux quantités ρ et ω satisfaisant à la fois aux deux équations

$$\rho^m \cos m\omega + A\rho^{m-1} \cos (m-1)\,\omega + \ldots + L\rho \cos\omega + M = 0,$$
$$\rho^m \sin m\omega + A\rho^{m-1} \sin (m-1)\,\omega + \ldots + L\rho \sin\omega = 0 \text{ (*)}.$$

(*) M. Gauss prouve très simplement, et sans recourir aux imaginaires, que si

Désignons en effet par t et u les premiers membres de ces équations, puis posons

$$t' = \frac{du}{d\omega} = \rho\frac{dt}{d\rho}, \quad u' = -\frac{dt}{d\omega} = \rho\frac{du}{d\rho},$$
$$t'' = \frac{du'}{d\omega} = \rho\frac{dt'}{d\rho}, \quad u'' = -\frac{dt'}{d\omega} = \rho\frac{du'}{d\rho}.$$

Soit R une quantité positive quelconque, mais plus grande que la plus grande des quantités

$$mA'\sqrt{2}, \sqrt{mB'\sqrt{2}}, \sqrt[3]{mC'\sqrt{2}}, \ldots\ldots \sqrt[m]{mM'\sqrt{2}},$$

où A′, B′, C′,...M′ désignent les valeurs absolues des coefficients A, B, C,...M. Cela étant, je dis que si l'on pose $\rho = R$, la somme $tt' + uu'$ aura une valeur positive. Pour le montrer, observons d'abord que les quatre quantités suivantes

$$R^m \cos\frac{\pi}{4} + AR^{m-1}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right) + \ldots + M\cos\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right),$$
$$R^m \sin\frac{\pi}{4} + AR^{m-1}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right) + \ldots + M\sin\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right),$$
$$mR^m \cos\frac{\pi}{4} + (m-1)AR^{m-1}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right) + \ldots + L\cos\left(\frac{\pi}{4}+(m-1)\omega\right),$$
$$mR^m \sin\frac{\pi}{4} + (m-1)AR^{m-1}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right) + \ldots + L\sin\left(\frac{\pi}{4}+(m-1)\omega\right),$$

que je nommerai respectivement T, U, T′, U′, sont toutes > 0 : on le prouve, par exemple, pour la première, en décomposant T sous cette forme

$$\frac{R^{m-1}}{m\sqrt{2}}\left[R + mA\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right)\right]$$
$$+\frac{R^{m-2}}{m\sqrt{2}}\left[R^2 + mB\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\omega\right)\right]$$
$$+\frac{R^{m-3}}{m\sqrt{2}}\left[R^3 + mC\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+3\omega\right)\right]$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

---

ces deux équations sont satisfaites, le polynome $z^m + Az^{m-1} +$ etc. sera divisible, soit par $z - \varrho$, si $\omega = 0$, soit par $z^2 - 2\varrho z\cos\omega + \varrho^2$, si ω diffère de 0.

et en se rappelant ce que l'on a dit ci-dessus de la grandeur de R. Une démonstration semblable s'applique aux trois autres sommes U, T′, U′.

Or, pour $\rho = R$, on a

$$t = T\cos\left(\frac{\pi}{4} + m\omega\right) + U\sin\left(\frac{\pi}{4} + m\omega\right),$$
$$u = T\sin\left(\frac{\pi}{4} + m\omega\right) - U\cos\left(\frac{\pi}{4} + m\omega\right),$$
$$t' = T'\cos\left(\frac{\pi}{4} + m\omega\right) + U'\sin\left(\frac{\pi}{4} + m\omega\right),$$
$$u' = T'\sin\left(\frac{\pi}{4} + m\omega\right) - U'\cos\left(\frac{\pi}{4} + m\omega\right),$$

et de là résulte $tt' + uu' = TT' + UU'$: donc $tt' + uu'$ est > 0. On observera en passant que nos équations donnent en outre

$$t^2 + u^2 = T^2 + U^2.$$

6. Maintenant on peut prouver le théorème dont nous nous occupons; savoir, qu'*entre les limites* $\rho = 0$, $\rho = R$, $\omega = 0$, $\omega = 2\pi$, *il existe certaines valeurs de* ω *et de* ρ *pour lesquelles on a à la fois* $t = 0$, $u = 0$. Car, si l'on n'admet pas ce théorème, il faudra en conclure que la fraction

$$z = \frac{(t^2 + u^2)(tt'' + uu'') + (tu' - ut')^2 - (tt' + uu')^2}{\rho(t^2 + u^2)^2}$$

ne deviendra pas infinie entre les limites citées, et que, par suite, on aura

$$\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} z\,d\omega = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R z\,d\rho.$$

Or il vient

$$\int z\,d\omega = \frac{tu' - ut'}{\rho(t^2 + u^2)},$$

comme on le vérifie aisément par la différentiation : de plus, t, u, t', u', reprennent les mêmes valeurs aux deux limites 0 et 2π : par conséquent

$$\int_0^{2\pi} z\,d\omega = 0,$$

en sorte que la première de nos deux intégrales doubles se réduit à

zéro. Mais la seconde est au contraire essentiellement > 0. En effet, si l'on intègre d'abord par rapport à ρ, on a

$$\int z d\rho = \frac{tt' + uu'}{t^2 + u^2} :$$

d'où

$$\int_0^R z d\rho = \frac{TT' + UU'}{T^2 + U^2},$$

et partant

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R z d\rho = \int_0^{2\pi} \frac{(TT' + UU')d\omega}{T^2 + U^2};$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R z d\rho = \text{une quantité positive},$$

puisque l'élément

$$\frac{(TT' + UU')d\omega}{T^2 + U^2}$$

est essentiellement positif. Donc l'équation

$$\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} z d\omega = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R z d\rho$$

est impossible; donc aussi la fraction z devient infinie une ou plusieurs fois, et par suite t et u s'annulent ensemble pour des valeurs réelles de ρ et ω; C. Q. F. D. (*).

(*) Si nous posons $\log \rho = \theta$, ou $\rho = e^\theta$, nous verrons de suite que $\varphi = t$ et $\varphi = u$ sont deux intégrales de l'équation $\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} + \frac{d^2\varphi}{d\omega^2} = 0$. D'après un théorème démontré par M. Lamé (*Journal de l'École Polytechnique*, XXIIIe cahier, p. 245), cette équation sera donc aussi vérifiée par $\varphi = \log \sqrt{t^2 + u^2}$. Il suit de là que les deux quantités

$$\frac{d^2 \log \sqrt{t^2 + u^2}}{d\theta^2}, \quad -\frac{d^2 \log \sqrt{t^2 + u^2}}{d\omega^2},$$

sont égales entre elles; leur valeur commune est précisément celle du produit ρz.

Démonstration de la formule générale qui donne les valeurs des inconnues dans les équations du premier degré;

PAR M. MOLINS.

Cramer et Bezout, qui se sont occupés de l'élimination au premier degré, ont les premiers donné cette formule générale à laquelle ils n'étaient arrivés que par analogie, mais que depuis Laplace a démontrée *à priori* dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1772. M. Gergonne a présenté avec quelques développements et perfectionné la théorie de Laplace dans le tome quatrième des *Annales des Mathématiques*. La démonstration que nous proposons procède par voie d'extension ou de généralisation, on suppose la formule exacte pour n équations du premier degré renfermant n inconnues, et l'on fait voir qu'elle convient également à $n+1$ équations qui contiennent $n+1$ inconnues.

Avant d'exposer la démonstration, il est essentiel de bien préciser en quoi consiste la loi de formation du numérateur et du dénominateur de la valeur de chaque inconnue. Supposons que l'on ait $n+1$ équations à résoudre, et représentons les coefficients des inconnues dans l'une d'elles par $a, b, c, \ldots f, h$, et dans les autres équations par les mêmes lettres affectées d'un certain indice; soient $k, k_1, k_2, \ldots k_n$, les termes tout connus qui forment les seconds membres. Que l'on fasse le produit des quantités $a, b, c, \ldots f, h$, et qu'on forme toute les permutations dont elles sont susceptibles, on produira nécessairement des *inversions* de lettres, c'est-à-dire qu'il arrivera que des lettres qui en précédaient d'autres dans l'ordre de l'alphabet, seront précédées par elles dans certaines permutations. D'ailleurs il n'y a pas de difficulté pour évaluer le nombre des inversions qui peuvent être produites dans chaque cas; ainsi quand on n'a que trois lettres a, b, c, les permutations acb, bac ne présentent qu'une inver-

sion, *bca*, *cab* en présentent deux, *cba* en présente trois, et enfin *abc* n'en présente aucune. En un mot, pour évaluer le nombre des inversions qu'offre une permutation quelconque, il faut comparer chaque lettre successivement à toutes les autres pour voir si son rang par rapport à ces dernières détermine une inversion; mais en passant d'une lettre à une autre, il faut avoir soin de ne plus compter la première.

Cela posé, le dénominateur commun aux valeurs des inconnues s'obtient en formant toutes les permutations possibles avec les $n+1$ lettres a, b, c,... f, h, affectant dans chaque permutation la seconde lettre de l'indice 1, la troisième de l'indice 2,... la dernière de l'indice n, et faisant précéder d'un des signes $\pm$ toutes les permutations qui offrent un nombre d'inversions de même parité, et du signe contraire toutes celles qui offrent un nombre d'inversions d'une parité différente de la première. Par exemple, on pourra affecter du signe $+$ toutes les permutations qui présentent un nombre pair d'inversions, et du signe $-$ toutes celles qui en présentent un nombre impair.

Quant au numérateur de chaque inconnue, il se forme à l'aide du dénominateur commun, en y remplaçant la lettre qui représente son coefficient par la quantité toute connue k, et laissant les accents et les signes aux mêmes places qu'avant le changement de lettres.

Maintenant prenons les équations proposées qui sont:

$$(1)\quad \begin{cases} ax + by + cz + \ldots + fu + hv = k, \\ a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + f_1u + h_1v = k_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + f_2u + h_2v = k_2, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_nx + b_ny + c_nz + \ldots + f_nu + h_nv = k_n; \end{cases}$$

Appliquons-leur la méthode de résolution par les indéterminées, qui consiste à multiplier ces équations, moins la dernière, par des quantités indéterminées m, m_1, m_2,... m_{n-1}, et à ajouter les résultats à l'équation qui n'a pas été multipliée; ainsi pour obtenir la valeur de x, multiplions les n premières équations respectivement par m, m_1, m_2,... m_{n-1}, et ajoutons les produits à la dernière équa-

tion, en ayant soin d'égaler à zéro les coefficients de $y, z, \ldots u, v$; il vient

$$x = \frac{mk + m_1k_1 + m_2k_2 + \ldots + m_{n-1}k_{n-1} + k_n}{ma + m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_{n-1}a_{n-1} + a_n},$$

les quantités $m, m_1, m_2, \ldots m_{n-1}$, étant déterminées par les équations suivantes :

$$(2)\quad \begin{cases} mb + m_1b_1 + m_2b_2 + \ldots + b_n = 0, \\ mc + m_1c_1 + m_2c_2 + \ldots + c_n = 0, \\ md + m_1d_1 + m_2d_2 + \ldots + d_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ mh + m_1h_1 + m_2h_2 + \ldots + h_n = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont en nombre n, et l'on pourra par conséquent leur appliquer la loi qu'il s'agit de démontrer, car on la suppose exister pour n équations à n inconnues.

Pour rendre ces équations plus aisément comparables aux équations (1), nous les représenterons comme il suit :

$$(3)\quad \begin{cases} \alpha m + \beta m_1 + \gamma m_2 + \ldots + \varphi m_{n-1} = \chi, \\ \alpha_1 m + \beta_1 m_1 + \gamma_1 m_2 + \ldots + \varphi_1 m_{n-1} = \chi_1, \\ \alpha_2 m + \beta_2 m_1 + \gamma_2 m_2 + \ldots + \varphi_2 m_{n-1} = \chi_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n-1} m + \beta_{n-1} m_1 + \gamma_{n-1} m_2 + \ldots + \varphi_{n-1} m_{n-1} = \chi_{n-1}, \end{cases}$$

ce qui suppose l'ensemble des notations suivantes :

$$(4)\quad \begin{cases} \alpha = b, \ \beta = b_1, \ \gamma = b_2 \ldots, \varphi = b_{n-1}, \ \chi = -b_n, \\ \alpha_1 = c, \ \beta_1 = c_1, \ \gamma_1 = c_2 \ldots, \varphi_1 = c_{n-1}, \ \chi_1 = -c_n, \\ \alpha_2 = d, \ \beta_2 = d_1, \ \gamma_2 = d_2 \ldots, \varphi_2 = d_{n-1}, \ \chi_2 = -d_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n-1} = h, \ \beta_{n-1} = h_1, \ \gamma_{n-1} = h_2 \ldots, \varphi_{n-1} = h_{n-1}, \ \chi_{n-1} = -h_n. \end{cases}$$

On remarquera que dans ce tableau les lettres françaises rangées verticalement sont toutes différentes et sont affectées d'un même indice, tandis que les colonnes verticales correspondantes de lettres grecques sont formées chacune de la même lettre affectée de divers indices.

C'est l'inverse pour les lignes horizontales : sur chaque colonne horizontale la lettre française reste la même et est diversement accentuée, tandis que les lettres grecques sont différentes, mais affectées du même indice. La considération de ce tableau est indispensable dans la démonstration actuelle.

Ce qu'il faut faire voir, c'est que la loi énoncée plus haut étant applicable aux équations (3) qui sont en nombre n, l'est aussi aux équations (1) qui sont en nombre $n+1$. La seconde partie de la loi est évidente, d'après la forme de la valeur de x, car il est clair que le numérateur ne diffère du dénominateur qu'en ce que les quantités $a, a_1, a_2 \ldots, a_n$ sont remplacées par $k, k_1, k_2 \ldots k_n$. Il suffit donc de démontrer la loi de composition du dénominateur commun. Pour cela, nous allons d'abord établir que le dénominateur renferme toutes les permutations des lettres $a, b, c \ldots f, h$, affectées de divers indices.

Remarquons qu'un terme quelconque du dénominateur de x pourra être représenté par $a_p m_p$, p étant moindre que n; en outre m_p sera déterminé par les équations (3) à l'aide de la loi de formation qui leur est applicable, et un terme quelconque du dénominateur de m_p étant une permutation des lettres $\alpha, \beta, \gamma \ldots, \varphi$, diversement accentuées, il s'ensuit que le terme correspondant du numérateur de m_p sera cette même permutation dans laquelle on remplacera par la lettre χ celle qui représente le coefficient de m_p, et que nous désignerons par τ. Le rang de cette lettre τ parmi les autres lettres grecques, est marqué par $p+1$; nous désignerons par n' l'indice dont cette lettre est affectée dans la permutation que nous considérons, et par t la lettre française qui correspond à cet indice n'; le rang de la lettre t parmi les lettres françaises $b, c, d \ldots, h$ sera marqué par $n'+1$, en vertu du tableau (4). Il suit de là qu'un terme quelconque du dénominateur de x sera représenté par $\pm a_p \alpha \beta \gamma \ldots \chi_{n'} \ldots \varphi$, résultat dans lequel les lettres grecques $\alpha, \beta, \ldots \varphi$ sont censées être disposées de toutes les manières possibles et affectées de divers indices jusqu'à $n-1$. Il faut prouver que ce terme, considéré dans la généralité de son expression, renferme toutes les permutations dont sont susceptibles les lettres $a, b, c, \ldots f, h$, qu'il faut avoir soin d'affecter de divers indices jusqu'à l'indice n.

A cet effet, il faut observer que les lettres grecques $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varphi$ étant différentes, il résulte de l'inspection des lignes verticales du

tableau (4), que les lettres françaises correspondantes seront affectées d'indices différents dont le plus élevé sera marqué par $n-1$; en outre les indices de α, β, γ,... φ étant différents, il résulte de l'inspection des lignes horizontales que les lettres françaises correspondantes seront toutes différentes entre elles. D'où il suit que le produit $\alpha\beta\gamma\ldots\tau_{n'}\ldots\varphi$ équivaut au produit des quantités b, c, d,... f, h, qu'il faut concevoir disposées de toutes les manières possibles et affectées ensuite de divers indices dont le dernier est $n-1$. Maintenant si l'on considère la ligne horizontale du tableau (4), où l'indice des diverses lettres grecques est égal à n', on trouvera pour la lettre française correspondante la lettre t, qui devra être affectée d'un indice dépendant du rang de la lettre grecque τ, et ce rang est marqué par $p+1$, puisque τ est le coefficient de m_p. Concluons-en que $\tau_{n'}$ revient au même que t_p; on voit aussi que $\chi_{n'}$ correspond à $-t_n$, de sorte que lorsqu'on remplace $\tau_{n'}$ par $\gamma_{n'}$ dans la permutation $\pm a_p\alpha\beta\gamma\ldots\tau_{n'}\ldots\varphi$, c'est comme si l'on remplaçait t_p par $-t_n$. L'indice p disparaît donc dans le produit des lettres b, c, $d\ldots t\ldots f$, h; mais le facteur a_p le fait reparaître. Concluons enfin que l'expression générale $\pm a_p\alpha\beta\gamma\ldots\chi_{n'}\ldots\varphi$ comprend toutes les permutations des lettres a, b, $c\ldots f$, h, dans lesquelles la lettre a serait affectée de l'indice p. On verrait de la même manière que les numérateurs des autres parties qui composent le dénominateur de x donnent les permutations des mêmes lettres a, b, $c\ldots f$, h, dans lesquelles la lettre a serait affectée successivement de divers indices, y compris l'indice n, car on le démontrerait encore plus facilement pour le terme a_n du dénominateur de x. De là résulte évidemment la première partie de la loi que nous voulons établir.

Maintenant démontrons que les termes du dénominateur de x qui présentent un nombre pair d'inversions sont de même signe, et que ceux qui en présentent un nombre impair ont un signe différent du premier. Si cela est démontré, on pourra dire (en ayant soin toutefois de changer les signes des deux termes de la valeur de x, si cela est nécessaire) que les termes dont le nombre des inversions est pair sont affectés du signe $+$, et que ceux dont le nombre des inversions est impair sont affectés du signe $-$.

Reprenons le terme du dénominateur de m_p représenté par $\pm\alpha\beta\gamma\ldots\tau_{n'}\ldots\varphi$ ou bien $\pm\alpha\beta\gamma\ldots t_p\ldots\varphi$ qui est positif ou négatif

selon que le nombre des inversions qu'il présente est pair ou impair. Remarquons que n', qui est l'indice de la lettre grecque τ déterminant le rang de la lettre t, indique le nombre des lettres françaises $b, c, d\ldots$ qui précèdent t dans l'ordre alphabétique. Parmi ces lettres, les unes précèderont t dans la permutation $\pm\,\alpha\beta\gamma\ldots t_p\ldots\varphi$, les autres la suivront. Soit h le nombre des premières, celui des secondes sera $n'-h$. Si nous remarquons aussi que le nombre total des lettres qui précèdent t dans la permutation est égal à p (puisque t y est affecté de l'indice p), nous en conclurons que parmi les lettres qui suivent t dans l'ordre alphabétique, il y en a un nombre marqué par $p-h$ qui la précèdent dans la permutation; quant à celles qui suivent t dans la permutation, leur nombre est facile à obtenir, car du nombre total des lettres $b, c, d\ldots f, h$, qui est marqué par n, il faut évidemment retrancher $p+1$ et $n'-h$, ce qui donne $n-p-1-n'+h$. Cela posé, voyons à quoi est égal le nombre total des inversions du terme $\alpha\beta\gamma\ldots t_p\ldots\varphi$: nous en distinguerons deux sortes, selon qu'elles sont dues à la lettre t ou qu'elles en sont indépendantes. Or le nombre de celles qui proviennent de la lettre t est visiblement égal à $n'-h+p-h=n'+p-2h$; nous désignerons par ν le nombre des inversions provenant des autres lettres, de sorte que le nombre total des inversions du terme que nous considérons sera $n'+p-2h+\nu$ Mais puisqu'on remplace t_p par a_p dans la permutation, et que l'on met t_n à la fin de la permutation, la lettre a occupe le $(p+1)^{\text{ième}}$ rang et donne lieu à un nombre d'inversions marqué par p, et la lettre t, placée au dernier rang, donne lieu à un nombre d'inversions marqué par $n-(n'+1)$; car n est le nombre total des lettres $b, c, d\ldots t\ldots f, h$, et n' le nombre de celles qui précèdent t dans l'ordre alphabétique. Donc le nombre total des inversions du terme $a_p\alpha\beta\gamma\ldots\chi_n\ldots\varphi$, ou bien $a_p\alpha\beta\gamma\ldots t_n\ldots\varphi$ sera $\nu+p+n-n'-1$. Actuellement admettons que le nombre des inversions que présente le terme positif $\alpha\beta\gamma\ldots t_p\ldots\varphi$ soit pair, et désignons-le par 2μ; nous aurons, d'après ce qui précède, $\nu+n'+p-2h=2\mu$, d'où

$$\nu=2\mu-n'-p+2h,$$

valeur qui substituée dans l'expression $\nu+p+n-n'-1$, la convertit

en la suivante

$$2\mu - 2n' + 2h + n - 1$$

Or la composition de cette expression montre que la parité ou l'imparité du nombre qu'elle représente ne dépendent que de n. Donc tous les termes tels que $\alpha\beta\gamma\ldots t_p\ldots\varphi$ qui étaient positifs et renfermaient un nombre pair d'inversions, donnent lieu, après la substitution de $-t_\alpha$ à la place de t_p, à des termes tels que $-a_p\alpha\beta\gamma\ldots t_\alpha\ldots\varphi$ qui sont tous négatifs et qui ont tous des nombres d'inversions de même parité. En remplaçant 2μ par $2\mu+1$, on verra de la même manière que tous les termes positifs du dénominateur de x ont même parité entre eux, mais une parité contraire à la première. C'est là ce qu'il fallait démontrer.

Errata du Tome IV.

Page 3, ligne dernière, *au lieu de* $(\psi - t'$, *lisez* $\psi(t - t'$

Page 165, ligne 24, *au lieu de* $\Gamma(q)$, *lisez* $\Gamma(r)$

Page 186, ligne 12, *au lieu de* $e^{\frac{k}{(\mu'-h)^2}}$, *lisez* $e^{\frac{k}{(\mu'-h)^2}}$

FIN DU TOME QUATRIEME.

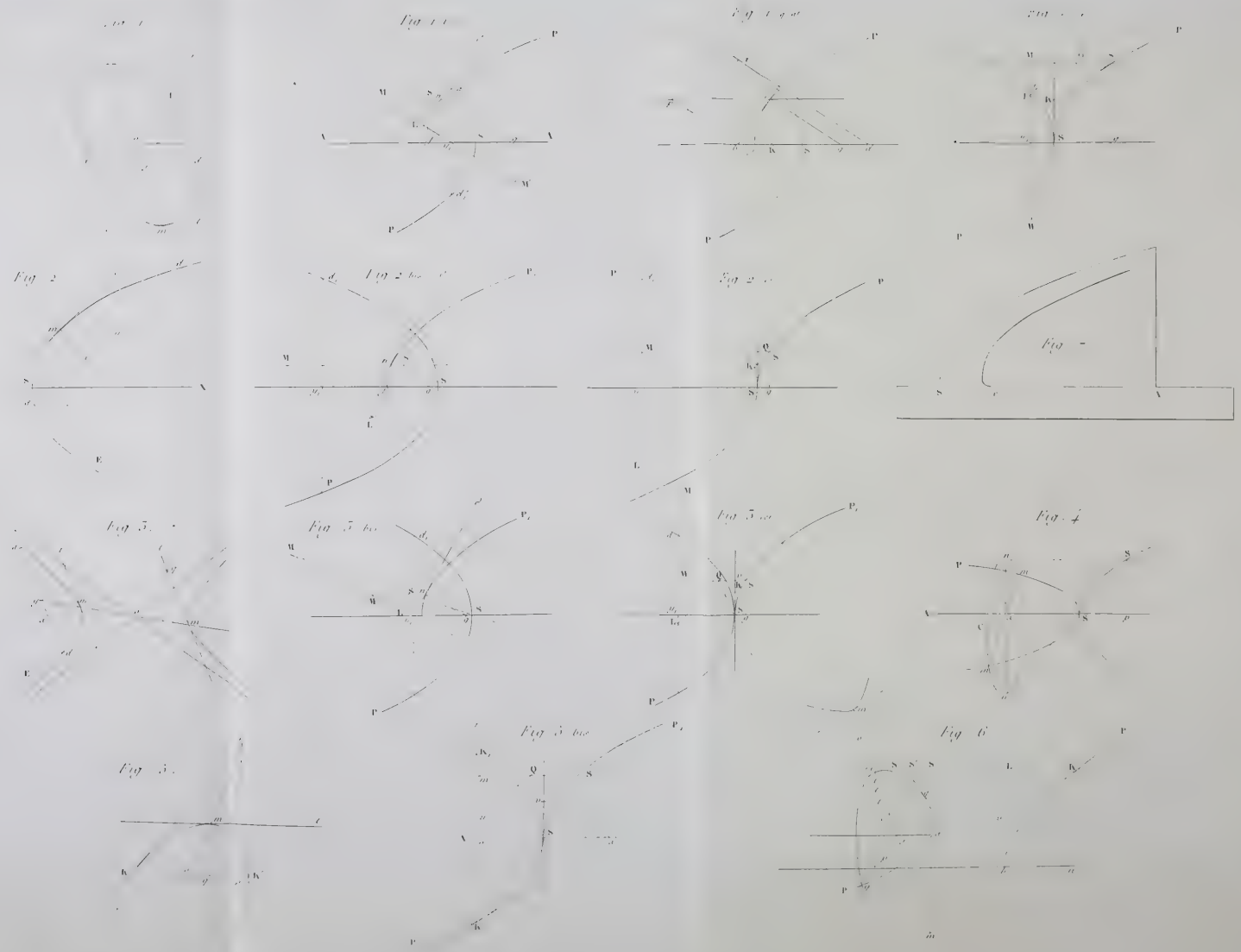
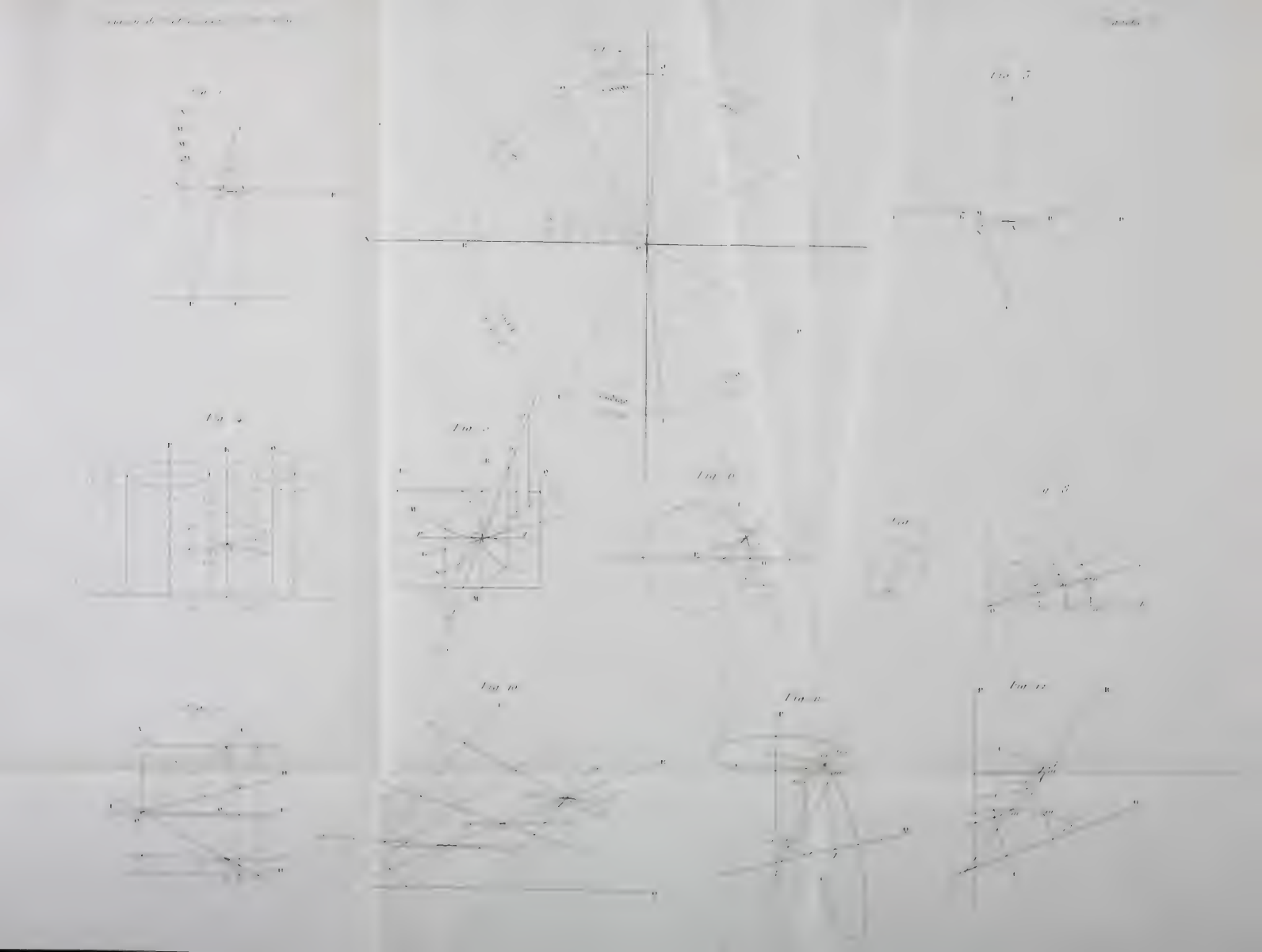


Fig. 1
Fig. 1 bis
Fig. 1 ter
Fig. 1 quat.
Fig. 2
Fig. 2 bis
Fig. 2 ter
Fig. 3
Fig. 3 bis
Fig. 3 ter
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 5 bis
Fig. 6



QA
1
J684
t.4
Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY